Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Храмешин Сергей Николаевич
Должность: Научный руководитель
Дата подписания: 19.08.2025 14:47:23
Уникальный программный ключ:
9e604e7f43158d9188ee2ea08e15bab0641b06c9

В. К. ИВАНОВ

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Учебное пособие

ЛАНЬ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2025

УДК 537.8
ББК 22.33я73

И 20 **Иванов В. К.** Физика. Электромагнетизм : учебное пособие для вузов / В. К. Иванов. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 264 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-507-51550-9

Содержание предлагаемого пособия составляет третью часть лекционного курса по физике для студентов второго-третьего семестра обучения для физических направлений подготовки. Последовательность изложения электромагнетизма соответствует современным представлениям о логической структуре этого раздела физики. Отталкиваясь от основных экспериментальных фундаментальных законов, изучаемых в школьной программе, курс посвящен обобщению этих закономерностей в виде системы уравнений электромагнитного поля. Сохраняя традиционное последовательное изложение физических законов электромагнетизма, в курсе рассматривается ряд вопросов, посвященных современным достижениям в общей физике. Большое внимание уделяется примерам и приложениям экспериментальных и теоретических методов изучения и описания различных электрических и магнитных явлений. При создании учебного пособия использован многолетний опыт чтения общего курса физики на физических факультетах в институтах Санкт-Петербургского политехнического университета.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению бакалавриата «Физика», «Техническая физика», «Электроника и наноэлектроника» и «Прикладная математика и физика». Пособие может быть также использовано в качестве дополнительного учебного пособия для общетехнических образовательных программ будущими бакалаврами, обучающимися по другим физическим направлениям, начинающими преподавателями, в системах повышения квалификации.

УДК 537.8
ББК 22.33я73

Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА

© Издательство «Лань», 2025
© В. К. Иванов, 2025
© Издательство «Лань», художественное оформление, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение **7**
1. О курсе электромагнетизма 7
2. Система уравнений Максвелла 9
Глава 1. Электростатика в вакууме **12**
1.1. Введение. Основные положения теории электромагнетизма 12
1.2. Основные законы электростатики в вакууме 14
1.2.1. Закон Кулона 14
1.2.2. Напряженность электрического поля 16
1.2.3. Примеры вычисления напряженностей полей 19
1.3. Теорема Гаусса 22
1.3.1. Поток вектора через поверхность 22
1.3.2. Поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность 23
1.3.3. Применение теоремы Гаусса для расчета полей 26
1.4. Дифференциальная форма теоремы Гаусса 30
1.4.1. Дивергенция вектора $\vec{E}$ в декартовой системе координат 30
1.4.2. Теорема Остроградского — Гаусса 33
1.5. Работа сил электростатического поля. Циркуляция вектора 34
1.5.1. Работа электрического поля. Циркуляция вектора 34
1.5.2. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора 35
1.5.3. Теорема Стокса 38
1.6. Потенциал электростатического поля 39
1.6.1. Потенциал 39
1.6.2. Связь напряженности поля и потенциала. Уравнение Пуассона 42
1.6.3. Примеры вычисления потенциала 43
1.7. Потенциал и напряженность поля системы точечных зарядов 45
1.7.1. Потенциал и напряженность поля электрического диполя 45
1.7.2. Диполь во внешнем электрическом поле 47
1.7.3. Система зарядов на больших расстояниях 49
Глава 2. Электростатика в веществе **52**
2.1. Макро- и микрополя в веществе 52
2.2. Поляризация диэлектриков 53
2.2.1. Типы диэлектриков 53
2.2.2. Вектор поляризации 56
2.2.3. Связь вектора поляризации с поверхностной плотностью заряда 56
2.2.4. Теорема Гаусса для вектора поляризации 57
2.3. Вектор электрической индукции 59
2.3.1. Вектор электрической индукции 59
2.3.2. Диэлектрическая проницаемость 61

2.4. Граничные условия 63
2.4.1. Граничные условия для нормальных составляющих 63
2.4.2. Граничные условия для тангенциальных составляющих 64
2.4.3. Закон преломления линий индукции 65
2.4.4. Примеры вычисления полей в диэлектриках 66
2.5. Проводники в электрическом поле 71
2.5.1. Проводники 71
2.5.2. Метод электрических изображений 73
2.5.3. Емкость проводников 76
2.5.4. Конденсаторы 77
2.6. Энергия электрического поля 80
2.6.1. Энергия системы зарядов 80
2.6.2. Энергия электрического поля 82
2.6.3. Примеры. Собственная энергия заряда 86
2.6.4. Энергия электрического поля в диэлектриках 87
2.7. Силы в электрических полях 89
2.7.1. Пондеромоторные силы 89
2.7.2. Силы, действующие на поверхностные заряды 91
2.7.3. Определение пондеромоторных сил из энергии 92
2.8. Микроскопическая теория поляризации диэлектриков 93
2.8.1. Неполярные диэлектрики 93
2.8.2. Полярные диэлектрики 96
2.9. Пьезо- и сегнетоэлектричество 99
2.9.1. Пьезоэлектрики 99
2.9.2. Сегнетоэлектрики 101
Глава 3. Электрический ток. Магнитное поле 104
3.1. Уравнение непрерывности. Время релаксации 104
3.1.1. Ток и плотность тока. Опытные законы 104
3.1.2. Закон сохранения электрического заряда 107
3.1.3. Максвелловское время релаксации 108
3.1.4. Опыты Стюарта и Толмена 109
3.2. Классическая электронная теория проводимости 110
3.2.1. Модель проводника. Закон Ома 110
3.2.2. Закон Джоуля — Ленца 114
3.2.3. Закон Видемана — Франца.
Недостатки классической теории 115
3.2.4. Электрические цепи. ЭДС. Законы Кирхгофа 118
3.3. Магнитное взаимодействие
и магнитное поле движущихся зарядов 120
3.3.1. Экспериментальные факты. Магнитная индукция 120
3.3.2. Релятивистская природа магнитного поля 122
3.4. Сила Лоренца и закон Ампера 126
3.4.1. Сила Лоренца 126

3.4.2. Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле. . 127
3.4.3. Взаимодействие токов. Закон Ампера 129
3.5. Поле движущегося заряда. Закон Био — Савара 131
3.5.1. Магнитное поле движущегося заряда 131
3.5.2. Магнитное поле тока 132
3.5.3. Примеры вычисления магнитных полей 133
3.5.4. О системах электромагнитных единиц 136
3.6. Поток и циркуляция вектора магнитной индукции 139
3.6.1. Поток вектора магнитной индукции 139
3.6.2. Циркуляция вектора магнитной индукции 141
3.6.3. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции 143
3.6.4. Примеры вычисления магнитных полей 144
3.7. Векторный потенциал магнитостатического поля.
Магнитный момент 147
3.7.1. Векторный потенциал. Неоднозначность,
калибровка и градиентная инвариантность 147
3.7.2. Пример однородного магнитного поля 149
3.7.3. Уравнение для векторного потенциала.
Векторный потенциал токов 151
3.7.4. О физическом смысле векторного потенциала 153
3.7.5. Векторный потенциал и магнитное поле витка с током 155
3.8. Контур с током в магнитном поле 158
3.8.1. Контур с током в однородном магнитном поле 158
3.8.2. Контур с током в неоднородном магнитном поле 160
3.8.3. Сравнение формул электростатики и магнитостатики.
Аналогия и различие 162
3.9. Магнитное поле в веществе 163
3.9.1. Магнитные моменты в веществе 163
3.9.2. Микро- и макрополе. Вектор намагничивания 165
3.9.3. Связь между вектором намагничивания
и молекулярными токами 167
3.9.4. Напряженность магнитного поля 170
3.9.5. Магнитные восприимчивость и проницаемость вещества 171
3.10. Граничные условия для векторов магнитного поля 172
3.11. Гиромагнитные эффекты 175
3.11.1. Гиромагнитные отношения 175
3.11.2. Опыт Эйнштейна — де Гааза и эффект Барнетта 177
3.11.3. Опыт Штерна — Герлаха 181
3.12. Диамагнетизм 182
3.12.1. Ларморовская прецессия 182
3.12.2. Диамагнитная восприимчивость и проницаемость 185
3.13. Парамагнетизм 187
3.13.1. Магнитная восприимчивость 187
3.13.2. Намагничивание в сильных полях
(или при малых температурах T) 190

3.14. Ферромагнетизм 193
3.14.1. Свойства ферромагнетиков 193
3.14.2. Природа ферромагнетизма 196
3.14.3. Другие формы магнитного упорядочивания 200
3.15. Электропроводность в магнитном поле 201
3.15.1. Классический эффект Холла (1879) 201
3.15.2. Двумерный ток. МДП структуры 203
3.15.3. Квантовый эффект Холла 205
3.16. Сверхпроводимость 209
3.16.1. Основные особенности сверхпроводящего состояния 209
3.16.2. Уравнение Лондонов 211
3.16.3. Объяснение сверхпроводимости 214
Глава 4. Электромагнитная индукция и уравнения Максвелла 218
4.1. Движущиеся проводники в магнитном поле 218
4.1.1. Работа магнитного поля при перемещении контура с током 218
4.1.2. Индукция токов 220
4.2. Закон электромагнитной индукции 223
4.2.1. Закон Фарадея 223
4.2.2. Формулировка Максвелла 224
4.3. Взаимная индукция и самоиндукция 227
4.3.1. Взаимная индукция 227
4.3.2. Самоиндукция 230
4.3.3. Еще о потенциальной энергии и единицах измерения 233
4.4. Энергия магнитного поля 234
4.4.1. Об энергии взаимодействующих токов 234
4.4.2. Энергия магнитного поля соленоида 235
4.4.3. Энергия магнитного поля 236
4.5. Ток смещения 238
4.5.1. Противоречие с законом сохранения заряда 238
4.5.2. Ток смещения 240
4.6. Система уравнений Максвелла 242
4.6.1. Система уравнений Максвелла 242
4.6.2. Материальные уравнения 245
4.6.3. О магнитном заряде. Магнитный монополь 245
4.7. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля 249
4.7.1. Зависящие от времени потенциалы поля 249
4.7.2. Уравнения для потенциалов 252
4.8. Волновое уравнение 254
Дополнения 258
К главе 4 п. 4.4 258

ВВЕДЕНИЕ

1. О курсе электромагнетизма

Настоящее учебное пособие по основам электромагнетизма представляет собой третью часть лекционного курса общей физики, читаемого студентам 1–2 годов обучения на физических и инженерно-физических направлениях подготовки Политехнического университета. Предлагаемое пособие является продолжением двух предыдущих частей курса «Механика» и «Молекулярная физика», поэтому пособие опирается на них и содержит ссылки на пройденный ранее материал.

Раздел физики, посвященный электромагнитным явлениям, является одним из наиболее важных в курсе физики как с практической, так и с фундаментальной точки зрения. Пособие состоит из четырех разделов, содержащих изложение основ электростатики в вакууме и в веществе, электрического тока и магнитостатики и связанных с ними физических явлений. В последнем разделе рассматриваются зависящие от времени электрическое и магнитное поля, полная система уравнений Максвелла, являющаяся итогом классической теории электромагнетизма.

Пособие подготовлено с учетом методических разработок кафедры экспериментальной физики Политехнического университета (СПбПУ). Основные идеи и содержание обновленного курса общей физики широко обсуждались на научно-методических семинарах под руководством профессоров кафедры экспериментальной физики. Результатом этих обсуждений являлось опубликование в 2003 г. учебного пособия по курсу физики под авторством коллектива профессоров кафедры И. П. Ипатовой, В. Ф. Мастерова, Ю. И. Уханова. Основная идея, заложенная авторами при создании курса, состояла в том, что учащиеся уже освоили школьный курс элементарной физики и достаточно хорошо подготовлены к восприятию дедуктивного изложения материала. Поэтому, стартуя с уравнений Максвелла, описывающих классическое электромагнитное поле, в последующем изложении авторы рассматривали физические явления и следствия, вытекающие из постулируемой системы уравнений. Опыт преподавания с подобным изложением материала показал, что его успешно усваивают и воспринимают те студенты начальных курсов, которые в школе успешно разобрались в индуктивном построении электромагнитной теории и на основе этих представлений смогли увидеть красоту фундаментальных законов. Другая часть студентов, обучающаяся на тех же физических направлениях подготовки, легче воспринимала материал при его последовательном изложении, стартуя от основных экспериментальных законов, а затем переходя к их обобщению и дальнейшему представлению в виде системы уравнений электромагнитного поля.

Настоящее учебное пособие по электромагнетизму построено ближе к традиционному изложению этого раздела курса физики на лекциях и практических занятиях. Несмотря на то что во Введении пособия приводятся классические уравнения электромагнитного поля как итоговый результат курса электромагнетизма, однако получение этой системы уравнений и подробное ее обсуждение происходят в процессе последовательного введения и описания экспериментальных законов и фактов, начиная с первой главы пособия и заканчивая последней. Такой индуктивный подход с учетом опыта многолетнего преподавания этого раздела на физических факультетах, по мнению автора, легче воспринимается и усваивается большинством студентов начальных курсов.

Настоящее пособие не является полновесным учебником по курсу электромагнетизма, какими являются широко известные книги в прилагаемой ниже литературе, поскольку его содержание ограничивается в основном темами и вопросами, которые обычно излагаются на поточных лекциях и входят в программу курса физики. При этом автор пособия при изложении основных тем курса пользовался методическими разработками и материалами, представленными в указанной ниже литературе.

Предлагаемая литература к разделу «Электричество и магнетизм»

1. *Ипатова, И. П.* Курс физики / И. П. Ипатова, В. Ф. Мастеров, Ю. И. Уханов. — СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2003. — Т. 2 : Электромагнитные явления.

2. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. — М. : Наука : Физматлит, 1996. — Т. 3 : Электричество, ч. I, II.

3. *Иродов, И. Е.* Основные законы электромагнетизма. — М. : Высш. шк., 1991.

4. *Матвеев, А. Н.* Электричество и магнетизм. — М. : Высш. шк., 1983.

5. *Савельев, И. В.* Курс общей физики. — СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2005. — Т. 2.

6. *Парселл, Э.* Электричество и магнетизм. Берклеевский курс физики. — СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2005.

Кроме того, в тексте лекций часто указываются ссылки на пройденный материал, опубликованный в предыдущих пособиях автора по курсам «Механика» и «Молекулярная физика» (Физика. Механика. СПб. : Политех-Пресс, 2021; Физика. Молекулярная физика. СПб. : Политех-Пресс, 2021).

В пособии используется гауссова система единиц как наиболее естественная система, принимаемая в общем курсе физике. Однако автор считает, что будущие физики должны ориентироваться в системах единиц и успешно переходить из одной системы единиц в другую, поэтому в пособии все формулы дублируются в Международной системе единиц СИ. Это также полезно с той точки зрения, что система единиц СИ используется в большинстве опубликованных задачников и основных учебников по физике.

Автор пособия признателен преподавателям и сотрудникам кафедры экспериментальной физики СПбПУ за обсуждение содержания и критику этого курса, которая способствовала его написанию.

2. Система уравнений Максвелла

Классическая теория электромагнитных явлений основана на *уравнениях Максвелла*, являющихся обобщением опытных фактов. Они образуют систему уравнений, которая связывает воедино основные электромагнитные величины и описывает все наблюдаемые классические электромагнитные явления. Ниже мы приводим эти уравнения, не объясняя подробно и не раскрывая пока полностью их физического содержания, что будет сделано в дальнейшем в курсе при постепенном их получении исходя из экспериментальных фундаментальных законов.

Запишем эти уравнения в интегральной и дифференциальной форме в двух системах единиц, которые наиболее широко используются в теории: *СГС* (*CGS*) (или далее система единиц Гаусса) и Международной *СИ* (*SI*) системе единиц.

Уравнения Максвелла в интегральной форме

CGS	***SI***	
$\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \vec{j}d\vec{S} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{D}d\vec{S}$	$\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \int\limits_S \vec{j}d\vec{S} + \frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{D}d\vec{S}$	(1)
$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{B}d\vec{S}$	$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{B}d\vec{S}$	(2)
$\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0$	$\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0$	(3)
$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi q$	$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = q$	(4)

Здесь в уравнениях (1)–(4) введены следующие обозначения. Для электрических величин: q — электрический заряд; ρ — объемная плотность электрического заряда; $\vec{E}$ и $\vec{D}$ — векторы напряженности и индукции электрического поля соответственно; $\vec{j}$ — вектор плотности электрического тока. Для магнитных величин: $\vec{B}$ и $\vec{H}$ — векторы индукции и напряженности магнитного поля соответственно. Кроме того, c — скорость света, а производные d/dt берутся по времени.

Интегралы в (1)–(2) от скалярного произведения векторной величины поля и вектора элемента контура $d\vec{l}$ берутся по замкнутому контуру L и носят название *циркуляции* этого вектора. В правой части этих уравнений интегралы от скалярного произведения векторов поля и вектора элемента поверхности $d\vec{S}$ берутся по поверхности S, опирающейся на контур L. Такие интегралы называются *потоком вектора* через эту поверхность. Таким образом, циркуляция вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля (1) определяется

двумя слагаемыми: потоком вектора $\vec{j}$ через поверхность S (т. е. полным током) и скоростью изменения потока вектора индукции $\vec{D}$ через ту же поверхность S. Циркуляция вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ по замкнутому контуру (2) (работа электрического поля) определяется скоростью изменения потока вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через поверхность S.

Интегралы в (3)–(4) от скалярного произведения вектора $\vec{B}$ и вектора $\vec{D}$ и элемента поверхности $d\vec{S}$ берутся по замкнутой поверхности S, они определяют *поток векторов* через эту поверхность. Уравнение (3) свидетельствует о том, что источников магнитного поля в виде магнитных зарядов (монополей) не существует (в классической электродинамике). Источником же электрических полей (4) являются электрические заряды q.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

CGS	***SI***	
$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	(5)
$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	(6)
$div\vec{B} = 0$	$div\vec{B} = 0$	(7)
$div\vec{D} = 4\pi\rho$	$div\vec{D} = \rho$	(8)

Интегральные уравнения электромагнитного поля описывают общие свойства электрических и магнитных величин. Однако для решения конкретных задач необходимы знания электромагнитных величин в каждой точке рассматриваемого пространства, иначе говоря, дифференциальные характеристики. Соответствующие интегральным уравнениям (1)–(4) дифференциальные уравнения (5)–(8) записываются с помощью дифференциальных операторов rot и div. Конкретный вид этих операторов и их физическое содержание подробно будут обсуждаться далее в этом курсе.

В дополнение к уравнениям Максвелла в интегральной (1)–(4) и дифференциальной (5)–(8) форме рассматриваются *материальные уравнения*. Эти уравнения характеризуют индивидуальные свойства среды и осуществляют связь между величинами, описывающими электрические и магнитные поля в вакууме и в веществе. В общем случае эти уравнения достаточно сложны и не обладают той общностью, которая присуща уравнениям Максвелла.

Наиболее простой вид материальные уравнения имеют для однородной, изотропной и недиспергирующей среды.

Материальные уравнения в простейшем случае

CGS	***SI***	
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$	(9)
$\vec{B} = \mu\vec{H}$	$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$	(10)
$\vec{j} = \sigma\vec{E}$	$\vec{j} = \sigma\vec{E}$	(11)

Здесь ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, σ — электрическая проводимость среды, ε_0 и μ_0 — размерные константы, вводимые в системе *СИ*. С помощью материальных уравнений из системы уравнений Максвелла можно исключить неизвестные величины и получить решение для конкретной среды.

Закон сохранения заряда является экспериментальным фактом и записывается в виде уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0\,. \qquad (12)$$

Следует отметить, что уравнение (12) в принципе автоматически следует из уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Смысл всех величин и параметров, входящих в эти уравнения (1)–(12), более подробно будет обсуждаться в следующих главах пособия. Можно рассматривать эти уравнения как постулат теории, а затем из них получить и объяснить все наблюдаемые на опыте электромагнитные явления (это *метод дедукции*). А можно получить эти уравнения, последовательно обобщая экспериментальные данные и факты (*метод индукции*), а затем воспользоваться ими для дальнейшего рассмотрения новых явлений электромагнетизма. Задача настоящего курса состоит в том, чтобы прийти к этим уравнениям, отталкиваясь от экспериментальных фактов.

В заключение приведем диапазон применения уравнений Максвелла.

1. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца, поэтому они справедливы и в области релятивистских скоростей.

2. Квантовый характер электромагнитных сил не сказывается на расстояниях вплоть до 10^{-10} см (примерно в 100 раз меньше размера атома). Для меньших расстояний необходимо использовать уравнения квантовой электродинамики.

Примечание 1.

Основные эксперименты и положения теории в электромагнетизме были проделаны и внесены следующими физиками (ученые, внесшие наибольший вклад в развитие представлений о классических электромагнитных явлениях):

Шарль О. Кулон (1736–1806), французский физик;
Пьер С. Лаплас (1749–1827), французский астроном, физик и математик;
Андре М. Ампер (1775–1836), французский физик и математик;
Ханс К. Эрстед (1777–1851), датский физик;
Жан Б. Био (1774–1862), французский физик;
Симеон Д. Пуассон (1781–1840), французский механик, математик и физик;
Карл Ф. Гаусс (1777–1855), немецкий математик, астроном и физик;
Феликс Савар (1791 – 1841), французский физик;
Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862), русский математик и механик;
Джордж Грин (1793–1841), британский математик и физик;
Генрих Р. Герц (1857–1894), немецкий физик и др.

Однако и на их фоне выделяются гиганты в физике:
Майкл Фарадей (1791–1867), английский физик и
Джеймс К. Максвелл (1831–1879), английский физик.

ГЛАВА 1.
ЭЛЕКТРОСТАТИКА В ВАКУУМЕ

1.1. Введение.
Основные положения теории электромагнетизма

Приведем основные *экспериментальные факты*, лежащие в основе представлений об электричестве и магнетизме.

1. Экспериментальный факт: *дуализм* или *двойственность* заряда. Если заряд B притягивает заряд C и если B притягивает заряд A, то A отталкивает C. Отсюда следует условное деление зарядов на «положительные» и «отрицательные» — одноименные заряды отталкиваются, разноименные — притягиваются. Имеющиеся два типа зарядов в природе есть проявление определенной симметрии электромагнитного взаимодействия. В частности, эти проявления связаны с инвариантностью законов относительно преобразования времени $t \to -t$.

2. Экспериментальный факт: закон *сохранения заряда* — полный заряд изолированной системы никогда не меняется. Наблюдаемый в экспериментах минимальный по величине заряд — это заряд электрона e^-, который равен по модулю заряду протона p^+ и заряду позитрона e^+. Количественное равенство элементарных положительных и отрицательных зарядов проверяется на опыте, при этом установлено следующее:

а) измеренный суммарный заряд системы, состоящей из электрона и протона, т. е. атома водорода, имеет ограничение

$$|(e^- + p^+)| < 10^{-20}\,|e^-|;$$

б) из проверки нейтральности атома Cs получено, что возможный заряд атома составляет величину не более чем $10^{-16}\,|e^-|$ по модулю; установлено, что с этой точностью атом цезия нейтрален.

При этом, исходя из многочисленных опытов и экспериментальных проверок, следует вывод, что нарушения закона сохранения заряда не наблюдается.

3. *Релятивистская инвариантность* полного заряда: алгебраическая сумма зарядов в изолированной системе не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой независимо от скорости их относительного движения.

4. *Квантование* или *дискретность* заряда. Минимально наблюдаемый заряд — заряд электрона, остальные все заряды кратны ему. Этот факт неоднократно проверялся на эксперименте, однако впервые кратность зарядов частиц заряду электрона была получена в фундаментальных опытах Роберта Милликена.

Кратко рассмотрим опыты Р. Милликена (1911). В воздушный конденсатор помещались капельки масла с помощью распылителя (рис. 1.1.1).

Капли могли быть заряжены в процессе распыления или при поглощении излучения ультрафиолетовой лампы за счет фотоэффекта.

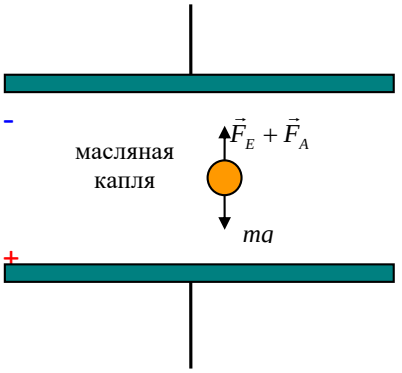


Рис. 1.1.1

Без включения электрического поля капли падают с постоянной скоростью вследствие равенства сил: с одной стороны силы тяжести и силы Архимеда, а с другой стороны силы сопротивления воздуха при установившейся скорости падения капли масла — силы Стокса:

$$mg - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_в g = 6\pi\eta r v_g . \qquad (1.1.1)$$

Здесь масса капли $m = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_k$; r — ее радиус; ρ_k и $\rho_в$ — плотности масляной капли и воздуха; η — коэффициент вязкости воздуха;, v_g — установившаяся скорость. Подставляя массу капли в (1.1.1), находим квадрат радиуса капли:

$$r^2 = \frac{9\eta v_g}{2(\rho_к - \rho_в)g} . \qquad (1.1.2)$$

Наблюдая конденсатор под микроскопом и измеряя скорость падения капли, узнаем ее радиус.

Далее, включаем напряжение на конденсаторе, при этом так подбираем напряжение, чтобы скорость капли равнялась нулю: $v_g = 0$. Тогда получаем следующее равенство сил:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_к - \rho_в) g = qE , \qquad (1.1.3)$$

где q — заряд капли; E — напряженность электрического поля (подробнее о напряженности поля см. в п. 1.2). Из соотношения (1.1.3) можно найти заряд капли. При освещении конденсатора ультрафиолетовым светом заряд капли изменяется (явление фотоэффекта). Тогда снова подбираем напряжение, чтобы скорость капли равнялась нулю, и определяем ее новый заряд. Оказалось, что заряд капли всегда кратен (n = 1, 2, 3, 4, ...) одной и той же величине — заряду электрона e^-:

$$\Delta q = ne , \qquad (1.1.4)$$

где элементарный заряд равен

$$|e^-| = 4.803\cdot10^{-10}\ CGSE_q = 1.602\cdot10^{-19}\ \text{Кл}.$$

Дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования показали, электронный заряд является наименьшим зарядом любых частиц, находящихся в свободном состоянии. Было также обнаружено, что существуют элементарные частицы — *кварки*, чьи заряды являются дробными числами от заряда электрона, а именно: $\pm\frac{1}{3}e,\ \pm\frac{2}{3}e$. Кварки определяют состав сильно взаимодействующих элементарных частиц — адронов, в частности протонов и нейтронов (подробнее см. Вводную лекцию в пособии по механике), входящих в ядра атомов. Однако кварки удерживаются внутри элементарных частиц и не появляются в свободном состоянии (явление конфайнмента). Поэтому в свободном состоянии заряды всех элементарных частиц кратны заряду электрона.

Примечание 2. Роберт Эндрус Милликен (1868–1953), американский физик, , Нобелевская премия (1923) за работы в области элементарных зарядов и фотоэлектрического эффекта.

Джордж Габриэль Стокс (1819–1903), английский физик и математик.

1.2. Основные законы электростатики в вакууме

1.2.1. Закон Кулона

Электростатика изучает законы, определяющие поведение и взаимодействие неподвижных зарядов.

Шарль Кулон (1785) экспериментально установил *фундаментальный закон*, определяющий силу взаимодействия неподвижных электрических зарядов (рис. 1.2.1). Он проводил опыты с крутильными весами, с помощью которых рассматривалось взаимодействие двух точечных зарядов. Под точечными зарядами понимались частицы, размеры которых значительно меньше расстояния между ними: $r \ll r_{12}$.

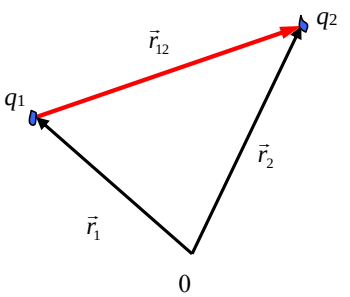


Рис. 1.2.1

Формулировка закона Кулона: *сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов, об-*

ратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды.

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^{\ 3}}\vec{r}_{12}; \qquad (1.2.1)$$

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}.$$

Выбор коэффициента k в (1.2.1) зависит от системы единиц. Рассмотрим основные единицы заряда.

Система *СИ*. Основные единицы этой системы:

– длина L — метр (м);

– масса M — килограмм (кг);

– время T — секунда (с);

– температура — Кельвин (К);

– сила тока — Ампер (А).

При этом величина заряда и сила определяются независимо друг от друга: сила из второго закона Ньютона, а заряд из величины электрического тока, определяемого из силы взаимодействия проводников с током (подробнее см. п. 3.1):

1 заряда (Кулон) = 1 Кл = 1 А · 1 с.

При этом коэффициент k в (1.2.1) является размерной величиной и равен

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad (1.2.2)$$

где коэффициент равен $k = 9\cdot 10^9\,\frac{м}{Ф}$, а величина ε_0 — *диэлектрическая постоянная:*

$$\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{Кл^2 c^2}{кг\cdot м^3} = 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}.$$

Здесь *Ф* — Фарада, единица емкости. Единица заряда — Кулон — относительно большая единица заряда. Так, например, сила взаимодействия 2-точечных зарядов по 1 Кл на расстоянии в 1 км = 10^3 м равна

$$F = 9\cdot 10^9\cdot\frac{1}{10^6} = 9\cdot 10^3 \text{ (Н)},$$

что есть довольно большая величина.

Система *CGSE*. Основные единицы в этой системе:

– длина L — сантиметр (см);

– масса M — грамм (г);

– время T — секунда (с);

– температура — Кельвин (К).

Сила как величина производная, определяемая по второму закону Ньютона, измеряется в динах (Дн). В этой системе заряд является производной единицей и определяется через силу по закону Кулона (1.2.1), при

этом считается, что коэффициент k равен единице: $k = 1$. Отсюда система единиц имеет название *CGSE*, т. е. к основным единицам добавляется единица электрического заряда:

$$\left[q\right] = 1\,CGSE\,за\,ряда = 1\,CGSE_q = \left[M \cdot L^3 \cdot T^{-2}\right]^{1/2} = г^{1/2} \cdot см^{3/2} \cdot с^{-1}\ . \quad (1.2.3)$$

Связь между единицами заряда в двух системах *СИ* (*SI*) и *СГСЭ* (*CGSE*):

$$1\ \text{Кл} \approx 3 \cdot 10^9\ CGSE_q. \quad (1.2.4)$$

Здесь коэффициент $3 \cdot 10^9$ фактически есть произведение 10 на величину скорости света ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

В нашем курсе мы в основном будем пользоваться системой *CGSE* (или так называемой системой единиц Гаусса, которую подробнее обсудим далее).

Примечание 3. Шарль О. Кулон (1736–1806), французский физик.

1.2.2. Напряженность электрического поля

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего пространства, создает в нем электрическое поле, которое проявляется в воздействии на помещенный в него пробный заряд q_0. Силовая характеристика электрического поля — *напряженность электрического поля*, которая определяется как сила, действующая на единичный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}\ . \quad (1.2.5)$$

Следовательно, напряженность электрического поля есть векторная величина. Напомним, что силовые характеристики поля сил уже были введены в курсе механики (см. п. 1.9.4).

Напряженность поля точечного заряда q получается из закона Кулона:

$$\vec{E} = \frac{q}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}, \qquad E = \frac{q}{r_{12}^2}\ , \quad (1.2.6)$$

где r_{12} — расстояние от точечного заряда до точки наблюдения. Важно отметить, что напряженность поля точечного заряда убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Электрическое поле, напряженность которого постоянна по величине и по направлению во всех точках пространства, называется *однородным полем*:

$$\vec{E} = const\ . \quad (1.2.7)$$

Из обобщения опытных фактов следует *принцип суперпозиции* электрических полей. Если имеется система зарядов, то сила на пробный заряд q_0 со стороны i-го заряда не изменится, если присутствуют другие заряды:

$$\vec{F}_i = \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^3}\vec{r}_{0i}\,, \qquad (1.2.8)$$

где r_{0i} — расстояние от точечного заряда q_i до пробного заряда. Полная сила на пробный заряд q_0 записывается как векторная сумма сил, действующих со стороны каждого из зарядов:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = q_0 \sum_i \frac{q_i \vec{r}_{0i}}{r_{0i}^3} = q_0 \sum_i \vec{E}_i = q_0 \vec{E}\,. \qquad (1.2.9)$$

Итак, принцип суперпозиции состоит в следующем: *напряженность электрического поля от всех зарядов определяется как векторная сумма напряженностей*, создаваемых отдельными зарядами в рассматриваемой точке пространства:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i\,. \qquad (1.2.10)$$

О *единицах измерения напряженности.* Единица измерения напряженности электрического поля в системе *CGSE* не имеет специального названия, а в системе СИ напряженность измеряется в единицах вольт/метр и обозначается как В/м. Напомним, что связь между единицами силы в системах СИ и CGSE определяется соотношением 1 Н = 10^5 Дн. Тогда используя соотношение между единицами заряда (1.2.4), получаем связь между единицами напряженности электрического поля в системах CGSE и СИ:

$$[E] = 1\ \mathrm{CGSE}_E = 3\cdot 10^4\ \text{В/м}. \qquad (1.2.11)$$

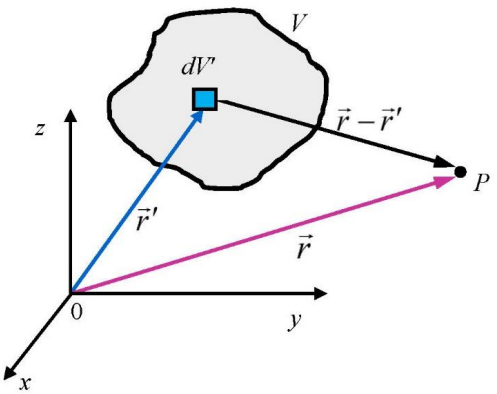


Рис. 1.2.2

Если имеем непрерывное распределение заряда в объеме V (см. рис. 1.2.2), то для определения напряженности поля в точке наблюдения P, определяемой радиус-вектором $\vec{r}(x, y, z)$, поступают следующим образом. Объем разбивают на маленькие кусочки — элементы объема, которые можно считать точечными зарядами:

$$dq = \rho(x', y', z')dV'\,,$$

где $\rho(x',y',z')$ — плотность распределенного заряда в точке с радиус-вектором $\vec{r}'(x',y',z')$. Тогда электрическое поле в точке $\vec{r}$ на основании принципа суперпозиции находится из выражения

$$\vec{E} = \int \rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dV'. \qquad (1.2.12)$$

В декартовой системе координат элемент объема записывается как обычно:

$$dV' \equiv d\vec{r}' = dx'dy'dz'.$$

Интеграл (1.2.12) надо понимать как условную запись. Реально при вычислении полной напряженности надо рассматривать проекции на оси координат и проводить интегрирование (суммирование) для каждой проекции отдельно. Например, для x-й проекции напряженности поля имеем:

$$E_x = \int \rho(\vec{r}')\frac{x-x'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dV'. \qquad (1.2.13)$$

Получив все проекции, легко затем получить вектор напряженности поля, складывая эти проекции как векторы со своими ортами.

Аналогично определяется электрическое поле от зарядов, распределенных по поверхности. В этом случае в качестве точечного заряда рассматривается заряд, находящийся на бесконечно малом элементе поверхности dS: $dq = \sigma dS$, где $\sigma = \sigma(\vec{r}')$ — поверхностная плотность заряда, а интегрирование проводится по всей поверхности. Так, проекция вектора напряженности электрического поля на ось x, создаваемого заряженным элементом поверхности, определяется аналогично (1.2.13):

$$E_x = \int \sigma(\vec{r}')\frac{x-x'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dS'. \qquad (1.2.14)$$

Силовые линии электрического поля: графически удобно представлять поле вектора в виде линий тока вектора или силовых линий. Силовые линии — кривые в пространстве, касательные к которым совпадают с направлением напряженности поля в данной точке. В присутствии зарядов они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. Их направление совпадает с направлением силы, действующей на положительные заряды, помещенные в этих точках.

Простейшие примеры силовых линий напряженности поля представлены на рисунках 1.2.3–1.2.6. Поле точечного заряда (или поле равномерно заряженного шара или сферы) представляет собой прямые радиальные линии, исходящие из положительного заряда (рис. 1.2.3) и входящие в отрицательный заряд (рис. 1.2.4). Плотность этих линий падает с расстоянием от центра зарядов обратно пропорционально квадрату расстояния в соответствии с законом Кулона.

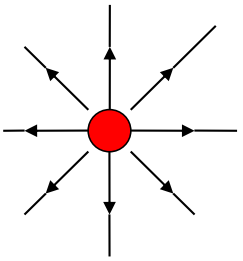


Рис. 1.2.3
Силовые линии поля точечного положительного заряда

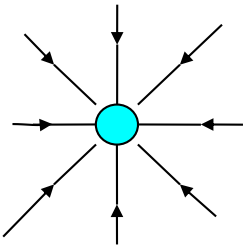


Рис. 1.2.4
Силовые линии поля точечного отрицательного заряда

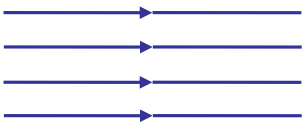


Рис. 1.2.5
Силовые линии однородного электрического поля

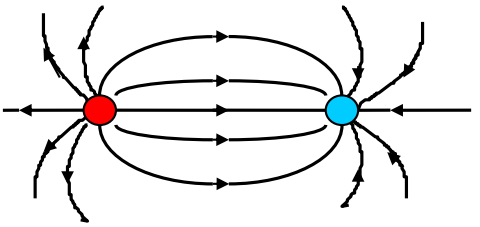


Рис. 1.2.6
Силовые линии поля диполя

Силовые линии однородного поля параллельны друг другу и поэтому постоянны по плотности (рис. 1.2.5). Более сложно выглядит поле *электрического диполя*. Диполь — система, состоящая из положительного и отрицательного зарядов, одинаковых по модулю и расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Силовые линии поля выходят из положительного заряда (вблизи его как из точечного заряда), а затем заканчиваются на отрицательном заряде (рис. 1.2.6).

1.2.3. Примеры вычисления напряженностей полей

1. Электрическое поле равномерно заряженной нити. Рассчитаем поле, создаваемое нитью длиной l заряженной линейной плотностью заряда τ, в точке P, с координатами, показанными на рисунке 1.2.7. Электрическое поле, создаваемое элементом нити dx с зарядом $dq = \tau dx$ в точке P, равно

$$d\vec{E} = \frac{dq}{r^3}\vec{r} = \frac{\tau dx}{r^3}\vec{r}\ ,$$

где r — расстояние от элемента dx до точки P. Видно, что результирующее поле обладает аксиальной симметрией относительно заряженной нити, поэтому достаточно рассмотреть только две проекции. Интегрирование необходимо также проводить по проекциям, поэтому запишем продольную и поперечную компоненты вектора напряженности:

$$dE_x = \frac{\tau dx}{r^2}\cos\theta = \frac{\tau dx}{r^2}\frac{l+a-x}{r}\ ;$$

$$dE_y = \frac{\tau dx}{r^2} sin\,\theta = \frac{\tau dx}{r^2}\frac{h}{r}.$$

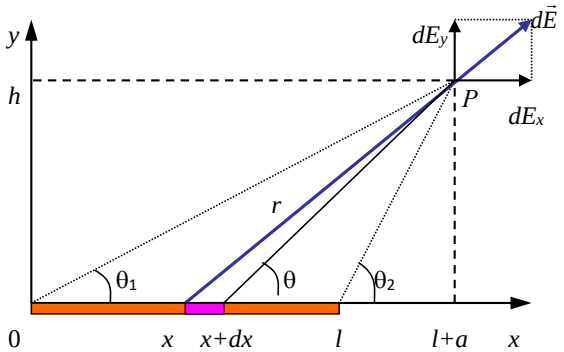


Рис. 1.2.7

Здесь $r = \sqrt{(l+a-x)^2 + h^2}$. Интегрирование удобнее проводить по углу θ. Поэтому выразим расстояние *r* и элемент *dx* через этот угол и его приращение *d*θ:

$$r = \frac{h}{sin\,\theta};$$

$$dr = -\frac{h}{sin^2\,\theta} cos\,\theta\, d\theta;$$

$$dx = -\frac{dr}{cos\,\theta} = \frac{h\, d\theta}{sin^2\,\theta}.$$

Тогда проекции вектора $d\vec{E}$ на горизонтальное и вертикальное направления имеют вид:

$$dE_x = \frac{\tau dx}{r^2} cos\,\theta = \frac{\tau h d\theta}{sin^2\,\theta}\frac{sin^2\,\theta}{h^2} cos\,\theta = \frac{\tau}{h} cos\,\theta\, d\theta;$$

$$dE_y = \frac{\tau dx}{r^2} sin\theta = \frac{\tau h d\theta}{sin^2\,\theta}\frac{sin^2\,\theta}{h^2} sin\theta = \frac{\tau}{h} sin\theta\, d\theta.$$

Проводя интегрирование в пределах углов θ_1 и θ_2 (см. рис. 1.2.7), получаем компоненты напряженности электрического поля:

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\tau}{h} cos\,\theta\, d\theta = \frac{\tau}{h}\int_{\theta_1}^{\theta_2} cos\,\theta\, d\theta = \frac{\tau}{h}\left(sin\,\theta_2 - sin\,\theta_1\right);$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\tau}{h} sin\,\theta\, d\theta = \frac{\tau}{h}\int_{\theta_1}^{\theta_2} sin\,\theta\, d\theta = \frac{\tau}{h}\left(cos\,\theta_1 - cos\,\theta_2\right).$$

Можно компоненты вектора напряженности записать через параметры *l*, *h* и *a*, выражая косинусы и синусы через них (см. рис. 2.7):

$$cos\,\theta_1 = \frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2+h^2}}, \quad cos\,\theta_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

$$sin\,\theta_1 = \frac{h}{\sqrt{(l+a)^2+h^2}}, \quad sin\,\theta_2 = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}};$$

$$E_x = \tau\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l+a)^2+h^2}}\right);$$

$$E_y = \frac{\tau}{h}\left(\frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2+h^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right).$$

Рассмотрим частные предельные случаи.

А. Рассмотрим поле бесконечной нити, при этом углы имеют следующие значения: $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$ (или $a = -l/2$ при $l \to \infty$), тогда получаем

$$E_x = 0, \qquad E_y = \frac{2\tau}{h}.$$

Продольная компонента электрического поля равна нулю, отлична от нуля только поперечная компонета (конфигурация поля имеет вид «ершика»).

Б. Рассмотрим поле на краю полубесконечной нити: $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi/2$ (или $a = 0$ и $l \to \infty$), получаем:

$$E_x = \frac{\tau}{h}, \qquad E_y = \frac{\tau}{h}.$$

Суммарное электрическое поле на краю полубесконечной нити направлено под углом $\pi/4$ к осям x и y на любых расстояниях h.

2. Электрическое поле в центре полусферы радиусом R, равномерно заряженной поверхностной плотностью заряда σ. На поверхности полусферы выделим маленький кусочек поверхности: $dS = r^2 sin\theta\, d\theta d\varphi$. Этот элемент поверхности имеет заряд

$$dq = \sigma dS = \sigma r^2 sin\theta\, d\theta d\varphi.$$

В центре полусферы он создает поле, равное

$$d\vec{E} = \frac{dq}{r^3} d\vec{r}.$$

В силу симметрии поле должно быть направлено по оси z. Поэтому достаточно рассмотреть только z-ю составляющую электрического поля:

$$dE_z = \frac{dq}{r^2} cos\,\theta = \sigma\, cos\,\theta\, sin\,\theta d\theta d\varphi.$$

Проинтегрировав по углам по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до $\pi/2$, получаем ответ, что электрическое поле в центре равномерно заряженной полусферы равно

$$E_z = \pi\sigma.$$

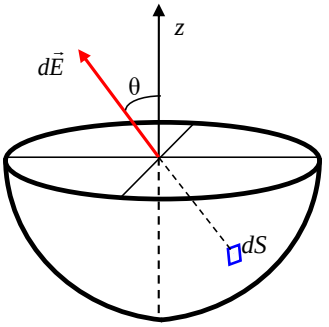


Рис. 1.2.8

Напряженность электрического поля пропорциональна поверхностной плотности заряда на полусфере.

1.3. Теорема Гаусса

1.3.1. Поток вектора через поверхность

Поток вектора через поверхность — одно из важнейших понятий любого векторного поля, в частности электрического: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$.

Рассмотрим маленькую площадку dS с единичным вектором нормали $\vec{n}$ (рис. 1.3.1): $d\vec{S} = dS\vec{n}$. Поток вектора через эту площадку определяется как скалярное произведение вектора поля и вектора элементарной площадки:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdSCos\alpha\,. \qquad (1.3.1)$$

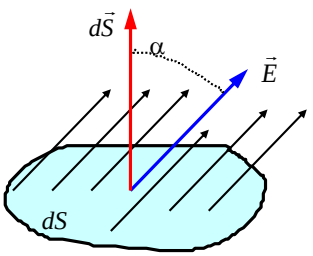


Рис. 1.3.1

Поток вектора — скалярная величина. Однако в зависимости от взаимного направления вектора поля и вектора площадки поток имеет положительный или отрицательный знак.

Примечание 4. Здесь можно провести аналогию с потоком жидкости: поток объема жидкости через площадку сечением dS равен

$$d\Phi = \Delta V/\Delta t = dS \cdot vCos\alpha = \left(\vec{v}, d\vec{S}\right).$$

Итак, поток вектора $\vec{E}$ через элементарную площадку можно записать несколькими способами:

$$d\Phi = EdSCos\alpha = E_n dS = EdS_E\,, \qquad (1.3.2)$$

где E_n — проекция вектора напряженности электрического поля на направление нормали к поверхности; dS_E — проекция элементарной площадки на направление напряженности электрического поля. Поток через поверхность S конечного размера определяется суммой элементарных потоков:

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}\,. \qquad (1.3.3)$$

Здесь интеграл берется по поверхности S (см. рис. 1.3.2), через которую определяется поток вектора.

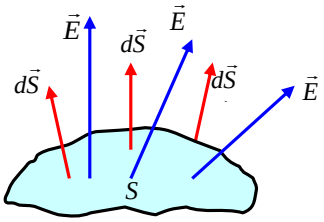


Рис. 1.3.2

1.3.2. Поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность

А. Пусть имеем точечный заряд q. Рассмотрим для начала поток вектора $\vec{E}$ через сферическую поверхность, окружающую заряд с центром в точке нахождения заряда. Так как в этом случае векторы напряженности поля и элемента поверхности с внешней нормалью параллельны $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ и сонаправлены, а модуль вектора E постоянен на поверхности сферы, то в результате для потока вектора $\vec{E}$ через всю поверхность получаем

$$\Phi = \int \vec{E} d\vec{S} = \int EdS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q\,.$$

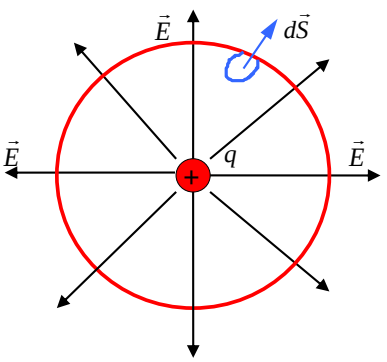


Рис. 1.3.3

Итак, если имеем заряд q внутри сферы, то поток вектора напряженности электрического поля через эту поверхность равен

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q. \qquad (1.3.4)$$

Б. Рассмотрим теперь общий случай, когда заряд q находится внутри произвольной замкнутой поверхности S, например, как изображено на рисунке 1.3.4. Через любой элемент этой поверхности $d\vec{S}$ (с внешней нормалью) сосчитаем поток

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdSCos\alpha = \frac{q}{r^2} dSCos\alpha = qd\Omega, \qquad (1.3.5)$$

где $d\Omega = dS\cos\alpha / r^2$ — элемент телесного угла. Из рисунка 1.3.4 видно, что элемент телесного угла $d\Omega$ пересекает три элемента поверхности, т. е. получаем три равных друг другу потока вектора напряженности электрического поля через эти малые поверхности. При этом один поток вектора $\vec{E}$, входящий внутрь поверхности S (против нормали), сокращается с тем же потоком, выходящим из поверхности S (по нормали). Таким образом, в сумме остается только один выходящий поток через элемент телесного угла $d\Omega$. Тогда полный поток вектора $\vec{E}$ через всю поверхность S опять равен произведению заряда на полный телесный угол, равный 4π:

$$\Phi = q\oint d\Omega = 4\pi q. \qquad (1.3.6)$$

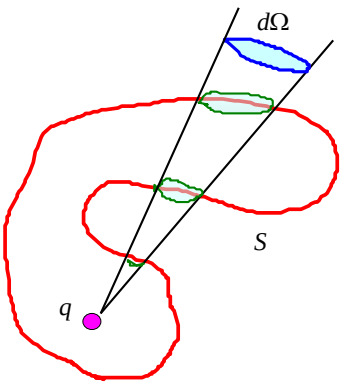


Рис. 1.3.4

Отсюда также следует, что если заряд находится снаружи замкнутой поверхности S (рис. 1.3.5), то полный поток через эту поверхность равен нулю:

$$\Phi = 0.$$

Физически это понятно и очевидно: сколько силовых линий вошло внутрь поверхности, столько же и вышло из нее.

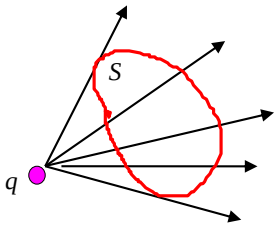


Рис. 1.3.5

В. Обобщим полученный результат на систему зарядов. Пусть поле создается любой системой зарядов (рис. 1.3.6), полный электрический заряд q которой можно разбить на точечные заряды: $q = \sum_i q_i$. Для каждого из зарядов q_i в отдельности можно повторить ту же процедуру для получения потока напряженности через выбранную поверхность. Пользуясь принципом суперпозиции $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$, получаем, что уравнение

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q$$

остается справедливым для любой системы зарядов, расположенных произвольным образом. В самом деле, поток вектора $\vec{E}$ равен сумме потоков каждого из векторов $\vec{E}_i$:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i \oint \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_i 4\pi q_i = 4\pi q. \qquad (1.3.7)$$

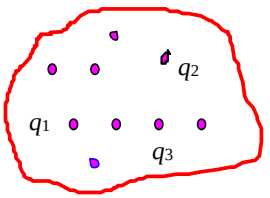


Рис. 1.3.6

Итак, получаем электростатическую теорему Гаусса: *поток вектора* $\vec{E}$ *через замкнутую поверхность равен полному заряду внутри этой поверхности, умноженному на* 4π.

Математически теорема Гаусса записывается в виде:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = 4\pi q. \qquad (1.3.8)$$

где q — суммарный заряд внутри произвольно выбранной замкнутой поверхности S, через которую рассматривается поток. Их расположение внутри поверхности не играет никакой роли. Заряды, расположенные вне замкнутой поверхности S, не вносят вклада в поток Ф, так как сколько силовых линий входит в замкнутую поверхность, столько этих линий и выходит.

Физический смысл теоремы Гаусса состоит в том, что источниками электрического поля являются заряды, поэтому поток электрического вектора через замкнутую поверхность пропорционален заряду внутри нее.

Для непрерывного распределения заряда с объемной плотностью ρ аналогично имеем:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi\int_V \rho dV\,, \qquad (1.3.9)$$

где интеграл от плотности заряда ρ в правой части уравнения берется по объему *V*, окруженному замкнутой поверхностью *S*. Это запись одного из уравнений системы уравнений Максвелла в интегральной форме (см. уравнение (4) во Введении, в вакууме вместо вектора индукции электрического поля $\vec{D}$ стоит напряженность поля $\vec{E}$).

Теорема Гаусса — следствие закона Кулона. Она справедлива для всех векторных полей, у которых точечные источники поля создают напряженность поля $\sim 1/r^2$. В частности, теорема Гаусса справедлива также в применении к закону тяготения.

Примечание 5. В системе СИ теорема Гаусса записывается как

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{q}{\varepsilon_0}\,.$$

1.3.3. Применение теоремы Гаусса для расчета полей

Теорема Гаусса имеет фундаментальное значение для теории. Для практического применения ее удобно использовать только для расчета полей, обладающих той или иной симметрией. Рассмотрим некоторые важные примеры расчетов полей.

А. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Пусть плоскость, изображенная на рисунке 1.3.7, заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ (заряд, распределенный на единичной площади поверхности: $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$).

Из соображений симметрии можно увидеть (или можно сосчитать), что вектор электрического поля перпендикулярен плоскости, т. е. $\vec{E} \| \vec{n}$ ($\vec{n}$ единичный вектор нормали к плоскости) или $d\vec{S}$ (вектор элемента поверхности плоскости). В качестве поверхности, через которую сосчитаем поток вектора напряженности электрического поля, выбираем цилиндрическую поверхность (см. рис. 1.3.7). Поперечное сечение этой поверхности есть прямоугольник (см. рис. 1.3.8). Поскольку напряженность электрического поля вверх или вниз от плоскости одинакова, а поток через боковую поверхность равен нулю (из-за того, что скалярное произведение $\vec{E}$ и элемент боковой поверхности $d\vec{S}$ равны нулю), получаем

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = 2E\Delta S = 4\pi\sigma\Delta S\,.$$

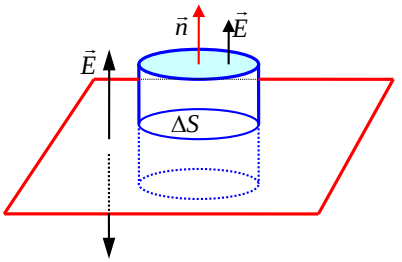


Рис. 1.3.7

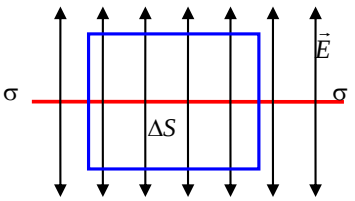


Рис. 1.3.8

Сокращая на элемент поверхности ΔS, получаем поле от равномерно заряженной плоскости:

$$E = 2\pi\sigma . \qquad (1.3.10)$$

Видно, что электрическое поле однородно и направлено перпендикулярно к плоскости. В векторном виде его можно записать следующим образом:

$$\vec{E} = 2\pi\sigma\vec{n} , \qquad (1.3.11)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к плоскости.

Б. Поле бесконечного равномерно заряженного цилиндра (нити).

Пусть имеем равномерно заряженную нить (или цилиндр) с линейной плотностью заряда τ (заряд на единицу длины $\tau = dq/dl$). В силу симметрии вектор напряженности электрического поля направлен радиально, т. е. перпендикулярно к оси нити (см. рис. 1.3.9). Следовательно, для определения величины электрического поля как функции расстояния от нити удобно выбрать цилиндрическую поверхность произвольного радиуса *r* с осью, совпадающей с осью нити. Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через торцы цилиндрической поверхности равен нулю (см. вид с торца на рис. 1.3.9*б*) в силу перпендикулярности векторов $\vec{E}$ и $d\vec{S}$. Таким образом в интеграле по полной поверхности остается поток вектора $\vec{E}$ только через боковую поверхность цилиндра. Последний в силу параллельности $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ легко может быть сосчитан. Из рисунка 3.9*б* видно, что поле имеет одинаковую величину на одном и том расстоянии от оси *r*. Итак, используя теорему Гаусса, имеем

$$E \cdot 2\pi rh = 4\pi\tau h ,$$

где *h* — длина выбранной цилиндрической поверхности. Тогда получаем электрическое поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной нитью, на расстоянии *r* от оси нити:

$$E = \frac{2\tau}{r}. \qquad (1.3.12)$$

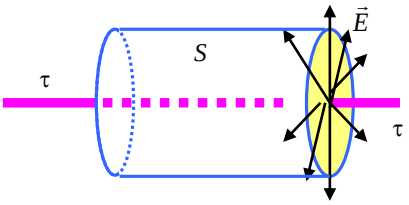


Рис. 1.3.9*а*

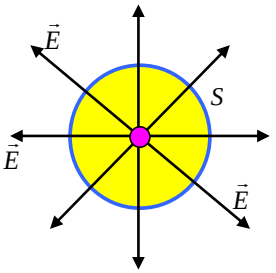


Рис. 1.3.9*б*

Из (1.3.11) видно, что поле убывает медленнее с увеличением расстояния от нити, чем в случае точечного заряда.

Если вместо нити имеем бесконечно длинный цилиндр радиусом R, поверхность которого заряжена с поверхностной плотностью заряда σ (а внутри его объемных зарядов нет), то для напряженности электрического поля получаем:

$$\begin{aligned} r > R \qquad & E = \frac{4\pi\sigma R}{r}; \\ r < R \qquad & E = 0. \end{aligned} \qquad (1.3.13)$$

Аналогично можно получить величину поля в случае заряженного цилиндра с постоянной плотностью объемного заряда как внутри, так и снаружи цилиндра.

В. Поле равномерно заряженного шара радиусом R.

Пусть имеем шар радиусом R, заряженный равномерно по всему объему с плотностью заряда ρ. Из соображений симметрии электрическое поле направлено радиально, как показано на рисунке 1.3.10. Сначала находим поле вне шара. Для этого окружаем шар сферой радиусом $r > R$ и находим поток вектора напряженности электрического поля, который по теореме Гаусса равен полному заряду внутри сферы:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi r^2 E = 4\pi q. \qquad (1.3.14)$$

Откуда вне шара получаем поле, совпадающее с полем точечного заряда:

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 \rho}{r^2}. \qquad (1.3.15)$$

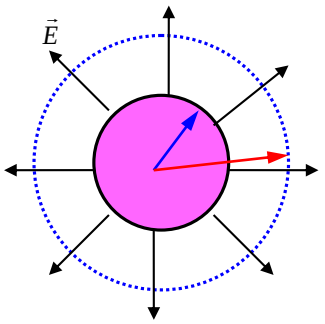


Рис. 1.3.10

Для определения поля внутри шара выбираем соответствующую поверхность: сферу внутри шара $r < R$. Тогда по теореме Гаусса получаем соотношение, аналогичное (1.3.14), но только в правой части стоит заряд, заключенный внутри сферы меньшего радиуса $r < R$, величина которого зависит от радиуса выбранной поверхности:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi r^2 E = 4\pi q_{\text{int}} = 4\pi \frac{4}{3}\pi r^3 \rho .$$

Получаем поле внутри равномерно заряженного шара:

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho r . \qquad (1.3.16)$$

Видно, что электрическое поле пропорционально радиусу. Соотношение (1.3.16) легко записать в векторном виде, поскольку поле внутри шара направлено по радиусу:

$$\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r} . \qquad (1.3.17)$$

Полная зависимость напряженности электрического поля равномерно заряженного шара от расстояния до центра изображена на рисунке 1.3.11.

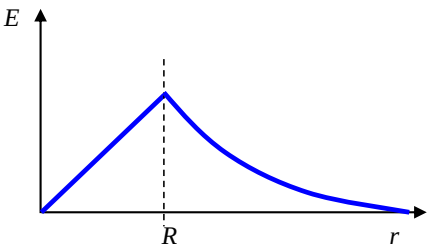


Рис. 1.3.11

Примечание 6. В системе СИ напряженности электрического поля записываются:

– равномерно заряженной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0};$$

– бесконечной равномерно заряженной нити

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r};$$

– внутри равномерно заряженного шара

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r.$$

1.4. Дифференциальная форма теоремы Гаусса

1.4.1. Дивергенция вектора $\vec{E}$ в декартовой системе координат

Рассмотрим теорему Гаусса для бесконечно малого объема в декартовой системе координат. Напомним, *физический смысл теоремы Гаусса* состоит в следующем: источниками электрического поля, «выходящего» из замкнутой области, являются заряды, находящиеся внутри замкнутой поверхности *S*:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q.$$

При этом поток вектора $\vec{E}$ и заряд могут рассматриваться как суммарная алгебраическая мощность *источников* и *стоков* поля. Если мы разделим этот поток на объем ΔV, ограниченный поверхностью *S*, то получим *среднюю мощность* или *удельную мощность* источников поля:

$$\frac{\oint \vec{E} d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\Phi}{\Delta V}. \qquad (1.4.1)$$

Удельная мощность зависит от координат точки пространства, в которой считается эта величина. Определим удельную мощность источников произвольного векторного поля $\vec{A}$ в точке *P* с координатами $\vec{r}(x, y, z)$ следующим образом:

$$div\vec{A} \equiv \lim_{\Delta V \to (\bullet)P} \frac{\oint \vec{A} d\vec{S}}{\Delta V}, \qquad (1.4.2)$$

где $\Delta V \to (\cdot)P$ означает, что объем стягивается к точке *P*, а некоторый дифференциальный оператор div, действующий на вектор $\vec{A}$, носит название *дивергенции*.

Сосчитаем дивергенцию для электрического поля в декартовой системе координат (рис. 1.4.1) и получим явный вид этого оператора. Около выбранной точки *P* с координатами (*x*, *y*, *z*) построим параллелепипед с ребрами *dx*, *dy*, *dz*. Электрическое поле в точке *P* запишем через проекции вектора:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z, \qquad (1.4.3)$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — орты координатных осей. Найдем поток напряженности электрического поля через поверхность параллелепипеда, который представим в виде суммы потоков через его шесть граней:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + ... + \Phi_6 = \sum_i \Phi_i \,. \qquad (1.4.4)$$

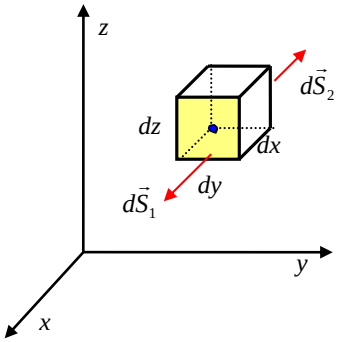


Рис. 1.4.1

Сосчитаем поток через грань 1 (выделена на рис. 1.4.1), где вектор площадки $d\vec{S}_1$ направлен вдоль оси x, а его величина по модулю равна $\left|d\vec{S}_1\right| = dy \cdot dz$. В силу малости площадки (или по теореме о среднем, если площадка больших размеров) имеем:

$$\Phi_1 = \int_1 \vec{E} d\vec{S} = \int_1 E_x dS_1 = \int_1 E_x dydz = E_x\left(x + dx, \langle y \rangle, \langle z \rangle\right) dydz \,, \qquad (1.4.5)$$

где $(x+dx)$ — x-я координата грани 1, а $\langle y \rangle, \langle z \rangle$ — координаты точки на грани 1, которые обеспечивают среднее значение интеграла по этой грани. Сосчитаем также поток через грань 2, которая расположена с противоположной стороны грани 1 «кубика»:

$$\Phi_2 = \int_2 \vec{E} d\vec{S} = -\int_2 E_x dS_2 = -E_x\left(x, \langle y \rangle, \langle z \rangle\right) dydz \,. \qquad (1.4.6)$$

В последнем выражении знак «минус» появился из-за противоположного направления вектора $d\vec{S}_2$ по отношению к оси x (рис. 1.4.1). Суммарный поток через обе грани 1–2 равен:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 &= \left[E_x\left(x + dx, y, z\right) - E_x\left(x, y, z\right)\right] dydz = \\ &= \frac{\left[E_x\left(x + dx, y, z\right) - E_x\left(x, y, z\right)\right]}{dx} dxdydz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV \,. \end{aligned} \qquad (1.4.7)$$

В последнем выражении мы опустили обозначения средних значений по координатам y и z, поскольку переходим к пределу бесконечно малых граней выделенного параллелепипеда.

Аналогично получаем поток через пары других граней, перпендикулярных осям y и z:

$$\Phi_3 + \Phi_4 = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV, \quad \Phi_5 + \Phi_6 = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV \,. \qquad (1.4.8)$$

Суммируя (1.4.7) и (1.4.8), получаем суммарный поток через поверхность маленького параллелепипеда:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV . \qquad (1.4.9)$$

Откуда удельная мощность источников электрического поля, или, что то же самое, дивергенция вектора напряженности, равна

$$div\vec{E} = \frac{\oint_S \vec{E}d\vec{S}}{\underset{S\to(\bullet)P}{\Delta V}} \equiv \frac{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV}{dV} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} . \qquad (1.4.10)$$

Дивергенцией вектора $\vec{E}$ в данной точке называется предел, к которому стремится отношение потока вектора через малую произвольную поверхность ΔS, окружающую эту точку, к величине ограниченного этой поверхностью объема ΔV при $\Delta V \to 0$.

Дивергенция вектора $\vec{E}$ (т. е. $div\vec{E}$) — скалярная величина, как и поток Ф. Удобно дивергенцию записывать через дифференциальный оператор градиента, который действует на векторную функцию $\vec{E}$, стоящую справа от него:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} . \qquad (1.4.11)$$

Таким образом, дивергенцию векторной величины можно записать как скалярное произведение оператора градиента и вектора напряженности поля:

$$\left(\vec{\nabla}, \vec{E}\right) = div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} . \qquad (1.4.12)$$

Такую операцию можно производить для произвольного векторного поля $\vec{A}$. Введем некоторые общие определения.

1. Те точки поля вектора $\vec{A}$, где $div\vec{A} > 0$, — называются *истоками поля*, при этом модуль дивергенции дает силу или мощность истока.

2. Те точки векторного поля, где $div\vec{A} < 0$, называются *стоками поля*.

3. Векторное поле, у которого во всех точках $div\vec{A} = 0$, — поле, свободное от источников, иначе, *соленоидальное поле*. Силовые линии такого поля замкнуты, т. е. не имеют начала и конца.

В применении к электрическому полю имеем теорему Гаусса в интегральной форме (1.3.8) или (1.3.9). Разделим эти уравнения на объем ΔV, затем, устремляя $\Delta V \to 0$ и стягивая этот объем к точке, получаем дивергенцию в левой части, как показано в (1.4.10), и плотность заряда в правой части уравнения. Тогда получаем *теорему Гаусса в дифференциальной форме*, которая для электрического поля имеет вид:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho . \qquad (1.4.13)$$

Это же есть *первое уравнение в системе уравнений Максвелла* (если не рассматривать поле в веществе).

Примечание 7. В системе СИ теорема Гаусса в дифференциальной форме записывается:

$$div\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 .$$

1.4.2. Теорема Остроградского — Гаусса

Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность S, которая ограничивает объем V. Разобьем этот объем на систему бесконечно малых кубиков (сечение такого объема условно показано на рис. 1.4.2). На основании определений (1.4.1) и (1.4.2) можно записать поток вектора $\vec{E}$ через поверхность каждого i-го кубика

$$d\Phi_i = \oint_{\Delta S_i} \vec{E}d\vec{S} = div\vec{E} \cdot dV . \qquad (1.4.14)$$

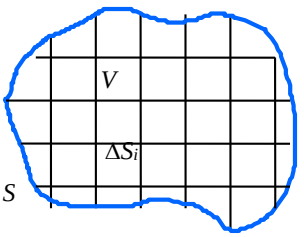


Рис. 1.4.2

Сложим потоки через грани всех этих кубиков. Пусть полное число граней равно N. Отметим, что потоки вектора $\vec{E}$ через внутренние грани объема в сумме равны нулю, поэтому при определении суммарного потока остается интеграл только по внешней поверхности, а для дивергенции в правой части (1.4.14) — интеграл по всем кубикам:

$$\sum_{i=1}^{N} d\Phi_i = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} div\vec{E}_i \cdot dV_i = \int_V div\vec{E}dV . \qquad (1.4.15)$$

Тогда получаем следующее соотношение, которое справедливо для любого векторного поля $\vec{A}$:

$$\oint_S \vec{A}d\vec{S} = \int_V div\vec{A}dV . \qquad (1.4.16)$$

Это выражение представляет собой теорему Остроградского — Гаусса.

Теорема Остроградского — Гаусса: поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции вектора.

Примечание 8. *Теорема Ирншоу* утверждает, что совокупность неподвижных частиц, взаимодействующих между собой с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния (притягивающихся или отталкивающихся), не может образовывать устойчивой равновесной системы. То есть всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных электрических зарядов неустойчива в отсутствие других сил, кроме кулоновских.

Она является следствием теоремы Гаусса. В самом деле, если на рассматриваемый заряд q действует сила со стороны других зарядов, но этот заряд находится в равновесии, то суммарная сила равна нулю и, следовательно, поток вектора E через поверхность, окружающую заряд, равен нулю. При устойчивом равновесии при смещении заряда должна возникать возвращающая сила, т. е. должен возникнуть поток вектора напряженности электрического поля, отличный от нуля, что противоречит теореме Гаусса. Или, иначе, необходимым условием устойчивого равновесия системы является наличие минимума потенциальной энергии. Но потенциальная энергия статической системы зарядов не может иметь минимума.

1.5. Работа сил электростатического поля. Циркуляция вектора

1.5.1. Работа электрического поля. Циркуляция вектора

По определению элементарная работа электрических сил по перемещению точечного заряда q_0 (рис. 1.5.1) равна скалярному произведению силы $\vec{F}$ на перемещение $\vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$, а конечная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 выражается интегралом по траектории:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_1^2 q_0\vec{E}(\vec{r})d\vec{r} = q_0\int_1^2 \vec{E}(\vec{r})d\vec{r}\,. \qquad (1.5.1)$$

Если внешнее электрическое поле создается точечным зарядом q, т. е. напряженность поля $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$, то тогда работа по перемещению заряда q_0 в поле неподвижного точечного заряда равна:

$$A_{12} = q_0\int_1^2 \frac{q\vec{r}d\vec{r}}{r^3} = q_0 q\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = q_0\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = E_{\text{пот}1} - E_{\text{пот}2} = \\ = W_1 - W_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (1.5.2)$$

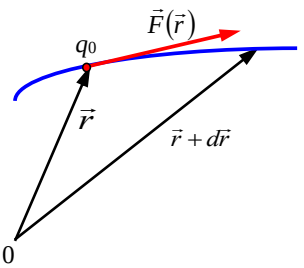


Рис. 1.5.1

Здесь мы воспользовались тем, что скалярное произведение равно $\vec{r}d\vec{r} = rdr$ (см. рис. 1.5.2), где dr — приращение длины вектора $\vec{r}$. Работа консервативных сил равна разности потенциальной энергии в начальном и конечном состояниях. Здесь в (1.5.2) мы ввели потенциальную энергию $E_{пот}$. Однако, чтобы не путать с напряженностью поля, потенциальную энергию в теории электромагнитных полей будем обозначать через W.

Здесь в (1.5.2) также ввели φ — *потенциал электростатического поля — энергетическая характеристика поля:*

$$\varphi = \frac{W}{q_0}.$$

Подробнее потенциал рассмотрим в следующем параграфе.

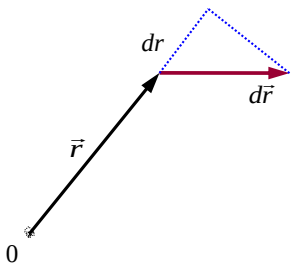


Рис. 1.5.2

Итак, поскольку работа электростатических сил не зависит от пути, то электрическое поле потенциально. Из принципа суперпозиции следует, что свойство потенциальности справедливо для электрического поля любой системы неподвижных зарядов.

Вследствие потенциальности электрического поля работа его сил по замкнутому контуру равна нулю, т. е. можно записать

$$\oint_L \vec{E}d\vec{r} = \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0, \qquad (1.5.3)$$

где $d\vec{r} = d\vec{l}$ — элемент контура, по которому ведется интегрирование. Это одно из фундаментальных уравнений электростатики (часть более общего уравнения Максвелла). О соотношении (1.5.3) говорят, что *циркуляция вектора* электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю — *теорема о циркуляции*.

Общее определение для произвольного вектора: *векторное поле называется потенциальным, если циркуляция этого вектора по любому замкнутому контуру равна нулю*.

1.5.2. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора

Рассмотрим произвольное векторное поле $\vec{E}$ в декартовой системе координат:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\vec{e}_x + E_y(\vec{r})\vec{e}_y + E_z(\vec{r})\vec{e}_z;$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z ,$$

где, как и ранее, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — орты декартовых осей.

Далее рассмотрим циркуляцию вектора $\vec{E}$ по некоторому замкнутому контуру L и введем обозначение циркуляции как $C\left(\vec{E}\right)$:

$$\oint_L \vec{E}(\vec{r})d\vec{l} = C\left(\vec{E}\right). \qquad (1.5.4)$$

Чтобы получить запись теоремы о циркуляции в дифференциальной форме, рассмотрим бесконечно малый контур *ABCD* на плоскости (*x*, *y*), изображенный на рисунке 1.5.3 со сторонами 1, 2, 3 и 4. При таком выборе осей *x* и *y* ось *z* направлена из плоскости на нас. Выберем направление обхода контура *ABCD* таким образом, что вектор обойденной площадки также направлен вдоль оси *z*. Иначе говоря, выбираем направление обхода контура, как показано на рисунке 1.5.3, и тогда по правилу буравчика направление вектора площадки $\Delta\vec{S}$ смотрит на нас из плоскости рисунка. Значения и направление вектора поля $\vec{E}$ можно считать постоянными на малых отрезках *dx* и *dy* (или, иначе, на этих отрезках берем средние величины этих векторов). Тогда циркуляция вектора $\vec{E}$ по малому контуру *ABCD* может быть представлена в виде суммы по всем сторонам 1, 2, 3 и 4:

$$\oint_{ABCD} \vec{E}d\vec{l} = \sum_{i=1,2,3,4} \vec{E}_i d\vec{l}_i = E_{1x}dx + E_{3y}dy + \left(-E_{2x}dx\right) + \left(-E_{4y}dy\right). \qquad (1.5.5)$$

Минус в двух последних слагаемых появился из-за того, что приращения *dx* и *dy* отсчитываются в другую сторону по отношению к положительному направлению осей *x* и *y*.

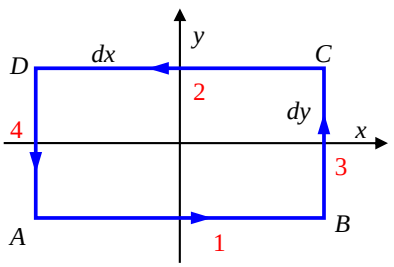


Рис. 1.5.3

Рассмотрим отдельно слагаемые на горизонтальных отрезках 1 и 2:

$$\left(E_{1x} - E_{2x}\right)dx = \frac{E_{1x} - E_{2x}}{dy}dydx = -\frac{\partial E_x}{\partial y}dxdy = -\frac{\partial E_x}{\partial y}dS . \qquad (1.5.6)$$

Здесь *dS* — элемент площадки, ограниченной контуром *ABCD*. Аналогично на отрезках 3 и 4 получаем

$$\left(E_{3y} - E_{4y}\right)dy = \frac{\partial E_y}{\partial x}dS . \qquad (1.5.7)$$

Итак, по полному выбранному бесконечно малому контуру *ABCD* получаем бесконечно малую циркуляцию вектора $\vec{E}$:

$$dC_z\left(\vec{E}\right)=\oint\limits_{ABCD}\vec{E}d\vec{l}=\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dS. \qquad (1.5.8)$$

Напомним, что элемент площадки dS лежит в плоскости (x, y) и, учитывая направление обхода этой площадки, можно считать, что в выражении (1.5.8) $dS = dS_z$ представляет собой *проекцию вектора элементарной площадки* на ось z, а выражение в скобках — тоже проекция на эту же ось. Это обстоятельство обозначим значком z в величине циркуляции dC_z.

Можно выбрать маленькие площадки, перпендикулярные к осям $0x$ и $0y$. Определяя циркуляцию вектора $\vec{E}$ по контурам этих малым площадок, получаем совершенно аналогично проекции dC_x и dC_y на оси x и y:

$$dC_x\left(\vec{E}\right)=\oint\limits_{L}\vec{E}d\vec{l}=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dzdy; \qquad (1.5.9)$$

$$dC_y\left(\vec{E}\right)=\oint\limits_{L}\vec{E}d\vec{l}=\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)dxdz. \qquad (1.5.10)$$

Каждое из выражений (1.5.8)–(1.5.10) можно рассматривать как соответствующие слагаемые скалярного произведения двух векторов:

1) некоего дифференциального вектора, компоненты которого представлены частными производными в скобках;

2) вектора малой площадки, который подробно записывается в виде

$$d\vec{S}=dS_x\vec{e}_x+dS_y\vec{e}_y+dS_z\vec{e}_z=\vec{e}_x dydz+\vec{e}_y dzdx+\vec{e}_z dxdy.$$

Введем дифференциальный вектор, называемый *ротором вектора* $\vec{E}$, следующим образом:

$$rot\vec{E}\equiv\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z. \qquad (1.5.11)$$

Тогда сумму выражений (1.5.8)–(1.5.10) можно представить в виде скалярного произведения двух векторов:

$$rot\vec{E}\cdot d\vec{S}\equiv\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dS_x+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)dS_y+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dS_z. \qquad (1.5.12)$$

Иначе это скалярное произведение можно записать в следующем виде:

$$\left(rot\vec{E},d\vec{S}\right)=rot_n\vec{E}\cdot dS. \qquad (1.5.13)$$

Выражение (1.5.13), исходя из общего определения потока вектора, есть не что иное, как поток вектора $rot\vec{E}$ через площадку dS. Тогда нормальную (по отношению к малой поверхности ΔS) составляющую вектора ротора определяем следующим образом:

$$rot_n\vec{E} = \lim_{\Delta S\to 0, L\to 0} \frac{\oint_L \vec{E}d\vec{l}}{\Delta S}. \qquad (1.5.14)$$

Итак, рассматривая бесконечно малый замкнутый контур вокруг выбранной точки векторного поля, можно определить нормальную составляющую вектора ротора. Эта составляющая в данной точке представляет собой отношение циркуляции этого вектора по этому малому контуру и бесконечно малой площади, охватываемой этим контуром.

Действие ротора как векторного дифференциального оператора (1.5.11) на произвольный вектор $\vec{E}$ может быть записано через векторное произведение оператора градиента и вектора $\vec{E}$:

$$rot\vec{E} = \left[\hat{\vec{\nabla}}, \vec{E}\right] = \left[\left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right), \left(E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z\right)\right]. \qquad (1.5.15)$$

Напоминаем, что частные производные берутся от тех величин и функций, которые стоят справа от оператора. Векторное произведение или ротор вектора $\vec{E}$ (1.5.15) можно также записать через детерминант:

$$rot\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \qquad (1.5.16)$$

Вернемся к свойствам электростатического поля. Поскольку для электрического поля циркуляция (1.5.3) по любому контуру равна нулю, то исходя из (1.5.14) ротор вектора электрической напряженности $\vec{E}$ также равен нулю. Итак, для электрического (электростатического) поля имеем:

$$rot\vec{E} = 0. \qquad (1.5.17)$$

Это одно из уравнений системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме для электрического статического (не зависящего от времени) поля.

1.5.3. Теорема Стокса

Рассмотрим циркуляцию произвольного вектора $\vec{A}$ по контуру L, ограничивающему поверхность S. Разобьем поверхность на маленькие площадки и сосчитаем поток вектора ротора $\vec{A}$ через малую i-ю площадку. Из полученных в предыдущем пункте формул (1.5.13) и (1.5.14) имеем для потока через i-ю площадку:

$$\left(rot\vec{A}, \Delta\vec{S}_i\right) = rot_n\vec{A}\cdot\Delta S_i = \oint_{L_i}\vec{A}d\vec{l}. \qquad (1.5.18)$$

Просуммируем поток вектора $rot\vec{A}$ (1.5.18) по всем площадкам, окруженным внешним контуром L. Учтем, что в интегралах по контурам L_i каждая внутренняя линия сетки проходится дважды (см. рис. 1.5.4), но только в противоположных направлениях, и, следовательно, их вклад в

сумме по всем площадкам сокращается. Это означает, что в результате суммирования по площадкам в правой стороне равенства остается интеграл только по внешнему контуру L, ограничивающему площадку S:

$$\sum_i \left(rot\vec{A}, \Delta S_i\right) = \sum_i \oint_{L_i} \vec{A}d\vec{l} = \oint_L \vec{A}d\vec{l}\,. \qquad (1.5.19)$$

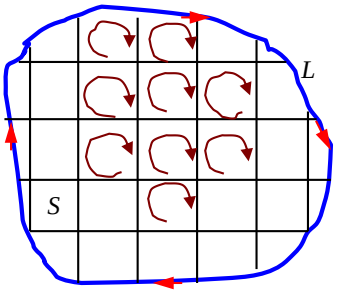


Рис. 1.5.4

Переходя к пределу $\Delta S_i \to 0$, получаем *теорему Стокса*:

$$\int_S rot\vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}\,. \qquad (1.5.20)$$

Теорема Стокса звучит следующим образом: *циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через площадку, ограниченную этим контуром*.

Теорема Стокса применима к любым векторным полям, поэтому такое же выражение, записанное для вектора напряженности электрического поля, имеет вид:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}d\vec{S}\,. \qquad (1.5.21)$$

Но важно отметить, что для *электростатического поля* имеем уравнения (1.5.3) и (1.5.17), следовательно, левая и правая части уравнения (1.5.21) равны нулю

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}d\vec{S} = 0\,. \qquad (1.5.22)$$

Напомним, что циркуляция вектора равна нулю, когда поле потенциально. Итак, понятие потенциала можно вводить для таких векторных полей, для которых циркуляция вектора по замкнутому контуру или его ротор равны нулю.

1.6. Потенциал электростатического поля

1.6.1. Потенциал

В предыдущем параграфе получили выражение для работы по перенесению заряда q_0 из точки r_1 в точку r_2 в поле неподвижного точечного заряда q:

$$A_{12} = q_0\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = q_0\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = W_1 - W_2\,. \qquad (1.6.1)$$

Здесь потенциальная энергия W заряда q_0 в электрическом поле определяется через *потенциал* φ, создаваемый зарядом q:

$$W = q_0\varphi. \qquad (1.6.2)$$

Разность потенциалов между двумя пространственными точками можно записать в виде интеграла, определяющего работу электрического поля по перенесению единичного заряда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r}. \qquad (1.6.3)$$

Потенциал — *энергетическая характеристика электрического поля*. Потенциал поля, как и потенциальная энергия, определяется с точностью до постоянной величины. Так, потенциал поля точечного заряда в точке, находящейся на расстоянии r от заряда, имеет вид:

$$\varphi = \frac{q}{r} + const. \qquad (1.6.4)$$

Обычно константу выбирают так, чтобы на бесконечности ($r \to \infty$) потенциал равнялся нулю, т. е.

$$\varphi = \frac{q}{r}. \qquad (1.6.5)$$

Напомним, что определение потенциала с точностью до постоянной величины никак не сказывается при описании взаимодействия между зарядами, поскольку физическое значение имеет только разность потенциалов.

Примечание 9. В системе СИ потенциал поля точечного заряда записывается

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Из принципа суперпозиции следует, что свойство потенциальности справедливо для электрического поля любой системы или конфигурации неподвижных зарядов. Тогда потенциал поля системы зарядов в выбранной точке P (рис. 1.6.1) определяется суммой потенциалов, создаваемых каждым из зарядов:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \qquad (1.6.6)$$

где r_i — расстояние от начала системы отсчета до выбранного i-го заряда, $\vec{r}$ — координата точки наблюдения (рис. 1.6.1); $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ — расстояние от точки наблюдения до выбранного заряда.

В случае непрерывного распределения заряда потенциал в точке наблюдения определяется через интегралы по поверхности или объему, где существует распределение зарядов. Тогда имеем два случая:

а) если имеется объемная плотность заряда $\rho = \rho(\vec{r}\,')$ (см. рис. 1.6.2), то потенциал равен интегралу по объему, где имеются заряды

$$\varphi = \int_V \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}; \qquad (1.6.7)$$

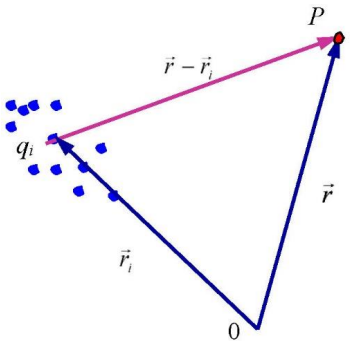


Рис. 1.6.1

б) если имеется поверхностная плотность заряда $\sigma = \sigma(\vec{r}\,')$, то потенциал выражается через интеграл по поверхности

$$\varphi = \int_S \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')dS'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}. \qquad (1.6.8)$$

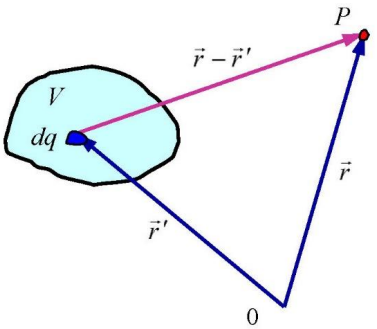


Рис. 1.6.2

Напомним, что потенциал — скалярная величина и в формулах (1.6.6)–(1.6.8) имеем алгебраическое сложение вклада от положительных и отрицательных зарядов.

Единицы потенциала электрического поля

В системе CGSE единица потенциала выбирается исходя из формулы (1.6.5) — 1CGSE_φ, при этом

$$1\text{CGSE}_\varphi = 1\ \text{CGSE}_q/\text{см}.$$

В системе СИ единица потенциала есть вольт:

$$1\ \text{В} = 1\ \text{Дж}\cdot\text{Кл}^{-1}.$$

Связь между этими единицами потенциала имеет вид

$$1\ \mathrm{CGSE}_\varphi = 300\ \text{В}.$$

Отметим, что единица потенциала в системе CGSE существенно больше единицы потенциала в вольтах.

1.6.2. Связь напряженности поля и потенциала. Уравнение Пуассона

Из курса механики мы знаем, что сила есть градиент от потенциальной энергии:

$$\vec{F} = -gradW\,. \tag{1.6.9}$$

Пользуясь определениями (1.6.1)–(1.6.2), получаем связь между потенциалом и напряженностью поля:

$$\vec{E} = -grad\varphi \equiv -\nabla\varphi\,. \tag{1.6.10}$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (1.6.10) и воспользуемся представлением, что дивергенция от вектора есть не что иное, как скалярное произведение оператора градиента на этот вектор:

$$div\vec{E} \equiv \left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) = -\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\varphi \equiv -div\left(grad\,\varphi\right).$$

Далее воспользуемся теоремой Гаусса для вектора $\vec{E}$ в дифференциальной форме (1.4.13), тогда получаем

$$\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) = -\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\varphi = 4\pi\rho\,. \tag{1.6.11}$$

Распишем подробнее скалярное произведение двух операторов градиента и введем *оператор Лапласа* Δ:

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right) &= \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z},\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)= \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \Delta.\end{aligned} \tag{1.6.12}$$

В итоге получаем *уравнение Пуассона*, определяющее связь между распределением заряда и потенциалом:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho\,. \tag{1.6.13}$$

Или в более подробной записи уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho\,. \tag{1.6.14}$$

Это одно из основных уравнений электростатики, с помощью которого определяется потенциал электрического поля по заданному распределению (плотности ρ) заряда.

В физике часто строятся поверхности постоянного потенциала — так называемые *эквипотенциальные поверхности*. Силовые линии электрического поля (вектора напряженности) направлены перпендикулярно к эквипотенциальным поверхностям.

Примечание 10. В системе СИ уравнение Пуассона записывается
$$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0 .$$

1.6.3. Примеры вычисления потенциала

А. Вычислим потенциал, создаваемый шаром радиусом R, который равномерно заряжен с объемной плотностью заряда ρ. Будем вычислять потенциал $\varphi(\vec{r})$ как работу по перенесению единичного заряда из бесконечности в точки, расположенные вне ($r > R$) и внутри ($r < R$) заряженного шара. В п. 1.3 получили, что напряженность электрического поля вне равномерно заряженного шара определяется

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 \rho}{r^2},$$

а напряженность электрического поля внутри шара равна

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho r .$$

Работу по перенесению единичного заряда из бесконечности (где поле равно нулю) в точку вне шара $r > R$ мы уже определяли ранее, и она равна

$$A_{\infty r} = \varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} E dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{r} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{r} \text{ при } r > R. \qquad (1.6.15)$$

Таким образом, вне шара и на его поверхности получаем для потенциала такое же выражение, как для потенциала точечного заряда, сосредоточенного в центре шара. В частности, на поверхности шара при $r = R$ имеем

$$\varphi(r = R) = \frac{q}{R}.$$

Для определения потенциала внутри шара необходимо к работе по перенесению единичного заряда из бесконечности до поверхности шара добавить работу сил электрического поля по его перемещению от поверхности до точки внутри шара $r < R$. Сосчитаем эту работу, подставляя напряженность электрического поля внутри шара:

$$A_{Rr} = -\int_{R}^{r} \vec{E}d\vec{r} = -\frac{4}{3}\pi\rho\int_{R}^{r} r dr = -\frac{4}{3}\pi\rho\frac{r^2 - R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \frac{R^2 - r^2}{2R^3} = \frac{q}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right). \quad (1.6.16)$$

Итак, складывая работы по перемещению заряда до поверхности и внутри шара, находим потенциал поля заряженного шара внутри него:

$$\varphi(r) = \frac{q}{R} + \frac{q}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{ при } r < R. \qquad (1.6.17)$$

Примерная зависимость $\varphi(r)$ потенциала от расстояния до центра заряженного шара представлена на рисунке 1.6.3.

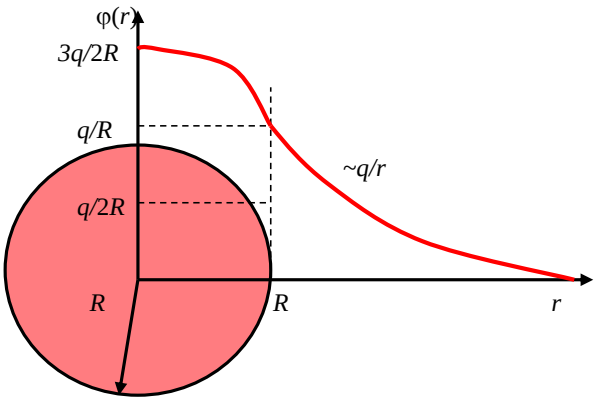


Рис. 1.6.3

Б. Сосчитаем потенциал в центре полусферы радиусом R, если ее поверхность заряжена с постоянной поверхностной плотностью электрического заряда $\sigma = const$. В этом случае сосчитаем потенциал как алгебраическую сумму потенциалов, создаваемых точечными зарядами. Таким образом, мы находим потенциал с точностью до постоянной.

Выберем элемент поверхности dS, находящийся под углом θ к оси симметрии (см. рис. 1.6.4) и под углом φ к произвольно направленной оси x и имеющий заряд:

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi .$$

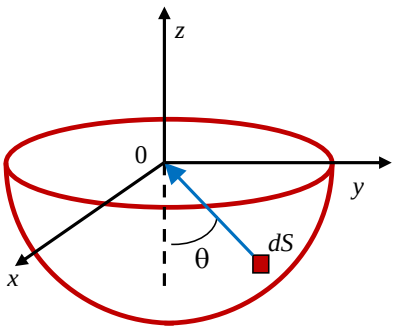


Рис. 1.6.4

Рассматривая этот заряд dq как точечный, запишем его вклад в потенциал в центре полусферы:

$$d\varphi = \frac{\sigma dS}{R} = \sigma R \sin\theta \, d\theta \, d\varphi . \qquad (1.6.18)$$

Интегрируя по всей поверхности полусферы, получаем полный потенциал, создаваемый заряженной поверхностью в центре полусферы:

$$\varphi = R\sigma \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\sigma R . \qquad (1.6.19)$$

Если известен полный (и равномерно распределенный) заряд на полусфере

$$q = 2\pi R^2 \sigma ,$$

то можно получить простой и вполне очевидный результат для потенциала, создаваемый полусферой:

$$\varphi = \frac{q}{R} . \qquad (1.6.20)$$

Отметим, что мы суммировали потенциалы, создаваемые точечными зарядами, для которых потенциал на бесконечности равен нулю. Поэтому и окончательный результат (1.6.20) также определяет потенциал в точке 0 относительно потенциала на бесконечности, равного нулю.

Если имеется неравномерное распределение заряда по поверхности, то необходимо сосчитать соответствующие интегралы в (1.6.19). Определение потенциала в других точках производится численным интегрированием по всей поверхности полусферы.

1.7. Потенциал и напряженность поля системы точечных зарядов

1.7.1. Потенциал и напряженность поля электрического диполя

Точечный *электрический диполь* — система двух одинаковых по величине, но разных по знаку точечных зарядов, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до точки, где определяется электрическое поле системы. Вектор $\vec{l}$ проводится от отрицательного заряда к положительному заряду (рис. 7.1). Так же направлен *электрический дипольный момент*, который определяется

$$\vec{p} = q\vec{l} . \qquad (1.7.1)$$

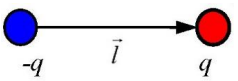


Рис. 1.7.1

Найдем потенциал и электрическое поле, создаваемое диполем. В силу аксиальной (осевой) симметрии достаточно находить электрическое поле в плоскости, проходящей через вектор $\vec{l}$ (например, в плоскости рис. 1.7.2). Введем полярные координаты (r, θ): r — расстояние от центра диполя до точки наблюдения А, где измеряется поле; θ — угол между вектором дипольного момента $\vec{p} = q\vec{l}$ и направлением на точку наблюдения (·)А — вектором $\vec{r}$ (рис. 1.7.2).

Рассмотрим ситуацию, когда расстояние от диполя до точки измерения поля значительно больше расстояния между зарядами в самом диполе: $r \gg l$. Последнее неравенство определяет понятие *точечного диполя*. Тогда

расстояния от положительного r_+ и отрицательного r_- зарядов до точки наблюдения А могут быть записаны в виде:

$$r_+ \approx r - \frac{l}{2}\cos\theta = r - \frac{\vec{l}}{2}\vec{e}_r$$
$$r_- \approx r + \frac{l}{2}\cos\theta = r + \frac{\vec{l}}{2}\vec{e}_r \qquad (1.7.2)$$

где $\vec{e}_r$ — единичный вектор (орт) вдоль направления $\vec{r}$. Сосчитаем потенциал поля диполя в этой точке:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} = q\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}. \qquad (1.7.3)$$

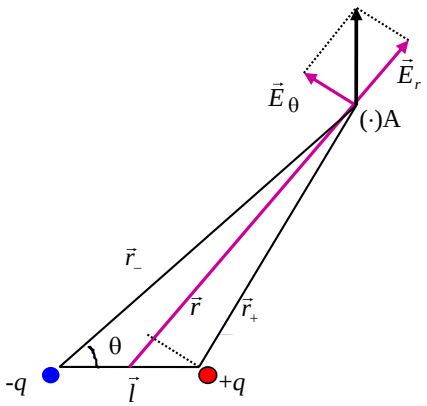


Рис. 1.7.2

При $r \gg l$ можно приближенно записать $r_+ r_- \approx r^2$ и затем, подставляя (1.7.2), получаем:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{2q\frac{\vec{l}\vec{e}_r}{2}}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}, \qquad (1.7.4)$$

или, иначе,

$$\varphi(r,\theta) = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{p\cdot\cos\theta}{r^2}. \qquad (1.7.5)$$

Из (1.7.5) видно, что потенциал диполя быстрее убывает с расстоянием, чем потенциал точечного заряда. Очевидно, что это связано с взаимной экранировкой разных по знаку зарядов диполя.

Теперь сосчитаем напряженность поля электрического диполя, воспользовавшись связью между потенциалом и напряженностью поля:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial\varphi}{\partial l_\theta}\vec{e}_\theta\right) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right), \qquad (1.7.6)$$

где $\vec{e}_\theta$ — единичный вектор, перпендикулярный к направлению $\vec{r}$ (для точечного диполя по касательной к окружности радиусом r). Вектор электрического поля можно разложить на составляющие: $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$ (см. рис. 1.7.2), тогда компоненты вектора поля равны:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p \cdot cos\,\theta}{r^3}, \quad E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{p \cdot sin\,\theta}{r^3}. \qquad (1.7.7)$$

Задавая различные координаты точки r и θ, можно получить силовые линии поля диполя в плоскости, проходящей через ось диполя (см. рис. 1.2.6 в п. 1.2). В частности, вдоль оси диполя отлична от нуля только радиальная компонента E_r. В точках на прямой, проходящей через центр диполя перпендикулярно к его оси, отлична от нуля только касательная составляющая поля E_θ.

Модуль вектора напряженности равен:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta};$$

$$E = \frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3cos^2\,\theta}\,. \qquad (1.7.8)$$

Проекции вектора напряженности электрического поля и его величина зависят от расстояния до диполя и угла между направлением наблюдения и направлением дипольного момента. Можно представить вектор напряженности в следующей полезной форме:

$$\vec{E} = \frac{2p \cdot \cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{p \cdot \sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta = \frac{3p \cdot \cos\theta}{r^3}\vec{e}_r - \frac{p \cdot \cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{p \cdot \sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta =$$

$$= \frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3};$$

$$\vec{E} = \frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}. \qquad (1.7.9)$$

При выводе (1.7.9) мы воспользовались тем, что разложение дипольного момента по ортам $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\theta$ имеет вид

$$\vec{p} = p \cdot cos\theta\vec{e}_r - p \cdot sin\theta\vec{e}_\theta. \qquad (1.7.10)$$

В выражении (1.7.9) напряженность электрического диполя никак не связана с выбором координатных осей, а определяется вектором дипольного момента и радиус-вектором.

1.7.2. Диполь во внешнем электрическом поле

1. Однородное внешнее поле. Поместим диполь во внешнее однородное электрическое поле. Полная сила, действующая на диполь, очевидно, равна нулю (см. рис. 1.7.3), из-за того, что силы, действующие на каждый из зарядов, различны по знаку, но одинаковы по модулю:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0. \qquad (1.7.11)$$

Поэтому диполь в однородном поле не смещается. Однако на диполь действует пара сил на расстоянии $l\,sin\theta$ (плечо пары сил), где угол θ —

угол между направлением вектора напряженности поля и дипольным моментом. Следовательно, момент силы, стремящийся повернуть дипольный момент вдоль направления поля, отличен от нуля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]. \qquad (1.7.12)$$

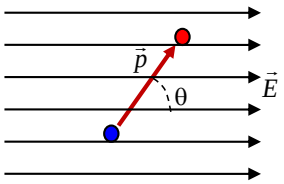


Рис. 1.7.3

Наиболее устойчивое положение диполя возникает тогда, когда вектор дипольного момента $\vec{p} = q\vec{l}$ направлен вдоль вектора напряженности электрического поля.

2. Неоднородное внешнее поле (см. рис. 1.7.4). В неоднородном внешнем электрическом поле силы в разных точках диполя различны, и поэтому суммарная сила, действующая на диполь, не равна нулю:

$$\left(\vec{F}_1\right(\neq \left(\vec{F}_2\right(\quad \text{и} \quad \vec{F} \neq 0.$$

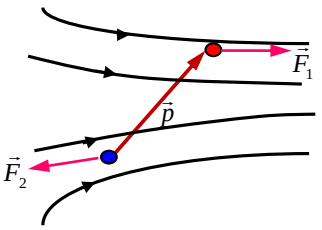


Рис. 1.7.4

Силу можно определить, вычисляя градиент потенциальной энергии: $\vec{F} = -\nabla W$.

Энергию диполя в электрическом поле определяем по сумме энергий каждого из зарядов (здесь не учитывается внутренняя энергия диполя как целого, т. е. его энергия связи):

$$W = q\varphi_+ - q\varphi_- = q\left(\varphi_+ - \varphi_-\right) = q\Delta\varphi. \qquad (1.7.13)$$

Считая расстояние между зарядами диполя l достаточно малой величиной (как малое приращение, что есть дифференциал), можно записать

$$q\Delta\varphi = -q\left(\vec{E}, \vec{l}\right) = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right).$$

Таким образом, потенциальная энергия взаимодействия диполя с электрическим полем записывается в виде

$$W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right). \qquad (1.7.14)$$

Выражение (1.7.14) определяет энергию точечного диполя в любом электрическом поле. Оно только не учитывает энергию взаимодействия зарядов между собой, т. е. собственную энергию диполя.

Сила, действующая на диполь в целом, определяется как градиент потенциальной энергии:

$$\vec{F} = -\nabla W = \nabla\left(\vec{p},\vec{E}\right). \qquad (1.7.15)$$

Для вычисления градиента от скалярного произведения векторов воспользуемся известной формулой векторного анализа:

$$\nabla\left(\vec{A},\vec{B}\right) = \left(\vec{A},\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B},\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \left[\vec{A},rot\vec{B}\right] + \left[\vec{B},rot\vec{A}\right]. \qquad (1.7.16)$$

Подставляя вместо $\vec{A}$ и $\vec{B}$ векторы $\vec{p}$ и $\vec{E}$ соответственно, видно, что все слагаемые, кроме одного (первого), равны нулю. В самом деле, $\left(\vec{E},\vec{\nabla}\right)\vec{p} = 0$ и $\left[\vec{E},rot\vec{p}\right] = 0$ из-за того, что дипольный момент $\vec{p}$ есть постоянная величина, а векторное произведение $\left[\vec{p},rot\vec{E}\right] = 0$ равно нулю из-за того, что $rot\vec{E} = 0$. Таким образом, получаем выражение для силы, действующей на точечный диполь:

$$\vec{F} = \left(\vec{p},\vec{\nabla}\right)\vec{E}. \qquad (1.7.17)$$

Рассмотрим в качестве примера частный случай — пусть ось x направлена вдоль вектора дипольного момента $\vec{p}$ ($p = p_x$, $p_y = p_z = 0$), тогда получаем для силы более простое выражение:

$$\vec{F} = p\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}. \qquad (1.7.18)$$

Как видно из (1.7.18), сила, действующая на диполь в неоднородном поле, направлена в сторону возрастания электрического поля. Таким образом, диполь «втягивается» в область более сильного электрического поля.

1.7.3. Система зарядов на больших расстояниях

Рассмотрим систему из N зарядов q_i, находящихся внутри области с линейными размерами ~ l (см. рис. 1.7.5). Найдем электрическое поле, создаваемое системой этих зарядов, на больших расстояниях $r >> l$.

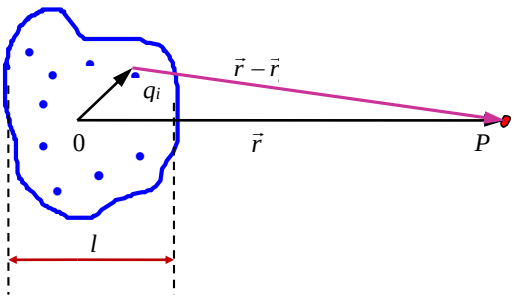


Рис. 1.7.5

Потенциал, создаваемый системой на расстоянии r, определяется алгебраической суммой потенциалов от каждого заряда:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}. \qquad (1.7.19)$$

Здесь векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}_i$ отсчитываются от начала координат, помещенного внутри области. Учтем, что ищем потенциал на больших расстояниях от системы зарядов $|\vec{r}_i| \le l << |\vec{r}|$, тогда знаменатель в (1.7.19) приближенно запишем в виде

$$\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right| \approx r - \vec{r}_i \vec{e}_r = r\left(1 - \frac{\vec{r}_i \vec{e}_r}{r}\right), \qquad (1.7.20)$$

где $\vec{e}_r$ — орт, направленный вдоль вектора $\vec{r}$. Тогда, учитывая также, что при $x << 1$ имеем известное разложение дроби

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots,$$

разложение потенциала будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}_i \vec{e}_r}{r} + \left(\frac{\vec{r}_i \vec{e}_r}{r}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{r} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r}_i, \vec{e}_r\right)}{r^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i (\vec{r}_i, \vec{e}_r)^2}{r^3} + \ldots \qquad (1.7.21)$$

Обсудим отдельные слагаемые в (1.7.21). Первое слагаемое описывает потенциал точечного заряда, величина которого определяется алгебраической суммой всех зарядов системы $\sum_i q_i$, или, иначе говоря, описывает поле *монополя*:

$$\varphi_{mon}(\vec{r}) = \frac{\sum_i q_i}{r}. \qquad (1.7.22)$$

Если суммарный заряд системы отличен от нуля, то основной вклад в потенциал дает монопольное слагаемое. Во втором слагаемом разложения (1.7.21) можно выделить дипольный электрический момент системы зарядов:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r}_i. \qquad (1.7.23)$$

Таким образом, второе слагаемое описывает потенциал, создаваемый *дипольным моментом системы зарядов*:

$$\varphi_{dip} = \frac{\vec{p}\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}. \qquad (1.7.24)$$

Если система электронейтральна, т. е. сумма всех зарядов равна нулю $\sum_i q_i = 0$, то электрическое поле создается только дипольным моментом системы. Интересно отметить, что дипольный момент не зависит от начала отсчета. В самом деле, пусть имеются две системы отсчета с началами координат (·)0 и (·)0', отстоящие друг от друга на расстояние *b*. Тогда координаты точки в обеих системах связаны соотношением $\vec{r}_i' = \vec{b} + \vec{r}_i$, и поскольку $\sum_i q_i = 0$, то для дипольного момента имеем

$$\vec{p}' = \sum_i q_i \vec{r}_i{}' = \sum_i q_i \left(\vec{r}_i + \vec{b}\right) = \vec{b}\sum_i q_i + \sum_i q_i \vec{r}_i = \vec{p}\,. \qquad (1.7.25)$$

Итак, если суммарный заряд системы не равен нулю: $\sum_i q_i \neq 0$, то основной вклад при больших расстояниях дает поле заряда — *монополь*. Если система электронейтральна: $\sum_i q_i = 0$, то основной вклад в электрическое поле системы зарядов происходит от дипольного момента системы.

Если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю:

$$\sum_i q_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_i q_i \vec{r}_i = 0\,,$$

то основной вклад дают другие *мультипольные моменты*: в первую очередь *квадруполь*: $\varphi \sim \dfrac{1}{r^3}$.

На рисунке 1.7.6*а* приведен пример системы четырех зарядов, для которой полный заряд и дипольный момент равны нулю, однако система имеет отличный от нуля квадрупольный момент. Поэтому такая система зарядов создает электрическое поле, определяемое третьим слагаемым в уравнении (1.7.21). Пример системы зарядов, для которой монополь, диполь и квадруполь равны нулю, а *октупольный момент* отличен от нуля, показан на рисунке 1.7.6*б*. При этом потенциал, создаваемый такой системой зарядов, обратно пропорционален четвертой степени расстояния: $\varphi \sim 1/r^4$.

Такое разложение поля системы зарядов называется разложением по *мультиполям*. Такое представление имеет большое значение при исследовании электрических полей в твердых телах, особенно кристаллах, и больших молекулах. Подобное разложение можно провести и для непрерывного распределения зарядов. Физики, занимающиеся исследованием структуры атомов, молекул, кластеров, а также элементарных частиц, исследуют их мультипольные моменты. Эти исследования дают информацию о структуре изучаемых объектов. В частности, проводятся экспериментальные исследования нейтральных элементарных частиц, например нейтрона, с целью возможного существования их дипольного момента.

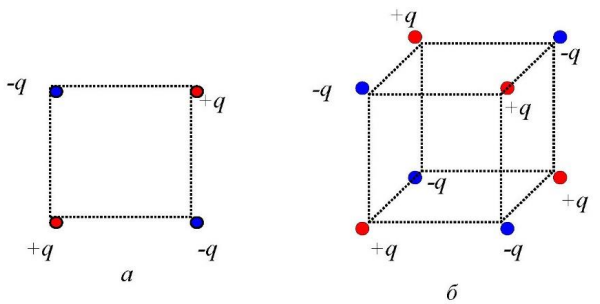


Рис. 1.7.6

ГЛАВА 2.
ЭЛЕКТРОСТАТИКА В ВЕЩЕСТВЕ

2.1. Макро- и микрополя в веществе

Вещество состоит из атомов и молекул. Размеры ядер и электронов по сравнению с размерами атомов малы: примерно в 10^5 раз меньше размеров атома. На долю заряженных частиц приходится очень маленький объем, равный примерно 10^{-15} от занимаемого всем макротелом пространства. Весь остальной объем — вакуум. Под вакуумом здесь мы понимаем пространство, в котором отсутствует вещество, но в нем могут существовать различные поля. Электроны и ядра возбуждают в нем электрические и магнитные поля.

Электрическое поле в этом «пустом пространстве», т. е. между электронами и протонами, меняется очень сложным образом и в *пространстве*, и во *времени*. Назовем это поле, меняющееся на расстояниях порядка размеров атома, микроскопическим полем — *микрополе* $E_{\text{микро}}$. Источником этих полей являются электроны и протоны, их распределение и плотность образуют так называемую *микроплотность* зарядов $\rho_{\text{микро}}$. Эти величины $E_{\text{микро}}$ и $\rho_{\text{микро}}$ нельзя измерить путем внесения пробного заряда, так как наименьший элементарный заряд — заряд электрона e^-, но при его помещении в точку измерения поля его влияние существенно исказит микрополе и микроскопическое распределение заряда.

Задание $E_{\text{микро}}$ и $\rho_{\text{микро}}$ во всех точках пространства и времени дает наиболее детальное описание, однако оно практически неосуществимо при описании макропроцессов в веществе. Для большинства физических задач является достаточным более грубое описание, отвлеченное от атомистического строения и мелкомасштабных изменений поля.

Лоренц показал, как, исходя из представлений о микрополях, можно прийти к уравнениям для описания макроскопических проявлений и процессов в телах. Переход к *макрополям* и *макроплотностям* происходит путем усреднения микрополей и микроплотности по пространству и времени. Классическая физика оперирует со сглаженными полями, которые плавно меняются в пространстве и во времени.

Рассмотрим физически малый объем ΔV, тогда электрическое поле и плотность электрического заряда в макроскопическом масштабе определяются как среднее от микроскопических значений соответственно:

$$\vec{E}_{\text{макро}} = \vec{E} = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \vec{E}_{\text{микро}}\, dV = \left\langle \vec{E}_{\text{микро}} \right\rangle; \qquad (2.1.1)$$

$$\rho_{макро} = \rho = \left\langle \rho_{микро} \right\rangle. \qquad (2.1.2)$$

Чтобы усреднение не зависело от объема ΔV, нужно его выбрать следующим образом:

1) чтобы внутри объема ΔV содержалось много атомов;

2) объем ΔV должен быть достаточно малым, чтобы считать его бесконечно малым с точки зрения макровеличин (т. е. $\Delta V = dV$).

Тогда при таком выборе ΔV можно, например, заменить средние от производных на производные от средних значений электрического поля:

$$\left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \vec{E} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \vec{E} \right\rangle. \tag{2.1.3}$$

Аналогично можно проводить усреднение изменяющегося поля по промежутку времени Δt, который бесконечно мал с точки зрения «макрочасов», но существенно больше характерных времен в микромире, например больше периода обращения электронов вокруг ядер.

Выполнение закона Кулона экспериментально проверено до расстояний 10^{-15} см. Это позволяет считать, что для микрополей справедлива теорема Гаусса, которая рассматривает заряды как источники электрического поля:

$$div\vec{E}_{\text{микро}} = 4\pi\rho_{\text{микро}}. \tag{2.1.4}$$

Усредняя по пространству или по времени, имеем

$$\left\langle div\vec{E}_{\text{микро}} \right\rangle = div\left\langle \vec{E}_{\text{микро}} \right\rangle \equiv div\vec{E} = 4\pi\left\langle \rho_{\text{микро}} \right\rangle = 4\pi\rho. \tag{2.1.5}$$

Таким образом, получаем уравнение Максвелла об источниках электрического поля в среде:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho. \tag{2.1.6}$$

В дальнейшем изложении будем иметь дело со сглаженными усредненными полями, для которых будут выполняться основные уравнения электромагнетизма в веществе.

При внесении вещества во внешнее электрическое поле появляются *индуцированные, или связанные,* заряды, которые рождают дополнительное, внутреннее, электрическое поле. Поэтому макрополе в веществе образуется в результате суперпозиции внешнего и внутреннего полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{внешн}} + \vec{E}_{\text{внутр}}. \tag{2.1.7}$$

Будем также считать, что внешнее поле создается *сторонними*, или, иначе, *свободными*, зарядами. Причем нам придется учитывать, что как поляризация, так и внутреннее поле зависят от внешнего поля, и это усложняет задачу определения электрических полей в веществе.

2.2. Поляризация диэлектриков

2.2.1. Типы диэлектриков

Известно, что существуют различные вещества, которые характеризуются по степени проводимости электрического тока: *проводники*, *диэлектрики*, *полупроводники* и много разнообразных веществ с промежуточными свойствами. В этом параграфе речь пойдет о диэлектриках.

Диэлектрики — вещества, которые проводят ток в 10^{15}–10^{20} раз хуже проводников. Типичные диэлектрики состоят из атомов и молекул, которые не делятся своими электронами с соседями и чей полный электрический заряд равен нулю. Существуют также ионные диэлектрики, в которых полный заряд равен нулю для элементарной кристаллической ячейки. Важно, что у всех диэлектриков нет свободных зарядов (электронов), которые могли бы перемещаться внутри вещества.

Молекулу диэлектрика можно рассматривать как систему зарядов, которая в целом электронейтральна: $\sum_i q_i = 0$, однако у которой может быть неоднородное пространственное распределение электрического заряда и в соответствии с этим у молекулы может возникнуть дипольный момент:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \langle \vec{r}_i \rangle .$$

Этот дипольный момент может быть связан с собственной структурой молекулы, и его появление является энергетически более выгодным для этой системы зарядов, а с другой стороны, он может быть наведенным под влиянием внешнего поля, действующего на молекулу.

Итак, в связи с последним имеются молекулы двух типов.

А. *Неполярные молекулы*: они не имеют дипольного момента в отсутствие внешнего поля: $\vec{p} = 0$. К ним относятся обычно симметричные молекулы типа H_2, O_2, N_2, CH_4 и др.

Б. *Полярные молекулы*: они обладают собственным дипольным моментом, отличным от нуля: $\vec{p} \neq 0$. Например, к таким молекулам относятся: CO, NH, HCl, N_2O, SO_2 и другие молекулы. Дипольный момент молекул обычно составляет величину $|\vec{p}| \sim 10^{-29} \div 10^{-30}$ Кл·м.

Очевидно, что в диэлектриках с неполярными молекулами в отсутствие приложенного внешнего поля своего внутреннего макроскопического электрического поля нет. В диэлектриках из полярных молекул в отсутствие внешнего поля дипольные моменты располагаются хаотично, и внутреннего электрического поля (макрополя) в них также не возникает. Когда любой диэлектрик помещается во внешнее электрическое поле, то происходит *поляризация* вещества, механизм которой различен для разных диэлектриков.

А. **Неполярные молекулы**. Поляризация возникает при смещении отрицательных зарядов относительно положительных зарядов (рис. 2.2.1), вследствие чего молекулы приобретают дипольные моменты. При этом возникающие дипольные моменты $\vec{p}$ можно рассматривать как упругие диполи, когда величина наведенного диполя пропорциональна приложенному полю $\vec{p} \sim \vec{E}$. Последнее утверждение справедливо для не слишком сильных внешних полей. Молекулы и их дипольные моменты ориентированы так, что на поверхности тел появляется наведенный заряд — поляризация. Эти индукционные заряды называют *поляризационными*, или *связанными*. Их отличают от *сторонних* или *свободных* зарядов (заряды проводника, внешние и внесенные заряды и др.).

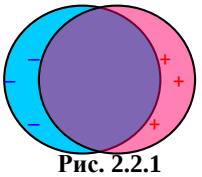


Рис. 2.2.1

Б. **Полярные молекулы**. Без внешнего поля их дипольные моменты расположены хаотично. Под влиянием внешнего поля происходит пространственное выстраивание диполей (рис. 2.2.2), что также приводит к поляризации. Часто внешнее поле значительно слабее внутренних атомных полей, и поэтому оно обычно не влияет на величину собственного дипольного момента (так называемые жесткие диполи), а только поворачивает их. При этом также появляются индукционные заряды на поверхности образца. При однородной поляризации заряды внутри образца компенсируются и остаются только поверхностные индукционные заряды. При неоднородной поляризации индукционные заряды могут появляться и во внутреннем объеме образца, а на поверхности заряды будут распределяться с различной плотностью для сохранения общей электронейтральности образца.

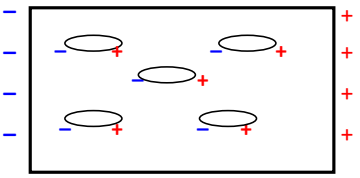


Рис. 2.2.2

В. **Ионные кристаллы**. Рассматриваются диэлектрические (без свободных электронов) ионные кристаллы. Типичный пример изображен на рисунке 2.2.3: на рисунке показана элементарная ячейка кристалла NaCl, состоящая из четырех положительных ионов Na^+ и четырех отрицательных ионов Cl^-. Во внешнем поле происходит смещение положительных и отрицательных подрешеток целиком, что и приводит к поляризации.

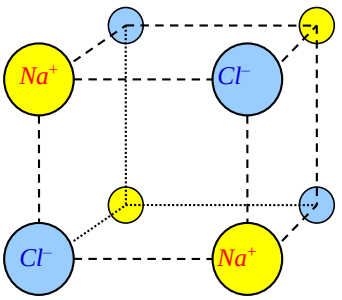


Рис. 2.2.3

Смещения зарядов очень малы, так как внутриатомное электрическое поле очень велико по сравнению с приложенными внешними полями. Так,

в атоме водорода на электрон (заряд $e^- = 4.803 \cdot 10^{-10}$, $\text{CGSE}_q = 1.602 \cdot 10^{-19}$ Кл) действует электрическое поле со стороны ядра, равное

$$E = e/r^2 \sim 10^7, \text{CGSE}_E \sim 10^9 \text{ В/м}.$$

Это поле значительно превышает обычные достижимые на макроскопическом масштабе внешние электрические поля. Поэтому внешние поля не оказывают существенного влияния на внутриатомные поля, однако под их воздействием происходят малые смещения зарядов, которые при усреднении по расстояниям, превышающим размеры атомов, создают наведенное внутреннее поле. Это наведенное внутреннее поле изменяет приложенное внешнее поле внутри вещества.

2.2.2. Вектор поляризации

Количественное описание явления поляризации производится с помощью *вектора поляризации*. Когда внешнего поля нет, суммарный дипольный момент элемента объема вещества равен нулю (исключение составляют сегнетоэлектрики, электреты, см. п. 2.9). Под влиянием внешнего электрического поля возникает поляризация, которую характеризуем *дипольным моментом единицы объема — вектором поляризации* $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \frac{\sum\limits_{\Delta V} \vec{p}}{\Delta V}. \qquad (2.2.1)$$

Здесь $\vec{p}$ — дипольный момент молекулы. Размерность вектора поляризации в системе CGSE равна $[P] = [q]/[L^2]$, которая совпадает с размерностью напряженности электрического поля.

Естественно, что вектор поляризации зависит от внешнего поля, как и наведенный поляризационный заряд (связанный). Поляризация приводит к появлению индукционного связанного заряда на поверхности, а иногда и в объеме. Вектор поляризации определяется величиной наведенного связанного заряда.

2.2.3. Связь вектора поляризации с поверхностной плотностью заряда

Рассмотрим диэлектрик, имеющий форму косого параллелепипеда, и поместим его в однородное электрическое поле $\vec{E}$. На рисунке 2.2.4 показан срез параллелепипеда, параллельный его боковой грани. На боковых гранях появятся поляризационные заряды с плотностью σ'. Если S — площадь боковой грани, то диэлектрик приобретает дипольный момент, равный

$$\vec{p} = \sigma' S \vec{l},$$

где $\vec{l}$ — вектор длины параллелепипеда, направленный вдоль электрического поля, то есть от отрицательных зарядов к положительным. Тогда, как следует из определения (2.2.1), *вектор поляризации* равен

$$\vec{P} = \frac{\sigma' S}{\Delta V} \vec{l}. \qquad (2.2.2)$$

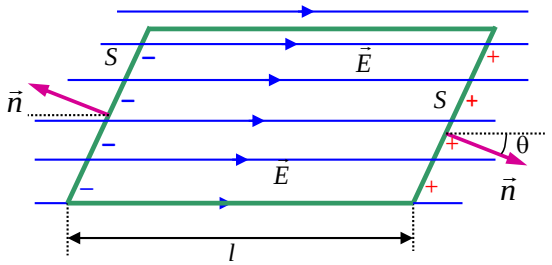


Рис. 2.2.4

Здесь объем параллелепипеда определяется как $\Delta V = Sl\cos\theta$, который можно выразить через скалярное произведение вектора нормали к боковой грани и вектора $\vec{l}$:

$$\Delta V = S\left(\vec{l}, \vec{n}\right). \qquad (2.2.3)$$

Умножим (2.2.2) скалярно на вектор нормали $\vec{n}$ и, воспользовавшись (2.2.3), получим:

$$\vec{P}\vec{n} = \frac{\sigma' S}{\Delta V}\left(\vec{l}, \vec{n}\right) = \sigma'. \qquad (2.2.4)$$

Итак, получаем связь между поверхностной плотностью поляризационного заряда и нормальной составляющей вектора поляризации P_n:

$$\sigma' = \vec{P}\vec{n} = P_n. \qquad (2.2.5)$$

Это соотношение справедливо как для положительного, так и для отрицательного заряда.

Отметим, что уравнение (2.2.5) можно интерпретировать следующим образом: связанный заряд на поверхности появляется при включении внешнего поля как заряд, «вышедший» (смещаемый) из объема наружу через его поверхность.

2.2.4. Теорема Гаусса для вектора поляризации

В предыдущем пункте мы имели дело с однородной поляризацией, когда связанный (поляризационный) заряд появляется только на поверхности. При неоднородной поляризации, которая может возникнуть из-за неоднородности вещества, изменения электрического поля внутри объема и т. д., появляются объемные связанные заряды. Найдем плотность этих индукционных зарядов и свяжем ее с вектором поляризации $\vec{P}$.

Выделим в диэлектрике произвольный объем V, ограниченный поверхностью S (рис. 2.2.5). При включении внешнего поля через малую площадку dS наружу выйдет связанный заряд $dq'_{нар}$, равный согласно (2.2.5):

$$dq'_{нар} = P_n dS = \left(\vec{P}, d\vec{S}\right).$$

В результате в объеме V, ограниченном поверхностью S, за счет выхода из него заряда $dq'_{нар}$ появится избыточный заряд противоположного знака: $dq' = -dq'_{нар}$. Этот результат можно интерпретировать таким образом, что смещенный заряд dq' «прошел» через площадку dS внутрь объема, т. е. в направлении, противоположном направлению нормали:

$$dq' = -P_n dS = -\left(\vec{P}, d\vec{S}\right). \qquad (2.2.6)$$

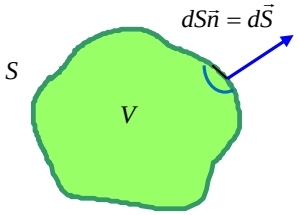


Рис. 2.2.5

Через всю замкнутую поверхность S при включении внешнего поля внутрь поступит заряд, равный

$$q' = -\oint_S P_n dS = -\oint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right). \qquad (2.2.7)$$

Сформулируем результат: поток вектора поляризации $\vec{P}$ через замкнутую поверхность S равен связанному заряду, взятому с обратным знаком, внутри объема V, ограниченного поверхностью S.

Итак, получаем теорему Гаусса для вектора поляризации:

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q'. \qquad (2.2.8)$$

В общем случае полный связанный внутри объема V заряд можно записать через плотность связанных зарядов ρ':

$$q' = \int_V \rho' dV. \qquad (2.2.9)$$

В частности, если вектор поляризации постоянен $\vec{P} = const$, т. е. поляризация однородна, то из (2.2.8) получаем, что суммарный связанный заряд внутри объема равен нулю $q' = 0$. В самом деле, постоянный вектор поляризации выносим из-под интеграла, а интеграл по замкнутой поверхности равен нулю:

$$\vec{P}\oint d\vec{S} = P\oint dS_P = 0.$$

Воспользуемся теоремой Остроградского — Гаусса для вектора поляризации $\vec{P}$, а именно: поток вектора $\vec{P}$ через замкнутую поверхность S равен интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от источников (дивергенции) этого вектора :

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \int_V div\vec{P} dV. \qquad (2.2.10)$$

Тогда, учитывая (2.2.8) и (2.2.9), получаем

$$\oint_S \vec{P}d\vec{S} = \int_V div\vec{P}dV = -\int_V \rho'(\vec{r})dV . \qquad (2.2.11)$$

Поскольку последнее соотношение справедливо для любого выбранного объема V, то подынтегральные выражения в интегралах по объему равны. Итак, дифференциальная связь между объемной плотностью связанного заряда и вектором поляризации имеет вид

$$div\vec{P} = -\rho' . \qquad (2.2.12)$$

Физическая интерпретация соотношений (2.2.8) и (2.2.12), т. е. теоремы Гаусса в интегральном и дифференциальном виде для вектора поляризации $\vec{P}$, состоит в следующем: *источником вектора поляризации* $\vec{P}$ (*т. е. дипольного момента единицы объема*) *служат связанные* (*индуцированные*) *заряды.*

Как и вектор напряженности электрического поля, вектор поляризации удобно характеризовать «силовыми» линиями. Причем в области, где начинаются линии вектора $\vec{P}$ (и, следовательно, $div\vec{P} > 0$), образуется избыток отрицательных связанных зарядов, а в области, в которой оканчиваются линии вектора $\vec{P}$ (и, следовательно, $div\vec{P} < 0$), образуется избыток положительных связанных зарядов.

2.3. Вектор электрической индукции

2.3.1. Вектор электрической индукции

Поляризационные заряды q' — это такие же обычные заряды, как и заряды q, и они также являются источником электрического поля. Поэтому теорема Гаусса для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ должна включать как сторонние, так и связанные заряды:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi(q + q'). \qquad (2.3.1)$$

Аналогично записываем теорему Гаусса в дифференциальной форме:

$$div\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho'). \qquad (2.3.2)$$

Здесь q — сторонний заряд; ρ — плотность сторонних зарядов; q' — связанный заряд и ρ' — плотность связанных зарядов. Эти формулы могут быть переписаны через вектор поляризации $\vec{P}$. Выразив плотность связанных зарядов ρ' через $div\vec{P}$ из формул (2.2.8) и (2.2.12) предыдущего параграфа, перепишем уравнение (2.3.2) в следующем виде:

$$div\vec{E} = -4\pi div\vec{P} + 4\pi\rho ; \qquad (2.3.3)$$

$$div(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho . \qquad (2.3.4)$$

Или в интегральной форме получаем аналогично:

$$\oint_S \left(\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right) d\vec{S} = 4\pi q. \qquad (2.3.5)$$

Введем новый вектор — *вектор электрической индукции* $\vec{D}$, или вектор *электрического смещения*, с помощью следующего соотношения:

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \qquad (2.3.6)$$

Тогда уравнения (2.3.4) и (2.3.5) записываются в более короткой форме:

$$div\vec{D} = 4\pi\rho;$$
$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q. \qquad (2.3.7)$$

Таким образом, мы получили первое уравнение системы уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной форме (см. уравнения (4) и (8) во Введении). Фактически эти уравнения представляют следующее:

Поток вектора электрической индукции через любую замкнутую поверхность равен полному заряду сторонних носителей, находящихся внутри этой поверхность.

Таким образом, *вектор* $\vec{D}$ *определяется только сторонними (свободными) зарядами*. Уравнение (2.3.7) представляет собой обобщение теоремы Гаусса для электрического поля в веществе. Свойства вещества сокрыты в векторе индукции электрического поля $\vec{D}$, точнее, в его связи с вектором напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Вектор $\vec{D}$, как и вектор поляризации $\vec{P}$, является искусственно введенным вектором поля, поскольку разделение зарядов на сторонние и связанные заряды условно (см. примечание 12). Важно, что в вакууме вектор поляризации равен нулю $\vec{P} = 0$, и тогда вектор электрической индукции совпадает с вектором напряженности электрического поля $\vec{D} = \vec{E}$.

Примечание 11. В системе СИ для вектора электрической индукции и теоремы Гаусса имеем следующие соотношения:

$$div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho'); \quad div\vec{P} = -\rho'; \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}; \quad div\vec{D} = \rho.$$

Примечание 12. Вектор электрической индукции (смещения) $\vec{D}$, как и вектор поляризации $\vec{P}$, является искусственным вектором. Вектор $\vec{D}$ введен для того, чтобы выделить вклад сторонних зарядов в полное электрическое поле в веществе. Вектор $\vec{P}$ введен для того, чтобы выделить вклад связанных зарядов в полное электрическое поле. Реальное поле в веществе, которое действует на пробные заряды, есть напряженность электрического поля $\vec{E}$. Введение векторов $\vec{D}$ и $\vec{P}$ облегчает решение электростатических задач, если известна их связь с «истинным» вектором электрического поля $\vec{E}$.

2.3.2. Диэлектрическая проницаемость

В вакууме поле характеризуется только одним вектором $\vec{E}$ — вектором напряженности электрического поля. В веществе, чтобы определять электрическое поле, действующее на пробные заряды, нужно еще знать либо $\vec{P}$, либо $\vec{D}$. Поэтому полученное основное уравнение электростатики надо дополнять еще одним уравнением, которое могло бы связать между собой эти величины.

Принципиально возможно, зная атомную структуру вещества, рассчитать смещение электронов и ядер при включении внешнего электрического поля. То есть исходя из знания атомно-молекулярного строения можно в принципе вычислить вектор поляризации $\vec{P}$ и получить еще одно уравнение, называемое *материальным*, которое связывает напряженность поля $\vec{E}$ внутри вещества и поляризацию $\vec{P}$. Однако универсальной зависимости $\vec{P}$ от вектора напряженности $\vec{E}$ нет, для каждого вещества эта зависимость своя, поскольку атомы и молекулы обладают различными свойствами и поразному реагируют на внешнее поле. Таким образом, на пути прямого определения связи между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$ возникают следующие трудности:

1) связь между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$ не выражается простыми аналитическими формулами и не универсальна;

2) связь этих векторов рассчитать нелегко; только в последние годы благодаря развитию методов современной вычислительной физики делаются попытки теоретического расчета, применяя квантовую механику.

Поэтому существует другой, более простой путь, разработанный ранее, когда еще не существовало квантовой механики и четких представлений об атомно-молекулярной структуре веществ. Этот путь состоял в том, чтобы найти связь между поляризацией и электрическим полем в веществе *эмпирическим* путем.

Опыт показывает, что связь между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$ для большинства диэлектриков *линейна* и *однородна* в широком диапазоне внешних полей, но по величине не приближающихся к внутриатомным полям. При этом необходимо отдельно рассматривать изотропные по пространственным свойствам диэлектрики и анизотропные.

1. Для изотропных диэлектриков и не слишком больших внешних полей (меньших внутриатомных) векторы $\vec{E}$ и $\vec{P}$ пропорциональны и коллинеарны, и тогда материальное уравнение имеет вид

$$\vec{P} = \alpha\vec{E}. \qquad (2.3.8)$$

Здесь коэффициент α — *поляризуемость* диэлектрика, или *диэлектрическая восприимчивость*. Диэлектрическая восприимчивость определяется свойствами атомов и молекул вещества и может зависеть от плотности и температуры диэлектрика. Тогда, подставляя (2.3.8) в вектор индукции (2.3.6), получаем

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\alpha\vec{E} = (1 + 4\pi\alpha)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}. \qquad (2.3.9)$$

Здесь мы ввели *диэлектрическую проницаемость* среды

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha\,. \qquad (2.3.10)$$

Этой величиной характеризуют индивидуальные свойства изотропных диэлектриков. В частности, если среда есть вакуум, то $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$ и $\vec{D} = \vec{E}$.

Примечание 13. В системе СИ имеем

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}; \quad \vec{D} = (\varepsilon_0 + \chi\varepsilon_0)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}; \quad \varepsilon = 1 + \chi\,.$$

2. Анизотропные среды: например, кристаллы. Для них направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{P}$ не совпадают, и поэтому связь между компонентами этих векторов осуществляется через более общую линейную зависимость:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j\,. \qquad (2.3.11)$$

Подробнее (2.3.11) можно переписать в виде

$$\begin{cases} P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ P_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ P_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{cases}. \qquad (2.3.12)$$

Здесь α_{ij} — безразмерные коэффициенты, зависящие от выбора координатных осей. Совокупность этих 9 коэффициентов $\{\alpha_{ij}\}$ составляет *тензор поляризуемости диэлектрика*.

Аналогичное выражение имеем для связи векторов электрической индукции и электрической напряженности:

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j\,, \qquad (2.3.13)$$

где $\{\varepsilon_{ij}\}$ — *тензор диэлектрической проницаемости* вещества, компонеты которого связаны с компонентами тензора поляризуемости:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}\,. \qquad (2.3.14)$$

Пользуясь законом сохранения энергии, можно показать, что тензоры $\{\alpha_{ij}\}$ и $\{\varepsilon_{ij}\}$ симметричны, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{ji}\,; \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji}\,. \end{aligned} \qquad (2.3.15)$$

Таким образом, в тензорах имеем 6 независимых величин — 6 компонент тензора диэлектрической проницаемости $\{\varepsilon_{ij}\}$. Основное физическое содержание соотношений (2.3.11)–(2.3.13) состоит в том, что при включении внешнего электрического поля смещение связанных зарядов и выстроенность внутренних диполей происходят в общем случае не в направлении

приложенного поля, а под некоторым углом к нему. Вследствие этого суммарное электрическое поле внутри вещества по сравнению с внешним полем становится не только другим по величине, но и по направлению.

В дальнейшем для простоты будем в основном говорить об изотропных диэлектриках.

2.4. Граничные условия

2.4.1. Граничные условия для нормальных составляющих

Рассмотрим границу двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (см. рис. 2.4.1), помещенных во внешнее электрическое поле. В общем случае на поверхности раздела двух диэлектриков могут находиться как связанные q', так и сторонние q заряды.

Рассмотрим, что происходит с электрическим полем при переходе из одной среды в другую. Выберем замкнутую цилиндрическую поверхность, высотой h и площадью основания ΔS, охватывающую границу диэлектриков, и воспользуемся теоремой Гаусса — поток вектора напряженности через замкнутую поверхность равен полному заряду, сосредоточенному внутри нее:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi(q+q'). \qquad (2.4.1)$$

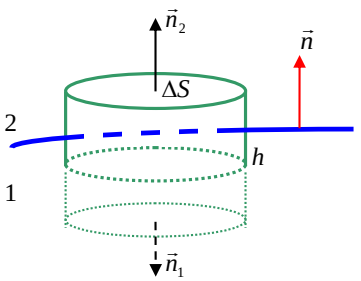


Рис. 2.4.1

Пусть высота цилиндра маленькая, так что $h^2 << \Delta S$. Тогда интеграл в (2.4.1) — поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность — можно представить в виде суммы потоков через основания цилиндра и его боковую поверхность $\Phi_{бок}$:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = E_{2n_2}\Delta S + E_{1n_1}\Delta S + \Phi_{бок};$$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = E_{2n}\Delta S - E_{1n}\Delta S + \Phi_{бок} = 4\pi(\sigma+\sigma')\Delta S. \qquad (2.4.2)$$

Здесь E_{1n} и E_{2n} — нормальные составляющие вектора напряженности электрического поля, а σ' и σ — поверхностные плотности связанных и сторонних зарядов на границе раздела. Разные знаки в потоке вектора E че-

рез верхнее и нижнее основания цилиндра в (2.4.2) объясняются тем, что мы ввели одну общую нормаль $\vec{n}$, направленную из первой среды 1 во вторую 2 (см. рис. 2.4.1). Далее, если устремим $h \to 0$, то при этом $\Phi_{бок} \to 0$. Тогда в этом пределе получаем следующее условие на границе двух диэлектриков:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma'). \qquad (2.4.3)$$

Из (2.4.3) видно, что *нормальная составляющая вектора* $\vec{E}$ *терпит разрыв* на границе двух диэлектриков из-за наличия поверхностных зарядов.

Аналогичным образом можно сосчитать поток векторов $\vec{D}$ и $\vec{P}$ через такую же цилиндрическую поверхность, пользуясь соответствующими теоремами Гаусса (2.3.7) и (2.2.8), и получить следующие граничные условия для их нормальных составляющих:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma; \qquad (2.4.4)$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'. \qquad (2.4.5)$$

Если на границе двух диэлектриков нет сторонних зарядов, т. е. $\sigma = 0$, то нормальная составляющая вектора электрической индукции $\vec{D}$ непрерывна:

$$D_{2n} = D_{1n}, \qquad (2.4.6)$$

а нормальные составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{P}$, по-прежнему, терпят разрыв из-за наличия поляризованных связанных зарядов.

2.4.2. Граничные условия для тангенциальных составляющих

Для определения изменения тангенциальных составляющих векторов поля воспользуемся теоремой о циркуляции: интеграл по замкнутому контуру от скалярного произведения вектора напряженности $\vec{E}$ и вектора элемента контура $d\vec{l}$ равен нулю (см. п. 1.5):

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0. \qquad (2.4.7)$$

Поместим замкнутый контур L вдоль границы раздела двух диэлектриков 1 и 2, как показано на рисунке 2.4.2. Выберем такой малый контур, по длине которого a вдоль границ раздела поле можно будет считать постоянным, а поперечные размеры контура по отношению к длине вдоль границы диэлектриков еще меньше $a >> b$. Тогда циркуляцию вектора напряженности электрического поля по такому контуру можно записать в виде следующей суммы:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = aE_{2t} - aE_{1t} + \langle E_n \rangle b - \langle E_n \rangle b = 0.$$

Далее, устремляя поперечный размер контура к нулю $b \to 0$, из последнего равенства получаем

$$E_{2t} = E_{1t}. \qquad (2.4.8)$$

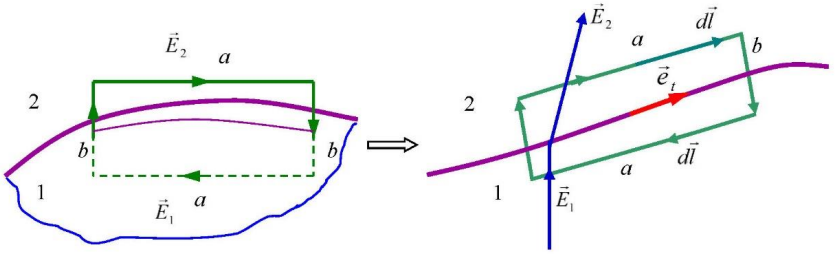


Рис. 2.4.2

Отсюда следует вывод: *тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля непрерывны*, т. е. не меняются при переходе через границу диэлектриков.

Для изотропных диэлектриков с диэлектрической проницаемостью ε получали следующую связь между векторами поля (см. формулы в п. 2.3):

$$\varepsilon\vec{E} = \vec{D} \quad \text{и} \quad \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}. \tag{2.4.9}$$

Тогда из равенства тангенциальных составляющих вектора $\vec{E}$ (2.4.8) следует:

$$\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1}. \tag{2.4.10}$$

Таким образом, тангенциальные составляющие вектора электрической индукции $\vec{D}$ терпят разрыв на границе двух диэлектриков:

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \tag{2.4.11}$$

Для тангенциальных составляющих вектора поляризации $\vec{P}$ имеем также разрыв на границе двух сред:

$$\frac{P_{2t}}{\varepsilon_2 - 1} = \frac{P_{1t}}{\varepsilon_1 - 1};$$

$$\frac{P_{2t}}{P_{1t}} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_1 - 1}. \tag{2.4.12}$$

2.4.3. Закон преломления линий индукции

Пусть на границе двух изотропных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 нет сторонних зарядов: $\sigma = 0$. Тогда, пользуясь формулами (2.4.6), (2.4.8)–(2.4.11), имеем следующие условия на границе двух диэлектриков:

$$\begin{gathered} E_{1\tau} = E_{2\tau}, \qquad \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma' \\ D_{1n} = D_{2n}, \qquad \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \end{gathered} \tag{2.4.13}$$

Исходя из (2.4.13), можно написать закон преломления линий индукции $\vec{D}$ электрического поля (см. рис. 2.4.3):

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{D_{2t}/D_{2n}}{D_{1t}/D_{1n}} = \frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \qquad (2.4.14)$$

Аналогичные законы преломления можно записать для векторов напряженности и поляризации.

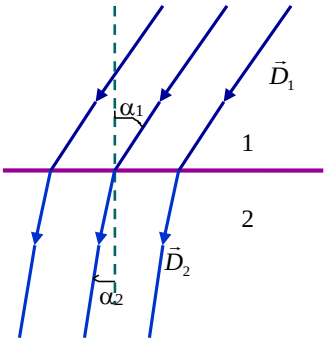


Рис. 2.4.3

2.4.4. Примеры вычисления полей в диэлектриках

1. Рассмотрим точечный заряд, находящийся в однородном и изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε. Выберем поверхность — сферу радиусом r, окружающую заряд q, и запишем теорему Гаусса для вектора электрической индукции (рис. 2.4.4):

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q. \qquad (2.4.15)$$

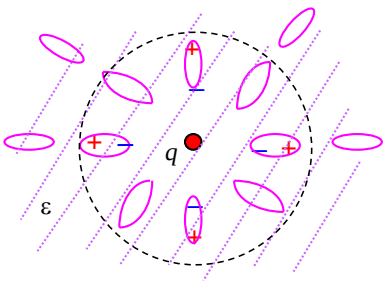


Рис. 2.4.4

Откуда получаем электрическую индукцию и напряженность поля электрического заряда в веществе:

$$\begin{cases} D = \dfrac{q}{r^2} \\ E = \dfrac{q}{\varepsilon r^2} \end{cases}. \qquad (2.4.16)$$

Легко получить, что потенциал поля точечного заряда в диэлектрике равен

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}. \qquad (2.4.17)$$

Можно также записать вектор поляризации:

$$\vec{P} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^3}\vec{r}. \qquad (2.4.18)$$

Интересно при этом отметить, что, несмотря на то, что электрическое поле точечного заряда неоднородное, объемная плотность связанных зарядов в диэлектрике равна нулю, так как

$$div\frac{\vec{r}}{r^3} = 0. \qquad (2.4.19)$$

2. Поместим диэлектрическую пластинку в однородное электрическое поле напряженности $\vec{E}_0$. Пусть вне пластинки вакуум, или воздух, диэлектрическая проницаемость которого равна единице. Для простоты положим, что силовые линии поля перпендикулярны к поверхности пластины. На поверхности пластины появляются связанные заряды, которые создают «противополе» внутри пластины (см. рис. 2.4.5). Из-за перпендикулярности направления поля к поверхности пластины вектор индукции непрерывен во всех трех областях (рис. 2.4.6), а именно:

$$D_1 = D_2 = D_3.$$

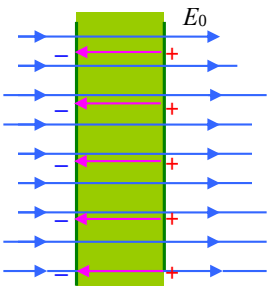


Рис. 2.4.5

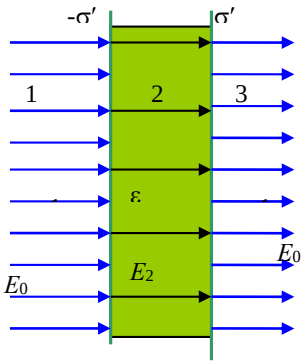


Рис. 2.4.6

Поле вне пластины, например в области 1 на рисунке 2.4.6, совпадает с вектором электрической индукции:

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = E_1 = E_0 . \qquad (2.4.20)$$

То же поле получаем в области 3. Поле внутри пластины меньше поля снаружи (в вакууме) в ε раз:

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon} = \frac{D_1}{\varepsilon} = \frac{E_0}{\varepsilon} . \qquad (2.4.21)$$

Вектор поляризации также перпендикулярен пластинам и, учитывая, что вне пластин поляризация равна $P_1 = P_3 = 0$, получаем из (2.4.5) и (2.4.9) поляризацию внутри диэлектрика:

$$P_2 = -\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E_2 = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} E_0 . \qquad (2.4.22)$$

Вектор поляризации внутри пластины постоянен, поскольку электрическое поле в пластине однородно и в изотропном диэлектрике не появляется объемная плотность связанных зарядов: $\rho' = 0$.

Примечание 14. Если диэлектрическая пластина окружена пластинами плоского конденсатора с плотностью стороннего заряда σ, то поле, создаваемое таким заряженным конденсатором и являющееся внешним для пластинки, равно

$$E_0 = 4\pi\sigma . \qquad (2.4.23)$$

Тогда получаем связь между плотностью сторонних зарядов и плотностью наведенных связанных зарядов:

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma . \qquad (2.4.24)$$

На самом деле соотношение (2.4.24) справедливо для любого вида поверхности, разделяющей сторонние (в металле) и связанные (в диэлектрике) заряды.

3. Диэлектрический шар в однородном электрическом поле. Аналогичным образом можно рассматривать и другие, более сложные по форме диэлектрические тела, помещенные в электрическое поле (например, цилиндр, шар). При определении электрического поля внутри таких тел необходимо пользоваться граничными условиями и условиями на бесконечности.

Рассмотрим шар из диэлектрика с проницаемостью ε в однородном электрическом поле E_0. Условия на границе и теорема о единственности решения приводят к тому, что вектор поляризации постоянен внутри шара, т. е. поле поляризации однородно. Поляризацию шара можно рассматривать как результат смещения положительно заряженного шара относительно отрицательно заряженного (рис. 2.4.7). Полное электрическое поле как внутри, так и вне шара равно сумме внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля $\vec{E}_{int}$, создаваемого поляризованным шаром.

Рассмотрим сначала поле, создаваемое самим поляризованным шаром. Смещение положительно заряженного шара относительно отрицательно заряженного шара на малое расстояние $\delta\vec{l}$ приводит к появлению

дипольного момента $\vec{p} = q\delta\vec{l}$ (см. определение диполя в п. 1.7). Тогда вектор поляризации, рассматриваемый как дипольный момент единицы объема, равен

$$\vec{P} = \frac{q\delta\vec{l}}{V} = \rho\delta\vec{l}\,, \tag{2.4.25}$$

где ρ — объемная плотность заряда одного знака; V — объем шара. Рассмотрим поле внутри шара как сумму полей от отрицательно заряженного шара $\vec{E}_1$ (с плотностью заряда $-\rho$) и положительно заряженного шара $\vec{E}_2$ (с плотностью $+\rho$), смещенных относительно друг друга на малое расстояние $\delta\vec{l}$, т. е. записываем

$$\vec{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\rho\vec{r}_1; \quad \vec{E}_2 = \frac{4\pi}{3}\rho\vec{r}_2\,. \tag{2.4.26}$$

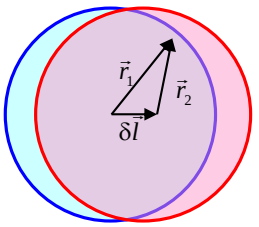


Рис. 2.4.7

Напомним, что эти выражения (2.4.26) для поля равномерно заряженного шара были получены с помощью теоремы Гаусса в главе 1 (см. формулу (1.3.16)). Тогда для электрического поля внутри шара получаем

$$\vec{E}_{внутри} = -\frac{4\pi}{3}\rho\delta\vec{l} = -\frac{4\pi}{3}\vec{P}\,, \tag{2.4.27}$$

где $\delta\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, а дипольный момент записан через вектор поляризации $\vec{P}$ по определению (2.4.25).

Электрическое поле вне поляризованного шара — это поле точечного диполя, помещенного в центре шара, с дипольным моментом

$$\vec{p} = q\delta\vec{l} = \vec{P}V = \frac{4}{3}\pi R^3\vec{P}\,.$$

Таким образом, исходя из (1.7.9), имеем для напряженности поля вне шара следующее выражение:

$$\vec{E}_{вне} = V\left[\frac{3\left(\vec{P},\vec{r}\right)}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{P}}{r^3}\right] \tag{2.4.28}$$

Теперь рассмотрим полное электрическое поле, создаваемое внешним полем $\vec{E}_0$ и полем поляризованного шара. Итак, учитывая, что $\vec{P} = \alpha\vec{E}$ и $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$, полное электрическое поле внутри шара равно:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{внутри} = \vec{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\vec{P} = \vec{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\alpha\vec{E}\,; \tag{2.4.29}$$

$$\vec{E}\left(1+\frac{4\pi\alpha}{3}\right)=\vec{E}_0;$$

$$\vec{E}=\frac{3}{\varepsilon+2}\vec{E}_0. \qquad (2.4.30)$$

Видно из (2.4.30), что электрическое поле внутри диэлектрического шара является однородным полем, оно меньше внешнего поля, так как диэлектрическая проницаемость $\varepsilon > 1$. При этом вектор поляризации равен

$$\vec{P}=\frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\vec{E}_0. \qquad (2.4.31)$$

Полное электрическое поле снаружи диэлектрического шара определяется суммой внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля поляризованного шара $\vec{E}_{вне}$:

$$\vec{E}=\vec{E}_0+V\left[\frac{3\left(\vec{P},\vec{r}\right)}{r^5}\vec{r}-\frac{\vec{P}}{r^3}\right]. \qquad (2.4.32)$$

Примерное поведение силовых линий напряженности электрического поля вблизи диэлектрического шара изображено на рисунке 2.4.8.

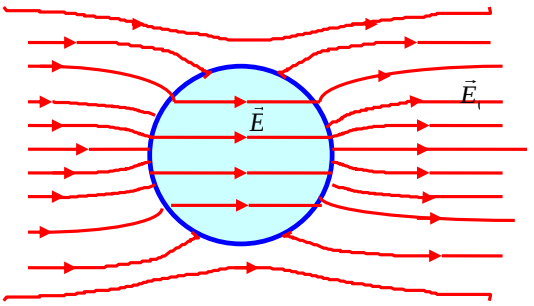


Рис. 2.4.8

Важно отметить, что именно эти полученные электрические поля снаружи (2.4.32) и внутри шара (2.4.30) дают правильные граничные условия:

$$E_{1\tau}=E_{2\tau}, \quad D_{1n}=D_{2n}.$$

Следовательно, в силу теоремы о единственности решения электростатических задач с определенными граничными условиями наши рассуждения оказываются справедливыми.

Примечание 15. Однородно поляризованный диэлектрический шар можно также рассматривать как шар, заряженный с поверхностной плотностью заряда, изменяющейся по закону косинуса:

$$\sigma'=\sigma'_0\cos\theta,$$

где угол θ отсчитывается от направления вектора смещения центров шаров $\delta\vec{l}$.

Примечание 16. Уравнение Пуассона для диэлектриков, определяющее связь между распределением заряда и потенциалом, имеет вид

$$\Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \qquad (2.4.33)$$

2.5. Проводники в электрическом поле

2.5.1. Проводники

Проводниками называются вещества, в которых при включении внешнего поля перемещаются заряды и возникает электрический ток. Наиболее хорошими проводниками электричества являются металлы. Рассмотрим основные особенности проводников.

1. В проводниках имеются свободные заряды, т. е. индукционные заряды разделяются. Для металлов свободными зарядами являются электроны.

2. В равновесии электрическое поле равно нулю $E = 0$ внутри проводника. Если поле не равно нулю в какой-то момент времени, то происходит перераспределение зарядов до создания такой ситуации, когда электрическое поле равно нулю внутри проводника. Отсюда получаем, что $div\vec{E} = 0$ и, следовательно, объемная плотность зарядов внутри однородного проводника равна тоже нулю.

3. Электрический заряд может располагаться только на поверхности проводника, поскольку из-за кулоновских сил отталкивания свободные заряды разбегаются на максимально возможные расстояния.

4. Так как поле внутри проводника $\vec{E} = 0$, то потенциал проводника постоянен: φ = *const* — проводник *эквипотенциален*.

5. Напряженность поля на поверхности направлена перпендикулярно к ней $\vec{E} = \vec{E}_n$. Иначе возникают токи по поверхности до тех пор, пока не ликвидируется тангенциальная составляющая поля. Таким образом, тангенциальная составляющая E_τ внутри и вне проводника равна нулю. Доказательство можно провести, используя теорему о циркуляции для вектора $\vec{E}$ вблизи поверхности проводника по выбранному малому контуру 1–2–3–4, как показано на рисунке 5.1:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0 = \sum_{i=1}^{4} \int_i \vec{E}d\vec{l}\,. \qquad (2.5.1)$$

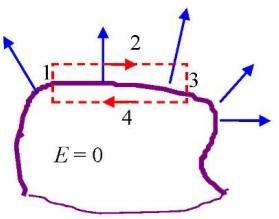


Рис. 2.5.1

Участки контура 1 и 3 можно выбрать произвольными, в том числе и бесконечно малыми по сравнению с участками 2 и 4. Следовательно, интегралы по этим участкам можно положить равными нулю. Нулю также равен интеграл по участку 4, где поле равно нулю, поскольку участок контура проходит внутри металла. И в силу произвольности длины малого ку-

сочка контура 2 получаем, что $E_\tau = 0$ — тангенциальная составляющая снаружи проводника также равна нулю.

6. Рассмотрим поле вблизи поверхности проводника. Выберем цилиндрическую поверхность, охватывающую поверхность проводника (рис. 2.5.2) и вырезающую на поверхности проводника площадку ΔS с плотностью стороннего заряда σ. По теореме Гаусса имеем для потока вектора $\vec{E}$ через выбранную поверхность:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi\sigma\Delta S\,. \qquad (2.5.2)$$

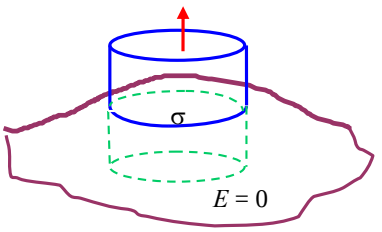


Рис. 2.5.2

Поток вектора E через нижнее основание и боковую поверхность цилиндра равен нулю. Тогда получаем для электрического поля вблизи поверхности проводника следующие выражения:

$$E\Delta S = 4\pi\sigma\Delta S\,;$$

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}\,. \qquad (2.5.3)$$

Поскольку поле внутри проводника равно нулю, то получаем скачок нормальной составляющей напряженности электрического поля при переходе через поверхность проводника.

Примечание 17. В системе СИ напряженность электрического поля вблизи поверхности заряженного проводника равна

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}\,.$$

Скачок нормальной составляющей вектора $\vec{E}$ можно (и полезно) также объяснить другим путем — через суперпозицию двух полей, как показано на рисунке 2.5.3. Полное поле $\vec{E}$ складывается из электрического поля $\vec{E}_0$ маленькой площадки ΔS, которую можно выделить на поверхности проводника, и поля $\vec{E}_{ext}$, возбуждаемого всеми остальными зарядами проводника (см. рис. 2.5.3) на месте выделенной площадки. Поле заряженной площадки (вблизи ее поверхности) равно; $E_0 = 2\pi\sigma$, а внешнее поле $\vec{E}_{ext}$ в «дырке» непрерывно. Тогда в силу суперпозиции электрические поля $\vec{E}_{ext}$ и $\vec{E}_0$ складываются ниже и выше границы «металл — вакуум» и соответственно получаем суммарные поля:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{ext} + 2\pi\sigma\vec{n}_1, \qquad \vec{E}_2 = \vec{E}_{ext} + 2\pi\sigma\vec{n}_2\,. \qquad (2.5.4)$$

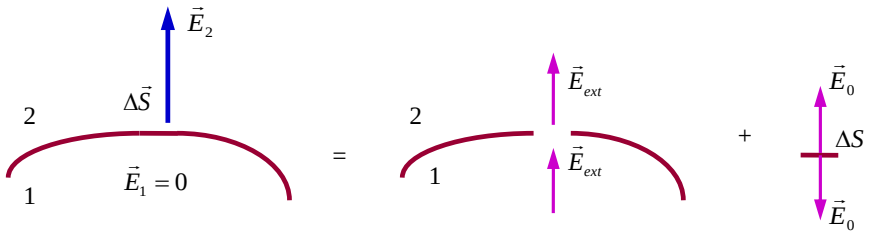


Рис. 2.5.3

Вводя общую нормаль $\vec{n}_2 = \vec{n}$ и $\vec{n}_1 = -\vec{n}$ и вычитая первое уравнение в (2.5.4) из второго, получаем разность напряженностей электрического поля по обе стороны от границы:

$$E_2 - E_1 = 4\pi\sigma\,. \qquad (2.5.5)$$

Это является общим соотношением для нормальных составляющих поля. Поскольку электрическое поле внутри проводника равно нулю: $E_1 = 0$, то снова получаем поле (2.5.3) вблизи поверхности проводника.

2.5.2. Метод электрических изображений

Рассмотрим точечный заряд вблизи плоской металлической поверхности (рис. 2.5.4). Электрическое поле заряда создает на поверхности наведенные заряды противоположного знака. Поверхностную плотность наведенного заряда σ и поле вблизи металлической поверхности можно вычислять двумя способами. Можно непосредственно считать поверхностную плотность заряда, пользуясь граничными условиями на проводящей поверхности. Другой способ состоит в том, чтобы ввести «зеркальное» изображение заряда под металлической поверхностью и находить электрическое поле над поверхностью как сумму полей точечных зарядов — истинного и его изображения (рис. 2.5.4).

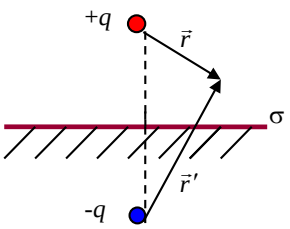


Рис. 2.5.4

Рассмотрим последовательно оба способа. Введем основные параметры, определяющие положение заряда над плоскостью и точек на плоскости *h*, ρ, *r*, показанные на рисунке 2.5.5. Сосчитаем поле вблизи поверхности — над плоскостью и под плоскостью — как сумму полей точечного заряда и заряда, наведенного на поверхности. Очевидно, что знак наведенного заряда противоположен знаку точечного заряда, причем его поверхностная плотность σ =

= –σ(ρ) меняется с расстоянием ρ, отсчитываемым от точки на плоскости, на которую проектируется электрический заряд (рис. 2.5.5).

Суммарное электрическое поле есть сумма напряженности от точечного заряда и напряженности от поверхностной плотности заряда. Как было показано ранее (формула (2.5.1)), продольные (тангенциальные) составляющие равны нулю. При этом нормальные составляющие над металлической поверхностью складываются, а под поверхностью — вычитаются, причем так, что поле под поверхностью равно нулю.

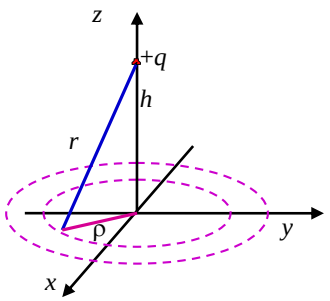


Рис. 2.5.5

Итак, используя (2.5.3) и (2.5.4), имеем над поверхностью для нормальной составляющей поля (рис. 2.5.5) следующее соотношение:

$$-E_z = E_1 = 4\pi\sigma = \frac{q}{r^2}Cos\theta + 2\pi\sigma = \\ = \frac{qh}{r^3} + 2\pi\sigma = \frac{qh}{\left(h^2+\rho^2\right)^{3/2}} + 2\pi\sigma. \tag{2.5.6}$$

Соответственно под поверхностью получаем

$$E_z = E_2 = 0 = \frac{q}{r^2}Cos\theta - 2\pi\sigma = \frac{qh}{\left(h^2+\rho^2\right)^{3/2}} - 2\pi\sigma. \tag{2.5.7}$$

Откуда напряженность поля вблизи поверхности и поверхностная плотность заряда σ для проводника равны соответственно (с учетом знаков):

$$E = 4\pi\sigma(\rho) = -\frac{2qh}{\left(h^2+\rho^2\right)^{3/2}}, \\ \sigma(\rho) = -\frac{qh}{2\pi\left(h^2+\rho^2\right)^{3/2}}. \tag{2.5.8}$$

Если просуммируем весь заряд, наведенный на поверхности, то получим заряд –*q*. В самом деле, интегрируя поверхностную плотность заряда по всей металлической поверхности, получаем

$$q_{ind} = \int_0^\infty \sigma 2\pi\rho d\rho = -2\pi q\frac{h}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{d\left(\rho^2+h^2\right)}{\left(\rho^2+h^2\right)^{3/2}} = qh\left.\frac{1}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\right|_0^\infty = -q. \tag{2.5.9}$$

Оказывается, что такое же поле (2.5.8) над поверхностью можно получить, используя «отраженный» заряд $-q$ вместо рассмотрения поверхностной плотности заряда. Этот заряд имеет противоположный знак и расположен на том же расстоянии h за поверхностью (см. рис. 2.5.6). В самом деле, получаем вблизи поверхности суммарное поле, определяемое формулой (2.5.8):

$$E = 2E_{+} Cos\theta = \frac{2qh}{r^3} = -E_z . \qquad (2.5.10)$$

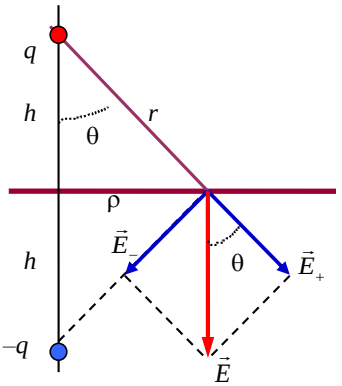


Рис. 2.5.6

Этот метод — метод «изображений» — позволяет найти поле в любой точке выше металлической поверхности, которое определяется как векторная сумма полей от этих двух зарядов (рис. 2.5.4–2.5.6):

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r} - \frac{q}{r'^3}\vec{r}\,', \qquad (2.5.11)$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ — радиус-векторы точки пространства от заряда над плоскостью и его изображением соответственно.

В самом общем случае *метод электрических изображений* — это искусственный метод для расчета взаимодействия проводников с зарядами и другими полями, суть которого состоит в следующем. Пусть имеется система точечных зарядов и пусть S — эквипотенциальная поверхность, разделяющая пространство на два полупространства I и I' (см. рис. 2.5.7). Задание величин зарядов q_1, q_2, q_3, ... и потенциала на поверхности S однозначным образом определяет электрическое поле в полупространстве I. Аналогично можно получить электрическое поле в полупространстве I'.

В математике доказывается теорема о единственности решения уравнения

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

с определенными граничными условиями. Поэтому если сделать поверхность S проводящей, то электрическое поле во всем пространстве не изме-

нится, так как поля в областях I и I' независимы. Тогда поле в полупространстве I можно получать двумя эквивалентными способами:

1) либо как сумму полей, создаваемых зарядами q_i и поверхностью S;

2) либо как сумму полей, создаваемых зарядами q_i и q'_i.

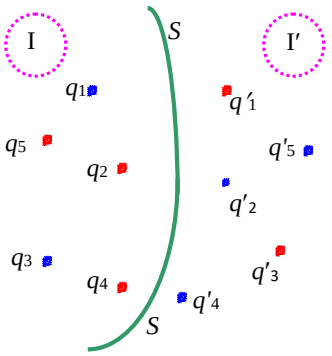


Рис. 2.5.7

При этом совокупность зарядов q'_i является электрическим изображением зарядов q_i в поверхности S. Отсюда следует способ расчета взаимодействия зарядов с проводниками и полей вблизи проводников — метод электрических изображений: заменять взаимодействие зарядов с проводящей поверхностью взаимодействием зарядов q_i с зарядами изображения.

2.5.3. Емкость проводников

Если проводнику сообщаем заряд q, то он распределяется единственным образом так, чтобы поле внутри проводника было равно нулю. Это справедливо, когда проводник уединенный и рассматривается его стационарное (не зависящее от времени) состояние.

Итак, рассматриваем уединенный проводник. Если на него добавим еще заряд Δq, то он распределится аналогичным образом, но только вырастет напряженность поля вблизи поверхности и потенциал проводника. То есть получаем прямую пропорциональность между зарядом на проводнике и его потенциалом:

$$q \sim \varphi, \quad q = C\varphi, \tag{2.5.12}$$

где коэффициент пропорциональности носит название *емкости уединенного проводника C*.

В качестве примера рассмотрим металлический шар радиусом R. Пусть этот шар равномерно заряжен зарядом q, тогда его потенциал определяется:

$$\varphi = \int_R^\infty \frac{q}{r^2}\,dr = \frac{q}{R} \quad \text{или} \quad q = R\varphi. \tag{2.5.13}$$

По определению (2.5.12) емкость проводящего шара равна его радиусу (в системе единиц *СГСЕ*):

$$C = R. \qquad (2.5.14)$$

Единица емкости в системе *СГСЕ*$_C$ (системе Гаусса): [*C*] = 1 см.

Примечание 18. В системе СИ емкость шара $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ и единица емкости 1 Фарада:

$$1\,\text{Ф} = \frac{1\,\text{Кл}}{1\,\text{В}} = \frac{3\cdot 10^9\ \text{СГСЕ}}{1/300\ \text{СГСЕ}} = 9\cdot 10^{11}\ \text{см}.$$

Фарада — очень большая величина, так 1 Ф — это емкость шара радиусом $9\cdot 10^9$ м. В практическом определении емкостей вводят обычно величины: мФ, мкФ, пкФ.

2.5.4. Конденсаторы

Конденсаторы — две металлические обкладки, отделенные слоем диэлектрика (устройства, используемые в электрических цепях для накопления заряда и энергии электрического поля). Обычно в силу конструктивных особенностей считается, что внешние поля не влияют на электрическое поле между обкладками конденсатора, при этом заряды на обкладках равны по величине и противоположны по знаку. В реальном конденсаторе это справедливо приближенно, но часто с достаточно хорошей точностью.

Заряд на одной из обкладок конденсатора связан с разностью потенциалов между обкладками прямо пропорционально. Введем коэффициент пропорциональности — *емкость конденсатора*:

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (2.5.15)$$

Емкость конденсатора *C* характеризует его свойство накапливать и удерживать электрические заряды и во многом зависит от конструкции конденсатора, а именно: от формы и размеров его электродов, их взаимного расположения и свойств диэлектрика, разделяющего электроды. Наиболее распространенные конденсаторы: *плоский*, *цилиндрический* и *сферический*. Рассмотрим простейшие случаи.

1. **Плоский конденсатор**: имеем две параллельные пластинки, между которыми расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 2.5.8). Расстояние между пластинами равно *d*, площадь пластин равна *S*. Напряжение на конденсаторе *U* равно разности потенциалов на его пластинах:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U.$$

Расстояние между пластинами *d* обычно берется малым, поэтому электрическое поле внутри плоского конденсатора рассматривается как однородное, ввиду этого, пользуясь (2.5.3) и пренебрегая изменениями поля на краю конденсатора, получаем

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{q}{S}. \qquad (2.5.16)$$

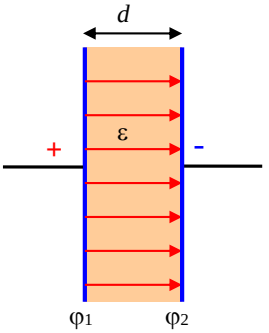


Рис. 2.5.8

Тогда связь между разностью потенциалов и полем равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d = 4\pi \frac{qd}{\varepsilon S}. \qquad (2.5.17)$$

Откуда получаем емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}. \qquad (2.5.18)$$

Видно, что емкость конденсатора увеличивается прямо пропорционально площади пластин S и обратно пропорционально расстоянию между ними d, а также растет с увеличением диэлектрической пронимаемости среды ε между его обкладками.

2. **Сферический конденсатор**: обкладками являются две концентрические сферы, радиусами R_1 и R_2, между которыми расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε (см. рис. 2.5.9). Разность потенциалов между обкладками определяется потенциалами двух сфер, т. е. из соотношения

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \qquad (2.5.19)$$

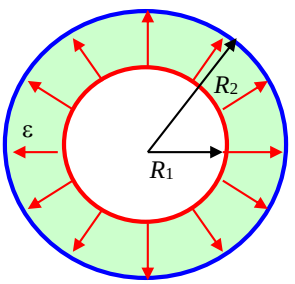


Рис. 2.5.9

Отсюда, пользуясь определением (2.5.15), получаем емкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \qquad (2.5.20)$$

Задача может быть немного усложнена, если диэлектрическая проницаемость диэлектрика есть переменная величина, например зависит от радиуса $\varepsilon = \varepsilon(r)$. В этом случае удобнее по теореме Гаусса найти зависимость индукции и напряженности электрического поля от радиуса внутри конденсатора, а затем сосчитать разность потенциалов между обкладками. Коэффициент пропорциональности между напряжением и зарядом на обкладках конденсатора определяет его емкость.

3. **Цилиндрический конденсатор**: обкладками являются две коаксиальные цилиндрические поверхности радиусами *a* и *b*. Длина цилиндров равна *l*, при этом считаем, что *l* достаточно велико по сравнению с расстоянием между обкладками, чтобы пренебречь краевыми искажениями электрического поля. Между обкладками расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Тогда поле внутри цилиндрического конденсатора (между цилиндрами) легко получить по теореме Гаусса (см. п. 1.3, формула (1.3.11)):

$$E = \frac{2\lambda}{\varepsilon r}, \tag{2.5.21}$$

где r — расстояние, отсчитываемое от оси симметрии; λ — заряд, приходящийся на единицу длины одного из цилиндров. Тогда разность потенциалов равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_a^b E dr = \frac{2\lambda}{\varepsilon} ln\frac{b}{a} = \frac{2q}{\varepsilon l} ln\frac{b}{a}. \tag{2.5.22}$$

Следовательно, емкость цилиндрического конденсатора определяется:

$$C = \frac{\varepsilon l}{2\, ln\left(\frac{b}{a}\right)}. \tag{2.5.23}$$

В случае, когда диэлектрическая проницаемость является переменной с радиусом величиной $\varepsilon = \varepsilon(r)$, необходимо учесть эту зависимость в интеграле (2.5.22) при определении связи между зарядом конденсатора и разностью потенциалов.

Примечание 19. В системе СИ емкости простейших конденсаторов равны:
– емкость плоского конденсатора определяется соотношением

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d;$$

– емкость сферического конденсатора равна

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1};$$

– емкость цилиндрического конденсатора записывается

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln(b/a)}.$$

2.6. Энергия электрического поля

2.6.1. Энергия системы зарядов

Энергию электрического поля мы уже фактически рассматривали ранее, когда вводили понятие потенциала и разности потенциалов. При сближении электрических зарядов одного знака совершается работа против сил кулоновского взаимодействия $-dA$:

$$-dA = dW .$$

Эта работа приводит к тому, что система зарядов обладает потенциальной энергией. Энергию взаимодействия двух одинаковых точечных зарядов мы также получали ранее (см. (1.6.1)–(1.6.2)):

$$W = q\varphi = \frac{q^2}{r},$$

где r — расстояние между этими зарядами.

Для получения системы, состоящей из двух любых зарядов, можно поступать двумя способами (см. рис. 2.6.1):

1) либо приносим заряд 2 из бесконечности (где, как обычно, полагаем потенциал равным нулю) в точку, отстоящую на расстояние r_{12} от первого заряда;

2) либо, наоборот, из бесконечности приносим заряд 1 к заряду 2.

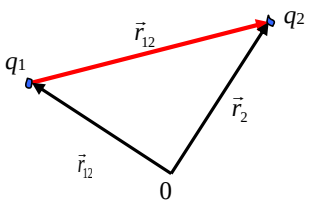


Рис. 2.6.1

При этом совершенные работы и, очевидно, потенциальные энергии будут одинаковы:

$$A_{12} = -q_2\varphi_2 = -\frac{q_1q_2}{r_{12}} = -W_{21};$$
$$A_{21} = -q_1\varphi_1 = -\frac{q_1q_2}{r_{12}} = -W_{12}. \qquad (2.6.1)$$

Здесь φ_1 (φ_2) — потенциал в точке, где находится заряд q_1 (q_2). Итак, получаем, что энергия системы, состоящей из двух точечных зарядов, равна

$$W_{12} = W_{21} = W = \frac{q_1q_2}{r_{12}}. \qquad (2.6.2)$$

Перепишем (2.6.2) в симметричной форме:

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_2}{r_{12}}\right). \qquad (2.6.3)$$

Для получения энергии системы зарядов поступаем таким же образом: переносим из бесконечности один за другим заряды. При этом совершаем работу против электрических сил отталкивания, которая идет на увеличение потенциальной энергии системы. В итоге получаем, что энергия системы N зарядов, изображенная на рисунке 2.6.2, может быть записана в виде, аналогичном (2.6.3):

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{k(\neq i)=1}^{N} \frac{q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,i \\ k\neq i}}^{N} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}, \qquad (2.6.4)$$

где φ_i — потенциал, создаваемый всеми остальными зарядами в точке, где находится i-й заряд, а расстояние $r_{ik} = r_{ki} = \left|\vec{r}_k - \vec{r}_i\right|$ — относительное расстояние между двумя зарядами.

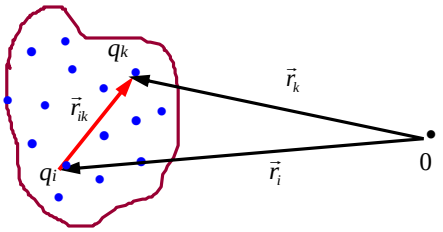


Рис. 2.6.2

В случае непрерывного распределения зарядов эти формулы для определения потенциальной энергии нетрудно обобщить, имея в виду существование как объемных, так и поверхностных зарядов – $dq = \rho dV$, $dq = \sigma dS$:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS. \qquad (2.6.5)$$

Здесь φ — значение потенциала поля всех объемных и поверхностных зарядов в элементе объема dV или на элементе поверхности dS. Интегрирование может идти по нескольким областям. Хотя здесь речь шла только о сторонних (свободных) зарядах dq, формула (2.6.5) справедлива и в присутствии вещества, т. е. при наличии связанных зарядов. Влияние связанных зарядов в веществе на потенциальную энергию проявляется в величине потенциала φ в той точке, где находятся сторонние заряды.

Приведем несколько примеров.

А. Энергия уединенного проводника. Считаем, что вначале потенциал равен нулю $\varphi = 0$, затем на проводник помещаем заряд q. Потенциал проводника исходя из формулы (2.5.12) пропорционален его заряду и равен

$$\varphi = \frac{q}{C},$$

где C — емкость уединенного проводника. Теперь вносим малый заряд dq и сосчитаем работу, потраченную на внесение дополнительного заряда, а затем с помощью интегрирования найдем работу на создание полного заряда на проводнике, т. е. найдем потенциальную энергию проводника:

$$dW = \varphi\, dq = \frac{q}{C} dq, \qquad W = \frac{1}{C}\int_0^{q_0} q dq = \frac{q_0^2}{2C};$$

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} q_0 \varphi = \frac{1}{2} C\varphi^2. \qquad (2.6.6)$$

Получили потенциальную энергию уединенного заряженного проводника, считая, что на бесконечности его потенциал равен нулю.

Б. Энергия конденсатора. Конденсатор запасает электрическую энергию. Для него справедлива та же формула (2.6.6), только перенос заряда осуществляется не из бесконечности, а от одной пластины к другой. Для плоского конденсатора (положим пока в формуле (2.5.15) диэлектрическую постоянную равной единице $\varepsilon = 1$) емкость записывается в виде

$$C = \frac{S}{4\pi d},$$

и тогда энергия плоского конденсатора равна

$$W = \frac{S\varphi^2}{8\pi d} = E^2 \frac{Sd}{8\pi} = E^2 \frac{V}{8\pi}. \qquad (2.6.7)$$

Последнее соотношение очень важно — оно определяет энергию конденсатора не через заряды на нем, как записывается в формулах (2.6.4)–(2.6.6), а через электрическое поле внутри конденсатора. Можно ввести *плотность энергии* w электрического поля внутри конденсатора:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{E^2}{8\pi}. \qquad (2.6.8)$$

Таким образом, энергия конденсатора может быть выражена через заряды или потенциалы на пластинах, а может быть выражена через электрическое поле внутри конденсатора.

2.6.2. Энергия электрического поля

Можно показать также в общем случае, что энергия любой системы зарядов может быть выражена через электрическое поле, создаваемое этой системой.

Заметим, что это очень важное обстоятельство! То, что энергия системы зарядов выражается через сами величины зарядов (формулы (2.6.4) и (2.6.5)), соответствует представлениям *теории дальнодействия*, в которой заряды взаимодействуют на расстоянии друг от друга и пренебрегается пространством между ними. Однако если энергия системы зарядов может быть записана через плотность энергии, сосредоточенной в пространстве, то такое описание соответствует представлениям *теории близкодействия*, в которой заряды создают напряженное состояние в пространстве и это состояние пространства ощущают другие заряды в той точке, где они находятся. В электростатике оба эти описания эквивалентны. Однако современные представления об электромагнитных явлениях, в частности об

электромагнитных волнах, приводят к справедливости теории близкодействия и описанию электромагнитных явлений с помощью понятия электромагнитного поля.

Итак, в электростатике можно показать, что справедливо соотношение

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS = \frac{1}{8\pi}\int_V E^2 dV . \qquad (2.6.9)$$

Здесь интегрирование в правой части (2.6.9) ведется по всему объему, где электрическое поле отлично от нуля. В Примечании 20 доказывается одно важное соотношение для потока произвольного векторного поля $\vec{A}$, которым удобно воспользоваться в электростатике для получения (2.6.9).

Примечание 20. Математическое отступление.

Если имеется векторное поле $\vec{A}$, то можно для него написать теорему Гаусса — Остроградского:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \oint_S A_n dS = \int_V div\vec{A} dV .$$

Пусть ψ_1 и ψ_2 — некоторые скалярные функции, а вектор $\vec{A}$ определяется: $\vec{A} = \Psi_1 \nabla\Psi_2$. Сосчитаем дивергенцию:

$$div\vec{A} = \nabla(\Psi_1\nabla\Psi_2) = \Psi_1\nabla^2\Psi_2 + \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Psi_2 = \Psi_1\Delta\Psi_2 + \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Psi_2 .$$

Обозначим нормальную составляющую вектора

$$A_n = \Psi_1 grad_n \Psi_2 = \Psi_1 \frac{\partial\Psi_2}{\partial n},$$

где n — нормаль к поверхности S (записываем таким образом, чтобы далее было проще разобраться с нормалями). Тогда теорема Гаусса для такого вектора может быть записана в следующей форме:

$$\int_V \left(\Psi_1\nabla^2\Psi_2 + \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Psi_2\right) dV = \oint_S \Psi_1 \frac{\partial\Psi_2}{\partial n} dS . \qquad (2.6.10)$$

Воспользуемся формулой (2.6.10) из математического приложения, положив скалярные функции $\Psi_1 = \Psi_2 = \varphi$ равными потенциалу. Тогда имеем

$$\int_V \left(\varphi\Delta\varphi + \nabla\varphi\nabla\varphi\right) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS . \qquad (2.6.11)$$

Вспомним также уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ (см. п. 1.6, формула (1.6.13)) и то, что градиент потенциала дает напряженность электрического поля:

$$\nabla\varphi = -\vec{E}, \qquad \nabla\varphi\nabla\varphi = E^2 .$$

Подставим их в наше уравнение (2.6.11):

$$-4\pi\int_V \rho\varphi dV + \int E^2 dV = \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS . \qquad (2.6.12)$$

Выберем составную поверхность, выделяя на ней разрывы функции $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$. Это необходимо делать для того, чтобы интеграл в правой части

(2.6.12) имел смысл и не расходился в местах разрыва производной от потенциала.

Пусть S — внешняя поверхность, а S' — поверхность (или поверхности), обходящая заряженные поверхностные слои S_1 (см. рис. 2.6.3). Эти поверхности (их может быть несколько) окружают и изолируют те области, где существует разрыв градиента , $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ или, что то же самое, скачок напряженности электрического поля. Поскольку таких поверхностей может быть несколько, тогда надо ввести сумму интегралов по поверхностям, обходящим заряженные слои. Однако для простоты сейчас ограничимся одной заряженной поверхностью и будем стягивать S' к поверхности S_1, которая заряжена зарядом с поверхностной плотностью σ (см. рис. 2.6.4). Тогда для интеграла по этой дополнительной поверхности получаем

$$\lim_{S'\to S_1}\oint_{S'}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=\int_{S_1}\left[\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1+\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2\right]dS\,, \qquad (2.6.13)$$

где индексы 1 и 2 означают «верхнюю» и «нижнюю» стороны поверхности S_1. Здесь у нас $\vec{n}$ — общая нормаль для поверхности S, которая является «внешней» для области 1 с потенциалом φ_1 и «внутренней» 2 с потенциалом φ_2 (см. рис. 2.6.4). Введем общую внешнюю нормаль $\vec{N}$, тогда градиент $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ в первой области совпадает по знаку с $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1$, а в области 2 имеет противоположный знак с $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2$ из-за разного направления $\vec{n}_2$ и $\vec{N}$. Вспоминая связь градиента потенциала с напряженностью электрического поля $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_i=-E_{iN}$ и граничные условия для вектора напряженности электрического поля, имеем:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_2=E_{2N}-E_{1N}=4\pi\sigma\,.$$

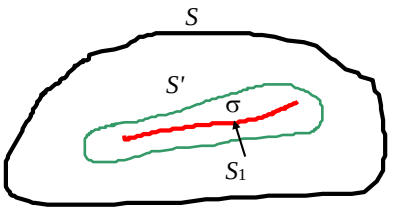


Рис. 2.6.3

Итак, интеграл (2.6.13) по дополнительной поверхности записывается:

$$\lim_{S'\to S_1}\oint_{S'}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=\int_{S_1}4\pi\sigma dS\,. \qquad (2.6.14)$$

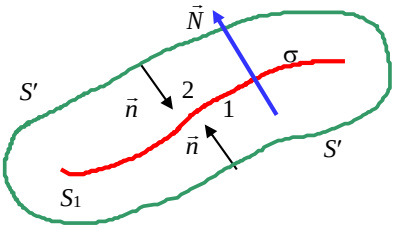


Рис. 2.6.4

Подставляя в (2.6.12), получаем:

$$-4\pi\int_V \rho\varphi dV + \int_V E^2 dV = 4\pi\int_{S_1} \sigma\varphi dS + \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS, \qquad (2.6.15)$$

где интегралы по V проводятся по объему, ограниченному внешней поверхностью S, а в правой части (2.6.15) интеграл берется по внешней поверхности S и интеграл (или интегралы) по поверхности S_1, то есть по поверхностям, имеющим распределенный заряд плотности σ.

Интегралы по наружной поверхности S и объему V распространяем до поверхности, где поле равно нулю: $E = 0$. Если поле распространяется до бесконечности, то и поверхность $S \to \infty$. Интегралы по бесконечной поверхности и бесконечному пространству можно брать только в том случае, если интегралы всех величин по поверхности стремятся к нулю ($\to 0$). Так как поверхность растет с радиусом (расстоянием) $\sim r^2$, то, следовательно, подынтегральное выражение должно убывать быстрее, чем $1/r^2$. Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.6.15) — на бесконечности зарядов нет, поэтому $\varphi \sim 1/r$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r^2}$, тогда $\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r^3}$. Следовательно, либо в пределе на бесконечности имеем, что значение интеграла

$$\lim_{S\to\infty} \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS \to 0,$$

либо этот интеграл равен нулю на некоторой поверхности, где поле заканчивается, и его значение равно нулю.

Далее, будем полагать, что (по определению понятия полного поля) интегралы по поверхности S, ограничивающей полное поле, обращаются в нуль. Получаем окончательно формулу (2.6.9):

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi dV + \frac{1}{2}\int \sigma\varphi dS = \frac{1}{8\pi}\int_V E^2 dV.$$

Таким образом, получили эквивалентность двух определений энергии системы зарядов. Что и требовалось доказать.

2.6.3. Примеры. Собственная энергия заряда

Пример 1. Рассмотрим электрический заряд на маленьком шаре радиусом r_0: сосчитаем его электрическую энергию по двум формулам (2.6.4) и (2.6.9). Запись через работу по перенесению заряда (2.6.4) дает значение энергии, равное нулю:

$$W = \frac{1}{2}\sum q_i \varphi_i = 0, \tag{2.6.16}$$

так как потенциал в точках, где находится шарик, равен нулю (нет других зарядов). Запись через электрическое поле в пространстве дает отличное от нуля значение:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV = \frac{1}{8\pi}\int_{r_0}^{\infty} \frac{q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2r_0} \neq 0. \tag{2.6.17}$$

Итак, эти формулы дают различный результат. Вопрос: в чем разница? Дело в том, что выражения для энергии через электрическое поле (2.6.9) и (2.6.17) учитывают так называемую *собственную энергию заряда*. Если бы мы приписали заряду q в формуле (2.6.16) конечный объем, разбили бы его на элементарные заряды dq и сосчитали бы энергию по формулам (2.6.4)–(2.6.5), то получили бы собственную энергию больше нуля и ее значение в соответствии с формулой (2.6.17).

Собственная энергия — это работа сил взаимного отталкивания более элементарных зарядов, которую они произвели бы, если бы все части заряда разлетелись на бесконечное расстояние.

Пример 2. Рассмотрим полную энергию двух взаимодействующих зарядов q_1 и q_2. Поле, создаваемое зарядом q_1, обозначим через $\vec{E}_1$; поле, создаваемое q_2, — $\vec{E}_2$, при этом полное поле равно $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Тогда энергия определяется:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV = \frac{1}{8\pi}\int E_1^2 dV + \frac{1}{8\pi}\int E_2^2 dV + \frac{1}{4\pi}\int \vec{E}_1\vec{E}_2 dV = W_{11} + W_{22} + W_{12}. \tag{2.6.18}$$

Здесь W_{11} и W_{22} — собственные энергии зарядов q_1 и q_2 соответственно; W_{12} — энергия взаимодействия зарядов:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \vec{E}_1\vec{E}_2 dV = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}}\right) = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \tag{2.6.19}$$

Из того, что $\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)^2 \geq 0$, следует, что:

$$\begin{gathered} E_1^2 + E_2^2 \geq 2\vec{E}_1\vec{E}_2 \\ W_{11} + W_{22} \geq W_{12} \end{gathered} \text{(; и .)} \tag{2.6.20}$$

Положительная собственная энергия зарядов всегда больше или равна взаимной энергии зарядов, которая может быть как положительной, так и отрицательной.

Примечание 21. 1. При перемещениях зарядов, не меняющих размеров и формы зарядов, собственная энергия может рассматриваться как аддитивная добавка к энергии, т. е. при решении задач ее можно не учитывать.

2. Энергия электростатического поля не обладает свойством аддитивности: электрическое поле аддитивно: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, но энергия не аддитивна: $W \neq W_1 + W_2$.

2.6.4. Энергия электрического поля в диэлектриках

Покажем, что энергия электрического поля в диэлектриках выражается через векторы напряженности и индукции:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\left(\vec{E},\vec{D}\right)dV\,, \tag{2.6.21}$$

т. е. плотность энергии электрического поля в диэлектриках равна

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi}\,. \tag{2.6.22}$$

Если нет поверхностных зарядов, тогда векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ непрерывны во всем пространстве и можно вычислять производные от них по пространственным координатам. В том случае, когда имеются поверхностные заряды (например, на поверхности S_1), будем дифференцировать векторы во всем пространстве за исключением части пространства вокруг этих поверхностных зарядов. Воспользуемся следующей формулой векторного анализа (аналогичной той, что была рассмотрена в Примечании 20):

$$div\left(\varphi\vec{D}\right) = \varphi\, div\vec{D} + \vec{D}\, grad\varphi \tag{2.6.23}$$

и вспомним, что $grad\varphi = -\vec{E}$, тогда имеем

$$\left(\vec{E},\vec{D}\right) = \varphi\, div\vec{D} - div\left(\varphi\vec{D}\right), \tag{2.6.24}$$

что и подставим в выражение для энергии (2.6.21):

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int_V div\left(\varphi\vec{D}\right)dV + \frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\, div\vec{D}dV = -\frac{1}{8\pi}\oint_S \varphi\left(\vec{D},d\vec{S}\right) - \frac{1}{8\pi}\oint_{S_1'} \varphi\left(\vec{D},d\vec{S}\right) + \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV\,. \tag{2.6.25}$$

В первом интеграле по объему воспользовались теоремой Гаусса. Интеграл по объему от дивергенции вектора равен сумме потоков этого вектора через наружную поверхность S и через внутреннюю поверхность S'_1 (или сумму внутренних поверхностей), которая окружает слой с поверхностными зарядами. Во втором интеграле по объему воспользовались одним из уравнений системы уравнений Максвелла: $div\vec{D} = 4\pi\rho$.

Проведем интегрирование по всему пространству, когда внешняя поверхность $S \to \infty$, а внутренние поверхности стремятся к слою поверхностных зарядов, т. е. $S'_1 \to S_1$. При конечной системе зарядов интеграл по внешней поверхности стремится к нулю; $\oint\limits_S \to 0$, при $S \to \infty$. Интегралы по внутренним поверхностям в пределе $S'_1 \to S_1$ равны

$$-\frac{1}{8\pi}\oint\limits_{S_1'\to S_1}\varphi\left(\vec{D},d\vec{S}\right)=\frac{1}{8\pi}4\pi\int\limits_{S_1}\sigma\varphi dS=\frac{1}{2}\int\limits_{S_1}\sigma\varphi dS\,. \qquad (2.6.26)$$

Поверхностная плотность заряда внутренних слоев появилась, поскольку в пределе суммирование (интегрирование) производится по двум сторонам слоя, для которых векторы электрической индукции отличаются в силу граничных условий при пересечении заряженной поверхности:

$$D_{2n}-D_{1n}=4\pi\sigma$$

(аналогично тому, как было получено для вектора $\vec{E}$ и показано на рисунках 2.6.3 и 2.6.4). Знак «минус» в выражении (2.6.26) уходит из-за определения общей нормали к поверхностному слою S_1.

Окончательно получаем выражение для энергии электрического поля:

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_V\varphi\rho dV+\frac{1}{2}\int\limits_{S_1}\varphi\sigma dS=\frac{1}{8\pi}\int\limits_V\left(\vec{E},\vec{D}\right)dV. \qquad (2.6.27)$$

Итак, в электростатике и для диэлектриков получаем эквивалентность выражений для энергии, записанных через векторы электрического поля и через распределения зарядов в пространстве.

Следует отметить, что выражение для энергии через распределение сторонних зарядов (левая часть уравнения (2.6.27)) в присутствии диэлектриков имеет тот же вид, что и в вакууме (см. (2.6.9)). Однако вклад связанных зарядов в энергию поля в диэлектриках отражается в изменении потенциалов φ по сравнению с вакуумом.

Итак, общее выражение для плотности энергии электрического поля в диэлектриках имеет вид (2.6.22):

$$w=\frac{dW}{dV}=\frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi}\,.$$

В частности, для однородных и изотропных диэлектриков $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ и плотность энергии электрического поля равна

$$w=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\,. \qquad (2.6.28)$$

Возвращаясь к формулам (2.6.7)–(2.6.8), определяющим энергию конденсатора, видно, что запасаемая энергия может быть увеличена при помещении внутрь конденсатора диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε.

Примечание 22. В системе СИ имеем следующие выражения для плотности энергии поля в диэлектриках: $w=\vec{E}\vec{D}/2$, для однородных диэлектриков: $w=\varepsilon_0\varepsilon E^2/2$.

Примечание 23. Более общее выражение для энергии электрического поля записывается в виде

$$W = \int_V w dV ,$$

где

$$w = \frac{1}{4\pi}\int\left(\vec{E}, d\vec{D}\right) \quad \text{и} \quad dw = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}, d\vec{D}\right). \qquad (2.6.29)$$

Эти выражения учитывают историю появления электрического поля от момента его включения. Эти формулы справедливы не только для обычных диэлектриков, но и для сегнетоэлектриков и других электретов, у которых диэлектрическая постоянная сильно зависит от величины приложенного поля.

2.7. Силы в электрических полях

2.7.1. Пондеромоторные силы

На диэлектрики и проводники, помещенные в электрические поля, действуют силы, так называемые *пондеромоторные силы*. Термин *пондеромоторные силы* устарел, так как исторически он относился к силам, действующим на «весомые» объекты и тела.

Природа пондеромоторных сил известна: это силы, действующие на сторонние и связанные заряды в электрическом поле. Приведем несколько примеров действия таких сил:

1) на поверхности заряженного металлического шара действуют кулоновские силы, которые расталкивают распределенные заряды и пытаются растянуть поверхность;

2) на диэлектрик в конденсаторе действуют силы сжатия, с одной стороны, а с другой — происходит втягивание диэлектрика внутрь конденсатора;

3) к пондеромоторным силам относятся силы, действующие, например, на наведенные диполи в веществе. Ранее в п. 1.7 была получена формула (1.7.15), описывающая силу, действующую на диполь в электрическом поле. Для однородного поля эта сила равна нулю, однако в веществе мы имеем дело с различными, в том числе неоднородными, полями и различными конфигурациями зарядов.

Сила, действующая на какой-либо заряд, определяется, очевидно, напряженностью того поля, в которое помещен этот заряд (а не того поля, которое возбуждается им самим):

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\, grad\varphi . \qquad (2.7.1)$$

Сила, действующая на непрерывно распределенный заряд, записывается аналогично:

$$d\vec{F} = dq \cdot \vec{E} = \vec{E}\rho dV , \qquad (2.7.2)$$

и тогда объемная плотность сил равна

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\vec{E} = -\rho\, grad\varphi . \qquad (2.7.3)$$

Рассмотрим объемные силы, действующие на диэлектрик. Сила, приложенная к элементу объема dV, равна сумме сил, действующих на элементарные диполи внутри dV (согласно (1.7.17)):

$$d\vec{F} = \sum_{dV} \left(\vec{p}_i, \nabla\right)\vec{E}. \qquad (2.7.4)$$

Здесь суммирование ведется по всем элементарным диполям в элементе объемом dV. Так как элемент объема мал, то вектор напряженности электрического поля (медленно меняющаяся величина) можно считать неизменным на протяжении этого элемента объема. Тогда, вводя вектор поляризации, имеем

$$\sum_{dV} \left(\vec{p}_i, \vec{\nabla}\right)\vec{E} = \left(\sum_{dV} \vec{p}_i, \vec{\nabla}\right)\vec{E} = \left(\vec{P}dV, \vec{\nabla}\right)\vec{E} = \left(\vec{P}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}dV. \qquad (2.7.5)$$

Объемная плотность сил в диэлектрике определяется вектором поляризации:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \left(\vec{P}, \nabla\right)\vec{E}. \qquad (2.7.6)$$

Для изотропного диэлектрика имеем простую связь между вектором поляризации и вектором напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = \alpha\vec{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E},$$

тогда объемная плотность сил равна

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left(\vec{E}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}. \qquad (2.7.7)$$

Воспользуемся тождеством из векторной алгебры (1.7.16) из п. 1.7, переписанным для случая, когда $\vec{A} = \vec{B} = \vec{E}$:

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{E}, \vec{E}\right) = \left(\vec{E}, \vec{\nabla}\right)\vec{E} + \left[\vec{E}, rot\vec{E}\right]. \qquad (2.7.8)$$

Поскольку для электростатического поля $rot\vec{E} = 0$, получаем для объемной плотности сил:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\nabla\left(E^2\right) \equiv \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} grad\left(E^2\right). \qquad (2.7.9)$$

Далее, поскольку имеем однородный и изотропный диэлектрик, то можно ввести плотность энергии электрического поля $w = \varepsilon E^2/8\pi$ и вынести диэлектрическую проницаемость из-под оператора градиента:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} gradw. \qquad (2.7.10)$$

Последние формулы для объемной плотности сил справедливы как для абсолютно жестких диэлектриков, так и для сжимаемых диэлектриков.

Последнее справедливо лишь при условии, что их поляризованность (поляризация) линейно зависит от массы, т. е. дипольные моменты молекул и атомов при сжатии и растяжении элемента объема не изменяются.

В случае, когда диэлектрическая проницаемость не постоянна $\varepsilon \neq \neq \text{const}$ и (или) когда имеем дело со сжимаемыми диэлектриками, тогда определение пондеромоторных сил представляет собой довольно сложную задачу. Общий метод вычисления пондеромоторных сил дает термодинамика диэлектриков. В зависимости от условий задачи используются термодинамические функции диэлектриков — свободная энергия, термодинамический потенциал, энтальпия — для определения внутренних сил и напряжений. В данном курсе мы не будем касаться этих вопросов.

2.7.2. Силы, действующие на поверхностные заряды

Ранее мы уже обсуждали, например в п. 2.5, силы, действующие на поверхностные заряды. Если имеется поверхность, заряженная плотностью заряда σ, то электрическое поле известно по обе стороны, причем $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$, а на самой поверхности электрическое поле не определено. Как искать силу, действующую на единицу поверхности?

Рассмотрим уединенный проводник (см. рис. 2.7.1) с поверхностной плотностью заряда σ. Одноименные заряды расталкиваются, поэтому взаимодействие между поверхностными зарядами растягивает поверхность проводника. Рассмотрим элемент поверхности dS:

1) электрическое поле с внешней стороны равно: $\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$, где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали;

2) поле внутри проводника: $E = 0$.

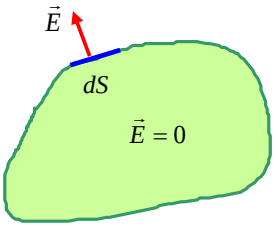


Рис. 2.7.1

Поле внутри и снаружи складывается из поля, создаваемого самим рассматриваемым отрезком dS–E', и из поля всех остальных зарядов E''. Поле E' одинаково по величине по обе стороны от площадки dS, но противоположно по направлению (рис. 2.7.2, а также рис. 2.5.3 в п. 2.5). Поле E'' одинаково чуть выше и чуть ниже площадки dS в силу непрерывности вектора напряженности (когда нет зарядов). Тогда с внешней стороны dS имеем

$$E = E' + E'' = 4\pi\sigma .$$

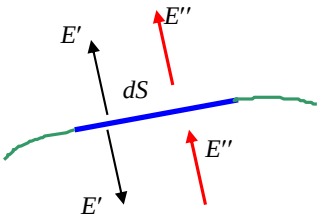


Рис. 2.7.2

С внутренней стороны проводника имеем

$$E = 0 = E' - E''.$$

Из этих соотношений получаем как поле, создаваемое элементом поверхности E', так и поле E'', в котором находится элемент заряженной поверхности dS:

$$E' = E'' = 2\pi\sigma. \qquad (2.7.11)$$

Тогда сила, испытываемая зарядом σdS на элементе поверхности, определяется полем E'' и равна

$$dF = E''\sigma dS = 2\pi\sigma^2 dS = \frac{1}{2}E\sigma dS. \qquad (2.7.12)$$

Пондеромоторная сила, действующая на единицу поверхности, — *поверхностная плотность пондеромоторных сил*:

$$\frac{dF}{dS} \equiv f = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{2}E\sigma = \frac{E^2}{8\pi}. \qquad (2.7.13)$$

Или в векторной форме имеем для поверхностной плотности сил:

$$\vec{f} = 2\pi\sigma^2\vec{n}. \qquad (2.7.14)$$

Фактически, если рассматривать модуль этого выражения, это есть давление, испытываемое поверхностью под влиянием кулоновских сил отталкивания.

2.7.3. Определение пондеромоторных сил из энергии

Один из общих способов определения сил через производную (градиент) от энергии системы:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \equiv -grad\varphi, \qquad \vec{F} = -\nabla W. \qquad (2.7.15)$$

В качестве примера рассмотрим силы, действующие на пластины плоского конденсатора. Энергия плоского конденсатора равна:

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Sd}{8\pi}E^2. \qquad (2.7.16)$$

В этом случае оператор градиента в (2.7.15) сводится к производной энергии по расстоянию между пластинами d. И тогда получаем силу, действующую на пластины конденсатора:

$$F = -\nabla W = -\frac{S}{8\pi}E^2 = -\frac{S}{8\pi}(4\pi\sigma)^2 = -2\pi\sigma^2 S. \qquad (2.7.17)$$

Проявлением пондеромоторных сил объясняются механические напряжения в диэлектрических слоях, подъем или втягивание жидкого диэлектрика в конденсатор и т. п.

2.8. Микроскопическая теория поляризации диэлектриков

Рассмотрим количественно вопрос о поляризации диэлектриков и опишем поляризацию как смещение электронов и атомных ядер под влиянием внешнего электрического поля. Для полярных и неполярных молекул и соответственно полярных и неполярных диэлектриков механизм поляризации различный. Рассмотрим подробнее эти механизмы.

2.8.1. Неполярные диэлектрики

Дипольный момент неполярной молекулы в отсутствие внешнего электрического поля равен нулю: $\vec{p}_0 = 0$. Это справедливо для симметричных молекул, например таких, как: H_2, N_2, CH_4, CO_2, CCl_4. Помещая такую молекулу во внешнее поле, происходит смещение орбит электронов относительно ядер, которое приводит к *наведенному* (индуцированному) дипольному моменту. Поскольку внешние поля, как правило, значительно меньше внутренних полей в атоме, то наведенные дипольные моменты малы. Так, оценивая электрическое поле, создаваемое ядром на боровском радиусе электрона в атоме водорода, получаем

$$E \sim \frac{e}{r^2} \approx \frac{4.8\cdot 10^{-10}\,CGSE_q}{\left(5.3\cdot 10^{-9}\,см\right)^2} \sim 1.7\cdot 10^7\,CGSE_E \approx 5\cdot 10^9\,{}^{В}\!/_{м}.$$

А электрическое поле, при котором происходит пробой в сухом воздухе, порядка $E_0 \sim 10^4$ В/м. При такой напряженности внешнего электрического поля $E \le E_0$ смещение зарядов в молекулах ничтожно, и можно считать, что индуцированный дипольный момент зависит от поля E линейно, что подтверждается экспериментально:

$$\vec{p} = \beta\vec{E}. \qquad (2.8.1)$$

Здесь β — *поляризуемость* молекулы. Для разных молекул поляризуемость β различна, но является константой для данной молекулы. Приведем некоторые примеры.

1. Проводящий шар радиусом a обладает поляризуемостью и дипольным моментом, равными соответственно:

$$\beta = a^3, \qquad \vec{p} = a^3\vec{E}. \qquad (2.8.2)$$

Поляризуемость в системе CGSE измеряется в кубических сантиметрах. Напомним, что в параграфе 2.4 рассматривали поляризацию шара ра-

диусом R, при этом получали дипольный момент $\vec{p}$ и поляризацию $\vec{P}$, а также их связь с полем внутри диэлектрика (формула (2.4.27)):

$$\vec{E}_{внутри} = -4\pi/3 \cdot \rho\delta\vec{l} = -4\pi/3 \cdot \vec{P};$$

$$\vec{p} = q\delta\vec{l} = \vec{P}V = \frac{4}{3}\pi R^3\vec{P} = -R^3\vec{E}_{внутри}.$$

2. Поляризуемость атома водорода равна $\beta = 0.67 \cdot 10^{-24}$ см^3. Эта величина неплохо согласуется с поляризуемостью металлического шара, так как радиус атома водорода: $R_H \approx 10^{-8}\ см$.

Поляризуемости молекул определяются на опыте и вычисляются теоретически в рамках квантовой механики. Однако расчеты для молекул достаточно сложны и громоздки, поэтому они проведены не для всех молекул.

Примечание 24. Если молекула не обладает сферической симметрией, то направления векторов $\vec{p}$ и $\vec{E}$ могут не совпадать.

Пусть имеем макроскопическое тело, состоящее из неполярных сферически симметричных молекул. Вначале рассмотрим достаточно разреженный газ молекул, тогда поле $\vec{E}'$, действующее на каждую молекулу (т. е. поле, создаваемое всеми зарядами и диполями, за исключением рассматриваемой молекулы), в силу разреженности системы примерно совпадает со средним полем внутри диэлектрика $\vec{E}$:

$$\vec{E}' \approx \vec{E}. \tag{2.8.3}$$

Следует отметить, что для плотных сред и тел это не так: $\vec{E}' \neq \vec{E}$, и этот случай рассмотрим ниже.

Учитывая условие (2.8.3), вектор поляризации определяется

$$\vec{P} = n\vec{p} = \alpha\vec{E} = n\beta\vec{E}, \tag{2.8.4}$$

где n — концентрация молекул; α — поляризуемость единицы объема вещества. Соответственно для диэлектрической проницаемости разреженного газа получаем

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n\beta. \tag{2.8.5}$$

Поляризуемость неполярной молекулы β является молекулярной константой, зависящей только от внутреннего строения молекулы, поэтому в газах диэлектрическая проницаемость ε не зависит от температуры T, а является только функцией плотности n газа.

Для плотных диэлектриков теоретическое описание встречает большие трудности. Простейший способ, предложенный Лоренцем, определения действующего поля $\vec{E}'$ состоит в следующем. Будем считать линейные размеры молекул очень малыми, тогда можно пренебречь изменениями *действующего* поля в пределах молекулы, т. е. считать, что поле $\vec{E}'$ относится к центру молекулы. Для нахождения дипольного момента молекулы необходимо поле $\vec{E}$ заменить на действующее поле $\vec{E}'$, т. е.

$$\vec{p} = \beta \vec{E}' . \qquad (2.8.6)$$

Действующее поле для плотных газов и кубических кристаллов примерно равно полю внутри сферы бесконечно малого радиуса, вырезанной внутри диэлектрика. Найдем это поле из достаточно простых представлений: из среднего поля внутри диэлектрика вычтем поле, создаваемое поляризованным шариком или сферой малого радиуса. Так, до удаления сферы поле в равномерно поляризованном диэлектрике однородно и равно средней напряженности макрополя $\vec{E}$. Напряженность поля внутри равномерно поляризованного шара (или сферы) была получена ранее (см. формулу (2.4.27)):

$$\vec{E}_{внутри} = -\tfrac{4}{3}\pi \vec{P} .$$

Тогда после удаления сферы напряженность поля внутри нее $\vec{E}'$ получается вычитанием поля равномерно поляризованной сферы $\vec{E}_{внутри}$ из $\vec{E}$:

$$\vec{E}' \approx \vec{E} - \left(-\frac{4\pi}{3} \vec{P} \right) = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} . \qquad (2.8.7)$$

Так как на диполь действует сила, связанная с $\vec{E}'$, то вектор поляризации из (2.8.6) равен

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\beta \vec{E}' , \qquad (2.8.8)$$

и, подставляя (2.8.7), получаем:

$$\vec{P} = n\beta \left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right) . \qquad (2.8.9)$$

И далее, выражая из (2.8.9) вектор $\vec{P}$, запишем, что вектор поляризации пропорционален полю $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \frac{n\beta}{1 - \frac{4\pi}{3} n\beta} E = \alpha E . \qquad (2.8.10)$$

Отметим, что здесь поляризуемость α определяется не по формуле (2.8.4), которая была справедлива только для случая (2.8.3). Поэтому при преобразовании (2.8.10) воспользуемся определением диэлектрической постоянной $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$, и тогда можно получить следующее соотношение:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} n\beta . \qquad (2.8.11)$$

Это *формула Клаузиуса — Моссотти*. Это соотношение лучше согласуется с опытом, чем (2.8.5), хотя тоже имеет ограниченное применение для жидких и газообразных диэлектриков с неполярными молекулами.

Примечание 25. Рудольф Юлиус Эмануэль Клаузиус (1822–1888), немецкий физик-теоретик; Оттавиано Фабрицио Моссотти (1791–1863), итальянский физик.

2.8.2. Полярные диэлектрики

Полярные молекулы имеют собственные дипольные моменты, величина которых порядка $|\vec{p}_0|$ ~ 10^{-18} CGSE$_p$. Примеры полярных молекул: H_2O, HCl, HBr, CO, спирты, эфиры и т. д.

В настоящем рассмотрении в основном опять ограничимся случаем достаточно разреженных газов, когда действующее поле $\vec{E}'$ можно отождествить со средним полем $\vec{E}$. В первом приближении можно пренебречь наведенными дипольными моментами, поскольку они на несколько порядков меньше $|\vec{p}_{ind}| \sim 10^{-22}$ $CGSE_p$ собственных дипольных моментов $|\vec{p}_0|$ ~ 10^{-18}. Поэтому поляризация диэлектрика главным образом обусловлена поворотами осей дипольных молекул в электрическом поле.

Если внешнего поля нет, то дипольные моменты молекул направлены хаотично и их сумма равна нулю: $\sum_i \vec{p}_i = 0$, и поляризация также отсутствует: $\vec{P} = 0$. Введем функцию распределения по направлениям диполей в пространстве $f(\vec{l})$ (см. рис. 2.8.1):

$$f(\vec{l}) = \frac{1}{n}\frac{dn}{d\Omega}, \tag{2.8.12}$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, а $dn = nf(\vec{l})d\Omega$ — доля числа диполей в 1 объема (концентрации), оси которых лежат в пределах телесного угла $d\Omega$. Здесь вектор $\vec{l}$ указывает направление оси элемента телесного угла, как показано на рисунке 2.8.1.

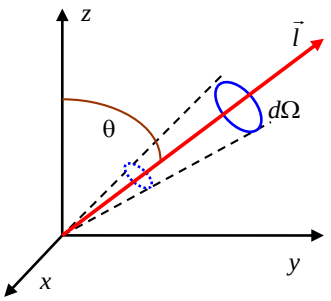


Рис. 2.8.1

Включим поле $\vec{E}$, пусть оно направлено по оси z, тогда $f(\vec{l})$ определяется функцией распределения Больцмана:

$$f(\vec{l}) = C\,exp\left(-\frac{W}{kT}\right), \tag{2.8.13}$$

где W — потенциальная энергия диполя $\vec{p}_0$ во внешнем поле:

$$W = -(\vec{p}_0, \vec{E}) \tag{2.8.14}$$

Рассмотрим случай слабых полей (так обычно и бывает на практике) и не слишком малых температур, при этом выполняется условие

$$\left(\vec{p}_0, \vec{E}\right) = p_0 E \cos\theta << kT, \qquad (2.8.15)$$

где угол θ — угол между направлениеми внешнего поля и дипольного момента молекулы (рис. 8.1). Тогда разлагаем (2.8.13) в ряд по степеням W/kT:

$$C\,exp\left(-\frac{W}{kT}\right) = C\left(1 - \frac{W}{kT} + \frac{1}{2}\left(\frac{W}{kT}\right)^2 - \ldots\right) \approx C\left(1 + \frac{\vec{p}_0\vec{E}}{kT}\right) = C\left(1 + \frac{p_0 E}{kT}\cos\theta\right). \qquad (2.8.16)$$

Постоянную C находим из нормировки функции распределения: $\int f\left(\vec{l}\right)d\Omega = 1$ при интегрировании по всем углам, т. е. из соотношения

$$C \cdot 4\pi + C\frac{p_0 E}{kT}\iint Cos\theta\, Sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 1. \qquad (2.8.17)$$

Интеграл по углу θ равен нулю (физически это ясно, так как проекция l_z принимает одинаково часто положительные и отрицательные значения). Итак, нормировочная постоянная равна

$$C = \frac{1}{4\pi}. \qquad (2.8.18)$$

Тогда для функции распределения (2.8.13) и (2.8.16) получаем:

$$f\left(\vec{l}\right) = \frac{dn}{nd\Omega} = \frac{1}{4\pi}\left(1 + \frac{p_0 E}{kT}Cos\theta\right). \qquad (2.8.19)$$

Очевидно, что вектор поляризации $\vec{P}$ будет параллелен вектору $\vec{E}$. Тогда вклад в вектор поляризации от $dn = nf\left(\vec{l}\right)d\Omega$ диполей, ориентированных под углом θ в телесном угле $d\Omega$, равен

$$\left|d\vec{P}\right| = dn \cdot p_0 Cos\theta = \frac{np_0}{4\pi}\left(1 + \frac{p_0 E}{kT}Cos\theta\right)Cos\theta d\Omega. \qquad (2.8.20)$$

Откуда полную поляризацию определяем интегрированием по всему телесному углу:

$$P = \int_{4\pi} dP = \frac{np_0}{4\pi}\int Cos\theta d\Omega + \frac{np_0^2 E}{4\pi kT}\int Cos^2\theta d\Omega. \qquad (2.8.21)$$

Так как интегралы равны:

$$\int Cos\theta d\Omega = 0 \quad \text{и} \quad \iint Cos^2\theta Sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3},$$

получаем для поляризации следующее выражение:

$$P = \frac{np_0^2}{3kT}E = \alpha E. \qquad (2.8.22)$$

Таким образом, поляризуемость полярных диэлектриков равна

$$\alpha = \frac{np_0^2}{3kT}. \qquad (2.8.23)$$

Важно отметить, что поляризуемость полярных диэлектриков прямо пропорциональна концентрации и обратно пропорциональна температуре. Последнее объясняется тем, что чем выше температура, тем выше кинетическая энергия молекул и тем труднее внешним полям выстроить диполи в одном направлении.

Соответственно диэлектрическая проницаемость определяется следующим соотношением:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + \frac{4\pi np_0^2}{3kT}. \qquad (2.8.24)$$

Полученные результаты справедливы и в квантовой механике, они в принципе справедливы до тех пор, пока справедлива статистика Больцмана.

Примечание 26. В разложении (2.8.16) следующая поправка к диэлектрической проницаемости появляется не во втором порядке, а в третьем порядке по параметру (p_0E/kT), так как появляющиеся интегралы по $d\Omega$ во втором порядке равны нулю.

Если еще, помимо собственного дипольного момента, учесть деформационную поправку к дипольному моменту за счет приложенного внешнего поля, то диэлектрическая проницаемость полярного диэлектрика может быть записана в виде

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n\beta + 4\pi\frac{np_0^2}{3kT}. \qquad (2.8.25)$$

Деформационная часть не зависит от температуры T, а ориентационная часть — обратно пропорциональна температуре ~ $1/T$. При экспериментальном исследовании обычно строят график зависимости величины $(\varepsilon - 1)$ от обратной температуры (см. рис. 2.8.2). По длине отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, определяют поляризуемость молекулы β. По наклону графика определяют собственный дипольный момент p_0 молекулы.

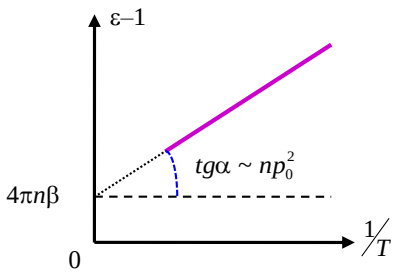


Рис. 2.8.2

В заключение параграфа посмотрим, насколько хорошо при нормальных температурах выполняется условие $(p_0E/kT) << 1$, которое мы использовали для разложения вероятности в ряд. Для этого рассмотрим собственный дипольный момент $p_0 = 10^{-18}$ CGSE$_p$ при $T = 300$ К. Теория, представленная выше, применима при следующем условии:

$$E << \frac{kT}{p_0} \approx \frac{1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 300}{10^{-18}} = 4 \cdot 10^4 CGSE_E \approx 10^7 \, {}^{В}\!/_{см}.$$

Отметим, что последнее значение значительно выше напряженности поля, при которой происходит электрический пробой воздуха. Поэтому при нормальных условиях формулы (2.8.24) и (2.8.25) хорошо описывают электрические свойства полярных и неполярных диэлектриков.

2.9. Пьезо- и сегнетоэлектричество

2.9.1. Пьезоэлектрики

При механическом растяжении и сжатии ряда кристаллов в определенных направлениях возникает поляризация: на поверхности образцов появляются заряды. Это явление имеет название *прямого пьезоэлектрического эффекта*. Его обнаружили братья Пьер и Жак Кюри в 1880 г.

Пьезоэлектрическими свойствами могут обладать только *ионные кристаллы*. Примеры: кварц, турмалин, сегнетова соль, титанат бария, хлорат натрия и другие кристаллы. При воздействии внешних сил кристаллические решетки положительных и отрицательных ионов деформируются поразному и в результате в противоположных местах на поверхности кристалла выступают электрические заряды разных знаков.

Поясним механизм проявления эффекта на примере кварца (SiO_2). На рисунке 2.9.1 представлена упрощенная модель кристаллической ячейки кварца, которая просматривается вдоль оптической оси кристалла. Ионы кремния Si^{+2} изображены большими шариками. Два иона кислорода O^- объединены и показаны одним шариком меньшего размера (более сложная модель, когда ионы кремния расположены по спирали, в силу чего получается «левый» и «правый» кварц, в зависимости от направления спирали). В целом ячейка электрически нейтральна и не имеет электрического дипольного момента.

При сжатии вдоль оси x_1 (перпендикулярно оптической оси, см. рис. 2.9.1 и 2.9.2) появляется дипольный момент, направленный в противоположную сторону направления полярной оси x_1. На верхней плоскости появляется отрицательный заряд, а на нижней плоскости — положительный. Получаем *продольный пьезоэлектрический эффект*.

При сжатии в поперечном направлении, перпендикулярном к оси x_1 и оптической оси, происходит другое смещение ионов. Это приводит к появлению положительных зарядов на верхней плоскости и отрицательных — на нижней (рис. 2.9.3). В этом случае получаем *поперечный пьезоэлектри-*

ческий эффект. Замена сжатия растяжением приводит к изменению знака электрических зарядов на плоскостях.

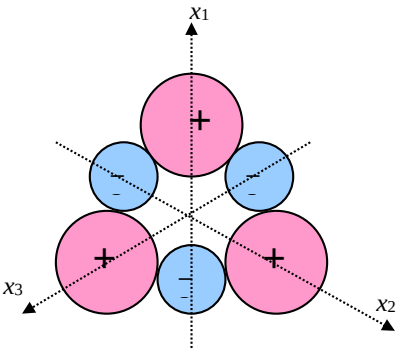


Рис. 2.9.1

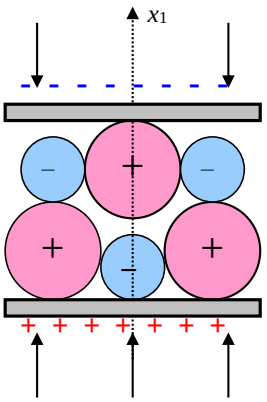


Рис. 2.9.2

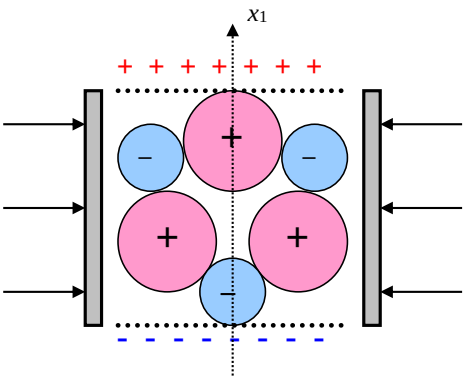


Рис. 2.9.3

В 1881 г. Г. Липпман предсказал существование *обратного пьезоэлектрического эффекта*, а братья Кюри экспериментально подтвердили его. При внесении кристалла в электрическое поле в нем возникают механические напряжения, и кристалл деформируется.

У части пьезоэлектриков решетка положительных ионов смещена относительно решетки отрицательных ионов в состоянии термодинамического равновесия. В результате эти кристаллы при определенных конечных температурах оказываются электрически поляризованными даже в отсутствие электрического поля и механических напряжений. В таких случаях говорят, что возникает *спонтанная поляризация*. Это так называемые *пироэлектрические* кристаллы (*греч.* пир — огонь). Обычно эффект спонтанной поляризации замаскирован свободными поверхностными зарядами, поэтому эффект смещения решеток выявляется при нагревании кристаллов. Иначе говоря, появление электрического поля наблюдается при нагревании кристалла, пока свободные заряды не успевают его компенсировать.

Это явление называется *пироэлектрическим эффектом*, или пироэлектричеством. Наиболее известный пример пироэлектрика — турмалин.

Помимо прямого существует и обратный пироэлектрический эффект, состоящий в том, что изменение электрического поля сопровождается изменением температуры пироэлектрика. Наблюдать этот эффект можно в адиабатическом процессе, когда нет отвода или подвода тепла.

Изменение спонтанной поляризации и появление электрического поля в пироэлектриках может происходить не только при изменении температуры, но и при деформировании. Таким образом, все пироэлектрики являются пьезоэлектриками, однако не все пьезоэлектрики обладают пироэлектрическим эффектом. Ниже определенной температуры — точки Кюри — пироэлектрики являются *сегнетоэлектриками*.

2.9.2. Сегнетоэлектрики

Сегнетоэлекриками называются некоторые диэлектрические кристаллы со *спонтанно поляризованными* областями, т. е. наличие поляризации в отсутствие внешнего электрического поля, в определенной области температур. Таким образом, они являются пироэлектриками в этой области температур, но при этом на границах температурной области они испытывают фазовые превращения, переходя в новые кристаллические модификации. Последние обычно не имеют спонтанной поляризации. Существуют и другие отличия сегнетоэлектриков от пироэлектриков. В частности, направление спонтанной поляризации сегнетоэлектрика может быть изменено на противоположное сравнительно слабым электрическим полем, что не наблюдается в пироэлектриках.

Итак, у сегнетоэлектриков существует как полярная фаза, т. е. кристаллическая модификация, в которой имеется спонтанная поляризация, так и неполярная фаза. Переход из полярной фазы в неполярную происходит при температуре Кюри $T_К$. Наиболее популярные сегнетоэлектрики: сегнетова соль: $NaKC_4H_4O_6{\cdot}4H_2O$, титанат бария: $BaTiO_3$. Последний обладает достаточно высокой температурой Кюри ($T_К$ = 393 К), высокой механической прочностью, большой химической устойчивостью, благодаря чему получил широкое применение.

Диэлектрические свойства сегнетоэлектриков во многих отношениях аналогичны магнитным свойствам ферромагнетиков, в связи с этим их часто называют ферроэлектриками. В сегнетоэлектриках имеются области спонтанной поляризации — *доменная* структура. Области спонтанной поляризации — домены — образуются исходя из минимума свободной энергии. Это также следует из общих принципов термодинамического равновесия.

Полная энергия кристалла сегнетоэлектрика складывается из трех частей:

1) суммы внутренних энергий всех доменов;
2) энергии внешнего электрического поля;
3) поверхностной энергии на границах раздела доменов.

Равновесное состояние при данной температуре достигается, когда полная энергия достигает минимума. В соседних доменах направление вектора спонтанной поляризации различно, а величина — одинакова. В сегнетоэлектриках домены имеют размеры 10^{-5}–10^{-3} см, а переходная область между ними (доменная граница, или стенка) имеет ширину ~ 10^{-7} см.

В неполярной фазе сегнетоэлектрик ведет себя как обычный линейный диэлектрик, в котором поляризация пропорциональна электрическому полю.

При переходе в полярную фазу диэлектрическая проницаемость для сегнетоэлектриков аномально велика и достигает ε ~ 6000–7000 для титаната бария, ε ~ 10 000 в максимуме для сегнетовой соли. При наложении внешнего поля диэлектрическая проницаемость и поляризуемость меняются, они также изменяется с температурой. Вблизи точки Кюри имеет место закон Кюри — Вейсса:

$$\alpha = \frac{C}{T - T_0}, \qquad (2.9.1)$$

где C — постоянная; T_0 — температура Кюри — Вейсса (мало отличается от температуры Кюри).

При наложении внешнего электрического поля происходит частичная переориентация доменов, а также рост одних доменов за счет других. Это приводит к появлению поляризации $\vec{P}$ в кристалле. При изменении внешнего поля возникает явление *диэлектрического гистерезиса* (см. рис. 2.9.4). Петля гистерезиса наблюдается в зависимости поляризации P от внешнего поля E: $P = P(E)$. При снятии внешнего поля остается поляризация сегнетоэлектрика, отличная от нуля.

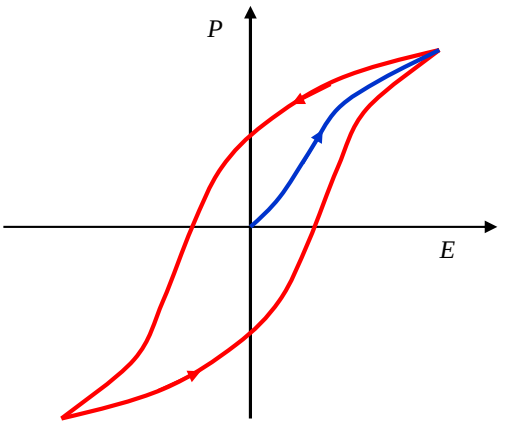


Рис. 2.9.4

Аналогичные петли гистерезиса получаются, если рассматривать зависимость вектора электрической индукции от напряженности электрического поля $D = D(E)$.

Примечание 27. Пьер Кюри (1859–1906), французский физик, Нобелевская премия (1903) за исследования радиактивности и открытие радия;

Жак Кюри (1856–1941), французский минералог;

Габриэль Липпман (1845–1921), французский физик, Нобелевская премия (1908) за цветную фотографию солнечного спектра;

Пьер Эрнест Вейсс (1865–1940), французский физик.

ГЛАВА 3.
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

3.1. Уравнение непрерывности. Время релаксации

3.1.1. Ток и плотность тока. Опытные законы

Электрический ток — упорядоченное движение электрических зарядов. Носителями тока являются свободные заряды — электроны, ионы. В металлах носителями тока являются электроны. Экспериментальное доказательство электронной проводимости металлов — опыты Т. Стюарта и Р. Толмена (1916). В растворах (жидких электролитах) носителями тока становятся положительные и отрицательные ионы.

Рассмотрим упорядоченное движение зарядов (пусть e — заряд электрона) со средней (часто называемой дрейфовой) скоростью u, тогда через площадку dS (см. рис. 3.1.1) за время dt пройдет заряд dq:

$$dq = neu \cdot dS \cdot dt\,, \qquad (3.1.1)$$

где n — концентрация носителей.

Введем понятие вектора *плотности тока* $\vec{j}$ как заряда, проходящего через единичную поперечную площадку в единицу времени (рис. 3.1.1)

$$j = \frac{dq}{dS \cdot dt}\,;$$

$$\vec{j} = ne\vec{u}\,. \qquad (3.1.2)$$

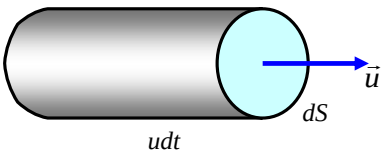


Рис. 3.1.1

Если введем вектор площадки $d\vec{S}$, то заряд, проходящий в единицу времени через площадку dS и определяющий элементарный вклад в электрический ток dI, записывается в виде (см. рис. 3.1.2):

$$dI = \frac{dq}{dt} = \vec{j}d\vec{S}\,. \qquad (3.1.3)$$

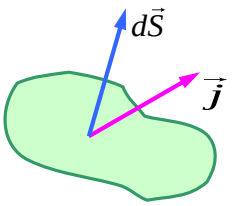


Рис. 3.1.2

Полный ток через проводник сечением S равен

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \qquad (3.1.3а)$$

Подчеркнем, что ток I — это скалярная величина, в то время как плотность тока $\vec{j}$ — векторная.

Основные опытные законы для тока в электрической цепи: *закон Ома* и *закон Джоуля — Ленца*.

1. Закон Ома для участка цепи. Сила тока пропорциональна приложенному напряжению (разности потенциалов):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = I \sim U, \quad I = \frac{U}{R}. \qquad (3.1.4)$$

Здесь I и U — ток и падение напряжения на участке цепи; R — коэффициент пропорциональности, или *сопротивление участка цепи*.

<u>О единицах измерения силы тока</u>.

Единица силы тока в системе CGSE:

$$1\ \mathrm{CGSE}_I = 1\ \mathrm{CGSE}_q \cdot c^{-1}.$$

Разность потенциалов и сопротивление измеряются в единицах $1\ \mathrm{CGSE}_\varphi = 1\ \mathrm{CGSE}_q$/см и $1\ \mathrm{CGSE}_R$ соответственно.

В системе СИ сила тока измеряется в *амперах*. Ампер — сила тока, соответствующая переносу заряда в один кулон за одну секунду, что эквивалентно переносу $6.2 \cdot 10^{18}$ электронов в секунду. Связь между единицами тока в системах *CGSE* и *СИ* такая же, как между единицами заряда:

$$1\ \mathrm{A} = 3 \cdot 10^9\ CGSE_I.$$

Формальное определение единицы тока в системе СИ: ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным и прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Сопротивление в системе СИ измеряется в омах — Ом. Подробнее о единицах электромагнитных величин см. в п. 3.2 и 3.5.

Закон Ома (3.1.4) можно переписать в дифференциальной форме, вспоминая, что сопротивление участка цепи прямо пропорционально длине проводника и обратно пропорционально величине его поперечного сечения. Тогда сопротивление малого участка проводника, вводя коэффициент пропорциональности — *удельное сопротивление* ρ_R, можно записать следующим образом:

$$R = \rho_R \frac{dl}{dS}, \qquad (3.1.5)$$

где dl и dS — длина и поперечное сечение малого участка провода. Удельное сопротивление определяется свойствами проводника, зависит от температуры и в данном случае служит коэффициентом пропорциональности.

Учитывая (3.1.5) и считая, что электрическое поле однородно на участке длиной dl, закон Ома перепишется в следующем виде:

$$dI = \frac{dU}{R} = \frac{Edl}{\rho_R \dfrac{dl}{dS}} = \frac{E}{\rho_R} dS, \qquad (3.1.6)$$

где E — напряженность электрического поля. Далее, записывая (3.1.6) через плотность тока, имеем

$$j = \frac{dq}{dtdS} = \frac{dI}{dS} = \frac{E}{\rho_R} = \sigma_R E. \qquad (3.1.7)$$

Окончательно получаем *закон Ома в векторной дифференциальной форме*:

$$\vec{j} = \sigma_R \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho_R}. \qquad (3.1.8)$$

Здесь введена *удельная проводимость проводника:*

$$\sigma_R = \frac{1}{\rho_R}.$$

В системе CGSE удельная проводимость измеряется в обратных секундах 1 CGSE_σ = 1 с^{-1}, соответственно удельное сопротивление — в секундах. В системе СИ удельная электропроводность измеряется в сименсах на метр длины (См/м) или в $\text{Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$. Учитывая связи между единицами тока и напряженности электрического поля $[E]$ = 1 CGSE_E = $3\cdot10^4$ В/м, соотношение между единицами проводимости равно

$$1\ \text{CGSE}_\sigma = 1\ \text{с}^{-1} = 1/(9\cdot10^9)\ \text{См/м} = 1.11265\cdot10^{-10}\ \text{См/м}.$$

Величина удельного сопротивления металлов, являющихся хорошими проводниками, может иметь значения порядка 10^{-8}–10^{-6} Ом·м (например, медь, серебро, железо и т. д.). Для анизотропных проводников удельное сопротивление является тензором второго ранга.

Поскольку плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля $\vec{E}$ и направлена вдоль его силовых линий, то можно ввести также понятие силовых линий плотности тока — поле токов $\vec{j}$.

2. Закон Джоуля — Ленца. Энергия (тепло) W, выделяемая на участке цепи за время t или dt, определяется произведением силы тока, напряжения и времени:

$$W = IUt = I^2Rt; \qquad dW = IUdt = I^2Rdt. \qquad (3.1.9)$$

Вводя выделяемую мощность

$$\frac{dW}{dt} = IU = j\cdot\Delta S\cdot E\cdot\Delta l = jE\cdot\Delta V,$$

получаем *закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме*:

$$\frac{dW}{dt\Delta V} = \frac{dw}{dt} = jE = \rho_R j^2 = \frac{j^2}{\sigma_R}\ , \qquad (3.1.10)$$

где ΔV — объем проводника; w — плотность выделяемой энергии.

Примечание 28. Георг Симон Ом (1787–1854), немецкий физик;
Джеймс Прескотт Джоуль (1818–1889), английский физик;
Эмилий Христианович Ленц (1804–1865), русский физик.

3.1.2. Закон сохранения электрического заряда

Закон сохранения электрического заряда — это фундаментальный закон, являющийся обобщением опытных фактов. Пусть произвольная замкнутая поверхность S, представленная на рисунке 3.1.3, ограничивает некоторый объем V. Тогда количество электричества, протекающего через всю поверхность S в единицу времени, равно

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = \oint j_n dS = -\frac{\partial q}{\partial t}. \qquad (3.1.11)$$

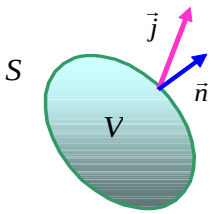


Рис. 3.1.3

Знак «минус» перед зарядом показывает, что происходит уменьшение полного заряда внутри объема V. Далее, записывая заряд в объеме через плотность заряда и воспользовавшись теоремой Гаусса, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\int_V div\vec{j} dV\ . \qquad (3.1.12)$$

Поскольку это уравнение записано для произвольного объема, то равенство справедливо и для подынтегральных выражений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\vec{j}\ ;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0\,. \qquad (3.1.13)$$

Это и есть *уравнение непрерывности*, или *уравнение неразрывности*, выражающее в дифференциальной форме *закон сохранения заряда*. Итак, изменение заряда в единицу времени в объеме равно потоку заряда через поверхность, окружающую этот объем. Или в применении к дифференциальной форме записи можно сказать, что изменение плотности заряда в

данной точке (элементе объема) приводит к «рождению» линий тока из этой точки.

Если токи стационарны (постоянны во времени), тогда $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ и из (3.1.13) получаем $div\vec{j}=0$ или $\oint\vec{j}d\vec{S}=0$. Если поток вектора $\vec{j}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю, то это означает, что силовые линии плотности тока замкнуты, т. е. не имеют источников.

3.1.3. Максвелловское время релаксации

Ранее, мы говорили об отсутствии в проводнике объемных зарядов в равновесном состоянии, поскольку при появлении объемного заряда в проводниках возникает ток, который идет до тех пор, пока заряд в объеме не исчезнет. Если имеем уединенный проводник, то весь сообщаемый ему заряд располагается на поверхности. Равновесное состояние возникает тогда, когда электрическое поле и объемный заряд внутри проводника равны нулю.

Установление равновесного состояния в проводниках происходит очень быстро. Рассмотрим изменение величины объемного заряда во времени. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ создана некоторая объемная плотность стороннего заряда $\rho(0) \neq 0$. Воспользуемся законом сохранения заряда (3.1.13) и законом Ома в дифференциальной форме (3.1.8):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\vec{j}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\sigma_R\vec{E}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sigma_R\,div\,\vec{E}=0\,, \qquad (3.1.14)$$

где воспользовались тем, что для однородного проводника проводимость постоянна: $\sigma_R = const$. Вспоминая, что

$$div\vec{E}=4\pi\rho\,,$$

получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-4\pi\sigma_R\rho\,. \qquad (3.1.15)$$

Решением этого уравнения является следующая экспоненциальная функция:

$$\rho(t)=\rho(0)exp\left(-4\pi\sigma_R t\right)=\rho(0)exp\left(-\frac{4\pi}{\rho_R}t\right). \qquad (3.1.16)$$

Таким образом, плотность заряда, созданного каким-либо образом внутри проводника, со временем падает по экспоненциальному закону. Характерное время — *время релаксации* (*максвелловское*) — определяется моментом времени, когда плотность заряда падает в *e* раз:

$$\tau=\frac{1}{4\pi\sigma_R}. \qquad (3.1.17)$$

В проводящих средах время релаксации составляет $\sim 10^{-14}\,c$. Эта величина на несколько порядков больше, чем время, получаемое из уравнения

(3.1.17) $\sim 10^{-17} \div 10^{-19} c$, поскольку последняя оценка пренебрегает инерционностью разбегающихся зарядов.

Примечание 29. Если среда характеризуется диэлектрической проницаемостью ε, то время релаксации умножается на эту величину. В системе СИ (3.1.17) имеет вид: $\tau = \varepsilon_0 \varepsilon / \sigma_R$.

3.1.4. Опыты Стюарта и Толмена

Предположение о том, что в металлах носителями тока являются свободные, т. е. сравнительно слабо связанные с ионами кристаллической решетки, электроны, было проверено экспериментально. Если бы в переносе электрического заряда в металлах участвовали ионы, то электрический ток сопровождался бы электролизом и связанным с ним переносом вещества. Карл Рикке в течение года пропускал электрический ток через поставленные друг на друга медный, алюминиевый и снова медный цилиндры. Общий заряд, прошедший через эту систему, составил 3,5 млн *кулонов*, однако никакого проникновения металлов друг в друга обнаружено не было, и вес цилиндров сохранился с точностью до $\pm 0{,}03$ мг. Еще более определенное заключение о природе носителей тока в металлах позволяют сделать опыты с возбуждением электрического тока с помощью сил инерции.

Идея опытов Ричарда Толмена и Томаса Стюарта (1916) состояла в следующем: разогнать кусок металла, концы которого соединены с гальванометром, до большой скорости v_0 и потом быстро затормозить.

При торможении свободные носители заряда испытывают «ускорение»

$$a = -dv/dt.$$

Торможение свободных носителей происходит за счет электрического поля неподвижных зарядов. При этом эффективное электрическое поле, действующее на заряд *e*, равно

$$E = \frac{F}{e} = -\frac{m}{e}\frac{dv}{dt}. \qquad (3.1.18)$$

Свободные заряды останавливаются не мгновенно, а проходят некоторое расстояние, т. е. возникает некоторый ток. Плотность появляющегося тока получаем из закона Ома (3.1.8):

$$j = \frac{E}{\rho_R} = -\frac{m}{e\rho_R}\frac{dv}{dt}. \qquad (3.1.19)$$

Тогда полное количество электричества, которое пройдет через гальванометр, определяется зарядом, смещенным за все время торможения через поперечное сечение *S*, т. е. равно

$$Q = S\int_{v_0}^{0}\left(-\frac{m}{e}\right)\frac{1}{\rho_R}\frac{dv}{dt}dt = \frac{m}{e}\frac{v_0 S}{\rho_R}. \qquad (3.1.20)$$

Реально в опытах Стюарта и Томсона использовались катушки из металлической (медной, алюминиевой и серебряной) проволоки длиной до 500 м, которые приводились в быстрое вращение вокруг своей оси (линейная скорость достигала v_0 = 300 м/с). Концы проволочной обмотки были соединены с очень чувствительным баллистическим гальванометром длинными гибкими проводами, скручивающимися во время вращения катушки. При помощи специальных неподвижных катушек с электрическим током магнитное поле Земли было настолько тщательно скомпенсировано, так что во вращающейся катушке при её равномерном движении гальванометр не обнаруживал никаких индукционных токов. Убедившись в этом, экспериментаторы быстро тормозили вращение катушки, тогда гальванометр тотчас же отклонялся. Количество электричества, протекшего через гальванометр, описывается уравнением

$$q = \frac{mlv}{eR}, \tag{3.1.21}$$

где l — длина проволоки в катушке; v — линейная скорость вращения; R — общее сопротивление цепи. Направление отклонения гальванометра показало, что носителями тока в металлах являются отрицательные заряды. Удельный заряд $\frac{m}{e}$ в пределах ошибок измерений оказался таким же, как и у электронов в опытах с катодными лучами. Это указало на то, что носителями тока в проводниках являются электроны.

Примечание 30. Карл Виктор Рикке (1845–1915), немецкий физик;
Ричард Чейз Толмен (Richard Chace Tolman) (1881–1948), американский физик-математик и физикохимик;
Томас Д. Стюарт (1890–1958), американский физик.

3.2. Классическая электронная теория проводимости

Можно ли понять экспериментальные закономерности электрического тока исходя из известных классических представлений о движении зарядов и структуре вещества? В этом параграфе мы рассмотрим простую микроскопическую модель, позволяющую объяснить опытные законы для тока в электрической цепи — *законы Ома* и *Джоуля — Ленца*.

3.2.1. Модель проводника. Закон Ома

Рассмотрим следующую модель *металла* (или проводника): в объеме, созданном положительными ионами (ионной решеткой), находятся электроны, которые можно считать слабо связанными с ионами, — так называемые свободные электроны. В отсутствие внешнего электрического поля свободные электроны движутся хаотически со средней кинетической (тепловой) энергией:

$$\frac{m\langle v^2\rangle}{2}=\frac{3}{2}kT\,.$$

Из этого равенства нетрудно оценить среднюю квадратичную скорость этих электронов при нормальной температуре (T = 300 К):

$$\sqrt{\langle v^2\rangle}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3\cdot 1.38\cdot 10^{-16}\cdot 300}{9\cdot 10^{-28}}}\approx\sqrt{\frac{10^{-14}}{10^{-28}}}\approx 10^7\frac{cm}{c}\approx 100\frac{km}{c}. \qquad (3.2.1)$$

Включаем внешнее электрическое поле, тогда на электрон действует сила

$$\vec{F}=-e\vec{E}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\,. \qquad (3.2.2)$$

Под действием этой силы у электронов начинается упорядоченное движение. Движение электрона в действительности оказывается очень сложным (рис. 3.2.1), так как упорядоченное движение электронов под влиянием внешнего поля накладывается на хаотическое. При этом взаимодействие электрона с решеткой (столкновение с ионами решетки) играет важную роль. Полная скорость движения вдоль выбранного направления поля по оси x равна сумме хаотической скорости v_x и скорости упорядоченного движения u, называемой *скоростью дрейфа*:

$$v=v_x+u\,. \qquad (3.2.3)$$

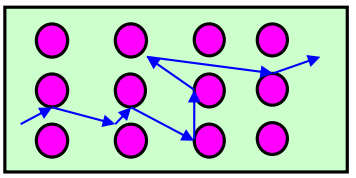


Рис. 3.2.1

Более точно нужно рассматривать уравнение движения вдоль оси x — уравнение Ньютона:

$$F_0-eE=m\frac{d}{dt}(v_x+u). \qquad (3.2.4)$$

Здесь F_0 — проекция на ось x суммарной силы, действующей на электрон со стороны ионов и других электронов, определяющая, в частности, столкновения с ними. Обычно скорость дрейфа значительно меньше скорости теплового движения $u \ll v_x$. Если усреднить уравнение (3.2.4) по всем электронам, то средняя проекция хаотической скорости равна нулю:

$$\left\langle\frac{dv_x}{dt}\right\rangle=0,$$

при этом появится также средняя сила взаимодействия электронов с ионами $\langle F_0\rangle$, которая «отбирает» энергию у электронов, приобретенную в электрическом поле.

Нас интересует только упорядоченное движение зарядов — *ток*, поэтому сложную картину передачи энергии от электронов ионам (воздействие силы $\langle F_0 \rangle$) заменим более простой. Итак, рассматриваем следующую модель.

Электрон ускоряется под влиянием электрического поля в течение времени τ, приобретает скорость упорядоченного движения $u_{\max}$, затем сталкивается с атомом (ионом) решетки и передает ему всю приобретенную энергию, полученную от ускоряющего поля. А затем вновь разгоняется до скорости $u_{\max}$, сталкивается с новым ионом и т. д. Если построить график зависимости *дрейфовой скорости u* от времени, то получим пилообразную кривую (рис. 3.2.2). Для такой модели имеются веские основания, поскольку электрон обладает скоростью теплового движения (в соответствии с распределением Максвелла), существенно большей $u_{\max}$, и после очередного столкновения он просто «забывает» об упорядоченном движении.

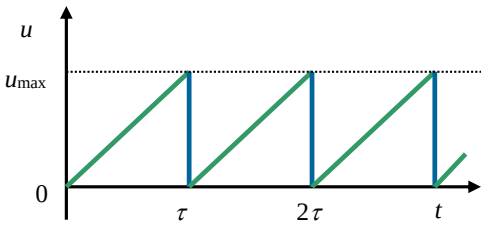


Рис. 3.2.2

На рисунке 3.2.2 временной интервал τ — *время релаксации* неравновесного распределения электронов (заряда) к тепловому равновесию с кристаллической решеткой, оно характеризует скорость возвращения к этому равновесию. С другой стороны, τ имеет смысл среднего времени между столкновениями, т. е. времени свободного пробега:

$$\tau = \frac{\langle l \rangle}{\langle v \rangle},$$

где $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега, а $\langle v \rangle$ — средняя скорость беспорядочного (теплового) движения. При этом частота столкновений определяется величиной, обратной времени между столкновениями τ^{-1}. Таким образом, действие силы $\langle F_0 \rangle$ сводится к «сбрасыванию» приобретенной скорости *u* через каждые τ с. А в течение τ с упорядоченное движение определяется только силой электрического поля *eE*, т. е. электрон движется с постоянным ускорением $a = eE/m$.

Тогда средний путь, проходимый электроном от одного столкновения до последующего столкновения, равен

$$S = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{eE}{2m}\tau^2. \qquad (3.2.5)$$

Средняя скорость дрейфа равна

$$u = \frac{S}{\tau} = \frac{eE}{2m}\tau = \frac{eE\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle}. \qquad (3.2.6)$$

Скорость упорядоченного движения u обратно пропорциональна частоте соударений:

$$\frac{\langle v\rangle}{\langle l\rangle} = \frac{1}{\tau},$$

т. е. уменьшается с ростом температуры. Итак, используя (3.2.6) и формулы для определения плотности тока (3.1.2), получаем для плотности тока следующее выражение:

$$\vec{j} = ne\vec{u} = \frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle}\vec{E} = \sigma_R\vec{E}. \qquad (3.2.7)$$

Таким образом, получили закон Ома в дифференциальной форме. Из (3.2.7) проводимость определяется из следующей формулы:

$$\sigma_R = \frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle}. \qquad (3.2.8)$$

Итак, *классическая проводимость* прямо пропорциональна плотности носителей заряда, квадрату величины заряда и обратно пропорциональна квадратному корню из температуры: $\sigma_R \sim n, e^2, T^{-1/2}$.

Часто вводится понятие *подвижности носителей* заряда как отношение скорости дрейфа к напряженности электрического поля:

$$\mu = \frac{\langle u\rangle}{E}. \qquad (3.2.9)$$

При этом получаем связь между подвижностью и проводимостью:

$$\vec{j} = en\langle\vec{u}\rangle = en\mu\vec{E} = \sigma_R\vec{E};$$

$$\mu = \frac{\sigma_R}{en} = \frac{e\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle}. \qquad (3.2.10)$$

Опыт дает для подвижности электронов в металлах следующие значения:

$$\mu_e \sim (10^{-4}–10^{-3})\ \text{м}^2/\text{В}\cdot\text{с (в системе СИ)}.$$

Отсюда также видно, что скорость дрейфа в металлах в самом деле значительно меньше средней скорости теплового движения (см. (3.2.1)).

Если имеется несколько сортов носителей, то у каждого из них своя подвижность μ_i, и тогда проводимость проводника равна

$$\sigma_R = \sum_i q_i n_i \mu_i. \qquad (3.2.11)$$

Рассмотрим кратко *единицы измерения* введенных величин. В системе *CGSE* удельное сопротивление измеряется в секундах:

$$\rho_R = \frac{E}{j} = \frac{заряд/см^2}{заряд/с \cdot см^2} = c\,.$$

Для металлов, к примеру, меди Cu удельное сопротивление $\rho_R \sim 10^{-17}$ с (металл), для стекла $\rho_R \sim 10^3$ с (диэлектрик).

В системе СИ удельное сопротивление измеряется в Ом·м. Подробнее системы единиц для электрических величин рассмотрим в п. 3.5. Здесь же в таблице уместно привести единицы заряда, тока, сопротивления и связи между ними в двух системах единиц:

Физические величины	**CGSE**	**СИ**	**Связь единиц**
Заряд q	1 $CGSE_q$	1 Кл	1 Кл = $3\cdot10^9$ $CGSE_q$
Ток I	1 $CGSE_I$	1 А = 1 Кл/1 с	1 А = $3\cdot10^9$ $CGSE_I$
Плотность тока j	1 $CGSE_j$	1 А/м^2	1 А/м^2 = $3\cdot10^5$ $CGSE_j$
Разность потенциалов U	1 $CGSE_\varphi$= =1 $CGSE_q$ /см	1 В = 1 Дж·Кл$^{-1}$	1 В = 1/300 $CGSE_\varphi$
Сопротивление R	1 $CGSE_R$	1 Ом = 1 В·А$^{-1}$	1 Ом = $1/9\cdot10^7$ $CGSE_R$
Удельное сопротивление ρ_R	1 $CGSE_\rho$ = 1 с	1 Ом·м	1 Ом·м = $1/9\cdot10^9$ $CGSE_\rho$
Удельная проводимость σ_R	1 $CGSE_\sigma$ = 1 с$^{-1}$	1 См·м$^{-1}$ =1 Ом$^{-1}$м$^{-1}$	1 См·м$^{-1}$ = $9\cdot10^9$ $CGSE_\sigma$

3.2.2. Закон Джоуля — Ленца

Итак, в рамках рассматриваемой модели за время τ электрон набирает максимальную скорость

$$u_{max} = a\tau = \frac{eE}{m}\frac{\langle l\rangle}{\langle v\rangle}$$

и приобретает соответственно кинетическую энергию, равную

$$W_K = \frac{mu_{max}^2}{2} = \frac{1}{2}m\frac{e^2E^2\langle l\rangle^2}{m^2\langle v\rangle^2} = \frac{e^2E^2\langle l\rangle^2}{2m\langle v\rangle^2}\ . \qquad (3.2.12)$$

Частота столкновений одного электрона с атомами определяется обратным временем свободного пробега:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{<v>}{<l>}\,.$$

Тогда полное число соударений электронов в единицу объема и в единицу времени ν зависит от числа электронов в единице объема (прямо пропорционально концентрации n) и определяется

$$\nu = \frac{n<v>}{<l>}\,. \qquad (3.2.13)$$

Каждый акт соударения сопровождается передачей набранной кинетической энергии упорядоченного движения W_K атомам или ионам проводника. Следовательно, в рамках принятой модели выделяемая теплота в единице объема за единицу времени, т. е. объемная плотность мощности, равна

$$\frac{dw}{dt} = W_K \frac{n\langle v\rangle}{\langle l\rangle} = \frac{e^2 n\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle} E^2 = \sigma_R E^2 . \qquad (3.2.14)$$

Здесь мы воспользовались уже определенным ранее выражением для проводимости (3.2.8). Итак, получаем закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме:

$$\frac{\delta Q}{dtdV} = \frac{dw}{dt} = \sigma_R E^2 = \frac{j^2}{\sigma_R} = \rho_R j^2 . \qquad (3.2.15)$$

Мощность тепла, выделяемого в единицу объема, пропорциональна квадрату плотности электрического тока и обратно пропорциональна удельной проводимости.

Переход к обычной записи закона Джоуля — Ленца для участка цепи осуществляется интегрированием по объему провода:

$$\frac{dQ}{dt} = \int \frac{j^2}{\sigma_R} dV = \int \frac{j^2}{\sigma_R} Sdl = I^2 \int \frac{dl}{\sigma_R S} = I^2 R , \qquad (3.2.16)$$

где S — поперечное сечение провода; dl — элемент длины и R — сопротивление рассмотренного участка провода.

3.2.3. Закон Видемана — Франца. Недостатки классической теории

В итоге классическая теория смогла объяснить (по крайней мере, качественно) опытные законы Ома и Джоуля — Ленца. Что касается количественного согласия, дело обстоит гораздо хуже. Однако отметим, что классические представления и не должны были обеспечивать количественное согласие с экспериментальными законами, поскольку движение электронов в веществе относится к явлениям микромира, которые описываются в рамках квантовой физики.

Тем не менее классическая теория смогла объяснить еще один результат, который случайно хорошо согласуется с опытом. И хотя классический вывод этого соотношения неверен, сам результат оказался правильным, поэтому приведем его.

Металлы — хорошие проводники не только электричества, но и тепла. В рамках той же модели металла переносчиками электричества и тепла в металлах являются одни и те же частицы — электроны. Поэтому основной механизм теплопроводности должны обеспечивать свободные электроны. При этом роль ионов в переносе тепла пренебрежимо мала. В курсе «Мо-

лекулярная физика» (см. п. 5.3, формула (5.3.4)) было получено следующее выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{i}{2} k = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \frac{C_V}{N_A} = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda c_V , \qquad (3.2.17)$$

где n — концентрация электронов; $\langle l \rangle = \lambda$ — длина свободного пробега электрона. Здесь C_V и $c_V = ik/2$ — молярная теплоемкость и теплоемкость на 1 электрон соответственно; i — число степеней свободы (i = 3 для электрона); k — постоянная Больцмана (k = 1.3807·10^{-16} Эрг/К = 1.3807·10^{-23} Дж/К); N_A — число Авогадро (N_A = 6.022·10^{23} моль$^{-1}$).

Найдем отношение коэффициента теплопроводности (3.2.17) и удельной электропроводности (3.2.8):

$$\frac{\chi}{\sigma_R} = \frac{\frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \frac{3}{2} k}{\frac{1}{2} \frac{e^2 n}{m} \frac{\lambda}{\langle v \rangle}} = \frac{m \langle v \rangle^2 k}{e^2} . \qquad (3.2.18)$$

В рамках рассматриваемой приближенной теории учет разницы между средней скоростью и среднеквадратичной скоростью есть превышение точности, поэтому можно положить $\langle v \rangle^2 \approx \langle v^2 \rangle$ и $\frac{m \langle v \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT$. Тогда отношение (3.2.18) принимает вид

$$\frac{\chi}{\sigma_R} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T . \qquad (3.2.19)$$

Это *закон Видемана — Франца* — отношение коэффициента теплопроводности и удельной электропроводности для всех металлов одно и то же:

$$\frac{\chi}{\sigma_R} = 2.23 \cdot 10^{-8} T , \qquad (3.2.20)$$

и зависит только от температуры.

Оказалось, что закон Видемана — Франца находится в хорошем согласии с опытом. Как далее оказалось, это согласие — случайное для классического описания. При нашем модельном описании мы не учитывали максвелловское распределение электронов по скоростям, что на самом деле необходимо сделать. В рамках классического описания Л. Лоренц учел его и получил вместо «3» фактор «2», что только ухудшило согласие с экспериментом. Зоммерфельд показал, что квантовая теория дает коэффициент $\pi^2/3$, что хорошо совпадает с простейшим классическим результатом «3».

Вообще классическая модель наглядна и дает правильные качественные зависимости, выражаемые законами Ома, Джоуля — Ленца, Видемана — Франца. Однако она не приводит к правильным количественным результатам. Рассмотрим, в чем состоят основные *расхождения* и недостатки классической теории.

1. Оказалось, что для того, чтобы получить правильные значения электропроводности σ_R, необходимо принимать очень большие значения длины

свободного пробега электронов, на три порядка превышающие межатомные расстояния, что не находит убедительного объяснения в классической физике.

2. Классическая теория предсказывает также другую зависимость удельной проводимости от температуры: $\sigma_R \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$, в то же время эксперимент дает следующую зависимость $\sigma_R \sim \frac{1}{T}$.

3. В теплоемкость металлического проводника согласно «классике» аддитивный вклад вносят электронный газ $C_v = \frac{3}{2}R$ и решетка $C_v = 3R$ (закон Дюлонга и Пти), что в сумме дает $C_v = \frac{9}{2}R$. Однако этот результат не находит подтверждения в эксперименте: теплоемкость металлов практически равна $3R$ (см. п. 3.3 курса «Молекулярная физика»).

Квантовая физика позволяет устранить эти расхождения. Прежде всего, необходимо учитывать различие в поведении микрочастиц и обычных макрочастиц. Квантовая физика допускает, как называли ранее, «дуализм» в поведении микрочастиц, т. е. приписывает им корпускулярные и волновые свойства. Именно последние позволяют «обтекать» атомы без столкновений, что приводит к увеличению длины свободного пробега электронов.

Распределение электронов по энергиям подчиняется *квантовой статистике Ферми — Дирака* (см. рис. 3.2.3). На рисунке 3.2.3 представлено распределение плотности свободных электронов по энергиям. Согласно статистике Ферми — Дирака в состоянии с определенной энергией не может находиться более одного электрона. Таким образом, при нуле температуры электроны занимают все возможные нижние энергетические состояния от нуля вплоть до максимальной энергии — *энергии Ферми* ε_F. В образовании электронной проводимости и теплоемкости участвует лишь малая часть электронов, имеющих энергии вблизи *уровня Ферми* ε_F. Именно поэтому электронный газ не вносит существенного вклада в теплоемкость и теплоемкость близка к закону Дюлонга — Пти (см. п. 3.3 курса «Молекулярная физика»).

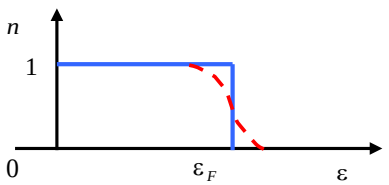


Рис. 3.2.3

Квантовая физика предсказывает для температурной зависимости проводимости $\sigma_R \sim 1/T$, что и наблюдается в эксперименте. При сверхнизких температурах (ниже 20 К) в металлах наблюдается явление сверхпро-

водимости, открытое еще в начале XX в. Однако в конце 1980-х гг. была обнаружена сверхпроводимость при температурах 90–160 К, причем на керамических материалах. Подобные явления уже не вписываются в картину представлений классической физики, а являются прерогативой физики квантовой. Позже мы вернемся к этим явлениям.

Отметим также, что в разных конденсированных средах — твердых телах, жидкостях, газах, вакууме — реализуется в принципе различный механизм проводимости.

3.2.4. Электрические цепи. ЭДС. Законы Кирхгофа

Для того чтобы поддерживать ток, необходимо поддерживать электрическое поле и осуществлять круговорот зарядов в цепи, при котором они бы двигались по замкнутому пути. В замкнутой цепи наряду с участками, на которых положительные носители тока движутся в сторону убывания потенциала, должны быть участки, на которых перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т. е. против сил электростатического поля.

Перемещение носителей на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения, называемых *сторонними силами*. Сторонние силы можно характеризовать работой, которую они совершают. Работа, совершенная сторонними силами над единичным положительным зарядом, называется *электродвижущей силой* (ЭДС):

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}. \qquad (3.2.21)$$

Очевидно, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала.

Рассмотрим неоднородный участок электрической цепи, содержащий сопротивления и источники ЭДС. Можно также ввести понятие напряженности поля сторонних сил $E_{ст}$:

$$\vec{E}_{ст} = \frac{\vec{F}_{ст}}{q}. \qquad (3.2.22)$$

Работа сторонних сил на неоднородном участке электрической цепи 1–2 равна

$$A_{ст} = q\int_1^2 \vec{E}_{ст} d\vec{l}\ . \qquad (3.2.23)$$

Тогда работа сторонних сил на этом участке цепи по перенесению единичного заряда — ЭДС на участке цепи — равна

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{ст} d\vec{l}\ . \qquad (3.2.24)$$

Для замкнутой цепи получаем полную ЭДС в цепи как циркуляцию вектора напряженности сторонних сил:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{ст} d\vec{l}\ . \qquad (3.2.25)$$

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля $\vec{E}$, тогда результирующая сила равна

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right). \qquad (3.2.26)$$

Работа, совершаемая этой силой на участке цепи 1–2, определяется суммой работ электрических сил и сторонних сил:

$$A_{12} = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} + q\int_1^2 \vec{E}_{ст}d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12}. \qquad (3.2.27)$$

Тогда для падения напряжения на этом участке цепи можно записать следующее выражение:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \qquad (3.2.28)$$

Можно также записать закон Ома для неоднородного участка цепи. На неоднородном участке цепи на носители тока действуют электростатические и сторонние силы. Тогда плотность тока запишется

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right). \qquad (3.2.29)$$

Умножая скалярно вектор плотности тока на вектор элемента проводника длиной dl и вспоминая, что проводимость $\sigma_R = 1/\rho_R$, имеем:

$$\vec{j}d\vec{l} = \sigma_R\left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right)d\vec{l};$$

$$I\rho_R\frac{dl}{S} = \left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right)d\vec{l}. \qquad (3.2.30)$$

Интегрируя по всему участку цепи 1–2, получаем *закон Ома для участка цепи*:

$$I\int_1^2 \rho_R\frac{dl}{S} = IR = \int_1^2\left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right)d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12};$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}. \qquad (3.2.31)$$

Если интегрирование распространяется на всю замкнутую цепь, то получаем *закон Ома для полной цепи*:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} + \oint \vec{E}_{ст}d\vec{l} = 0 + \oint \vec{E}_{ст}d\vec{l} = \mathcal{E} = IR. \qquad (3.2.32)$$

Здесь мы воспользовались тем, что работа электростатического поля по замкнутому пути, или, иначе, сумма всех потенциалов в замкнутой цепи, равна нулю.

Разбивая сопротивление всей цепи на сопротивление внешнего участка цепи $R_{внешней}$ и внутреннее r_0 сопротивление источника или источников, получаем обычную формулу для ЭДС замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = I\left(R_{внешней} + r_0\right). \qquad (3.2.33)$$

На практике для вычисления токов и падений напряжений на различных участках разветвленных электрических цепей полезны правила Кирхгофа, основанные на законах сохранения заряда и энергии. Прежде всего, по всей цепи распределяем направление токов на каждом из участков цепи и определяем направление действия ЭДС. Далее используем пер-

вое правило Кирхгофа: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum_i I_i = 0. \qquad (3.2.34)$$

Затем применяем второе правило Кирхгофа для обхода замкнутого контура в цепи. Выбирая направление обхода для любого выделенного в цепи замкнутого контура, получаем

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k E_k. \qquad (3.2.35)$$

Иначе, *сумма всех падений напряжений на участках выбранного замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре*.

Примечание 31. Густав Генрих Видеман (1826–1899), немецкий физик;
Рудольф Франц (1827–1902), немецкий физик;
Людвиг Валентин Лоренц (1829–1891), датский физик-теоретик;
Арнольд Иоганн Вильгельм Зоммерфельд (1868–1951), немецкий физик-теоретик;
Энрико Ферми (1901–1954), итальянский физик, Нобелевская премия (1938) за открытие искусственной радиактивности;
Поль Адриен Морис Дирак (1902–1984), английский физик-теоретик, Нобелевская премия (1933) за создание квантовой механики;
Пьер Луи Дюлонг (1785–1838), французский физик и химик;
Алексис Терез Пти (1791–1820), французский физик;
Густав Роберт Ки́рхгоф (1824–1887), немецкий физик, член Берлинской академии наук, с 1862 г. член-корреспондент Санкт-Петербургской академии наук.

3.3. Магнитное взаимодействие и магнитное поле движущихся зарядов

3.3.1. Экспериментальные факты. Магнитная индукция

Магнитные явления обнаружены давно — с древних времен находились естественные магниты, которые взаимодействовали между собой и с магнитным полем Земли. Так, было обнаружено, что магнитные стрелки ориентируются в поле Земли. Кроме факта, что магниты воздействуют на другие магниты, выяснилось также, что магнит действует на движущиеся заряды, т. е. на электрические токи. Для описания магнитных явлений было введено понятие *магнитного поля*.

Основные экспериментальные факты, которые положены в теорию взаимодействия магнитных полей, были установлены в XIX в.:

1) движущиеся заряды создают магнитное поле;
2) магнитное поле действует на движущиеся заряды.

Эти фундаменальные положения были получены в результате многочисленных опытов с проявлениями магнитных взаимодействий. Приведем пару примеров этих опытов, послуживших основой теории электромагнетизма.

1. Опыт Эрстеда (1820). Х. К. Эрстед установил связь электричества и магнетизма. Ток пропускался по проволоке, подвешенной над стрелкой компаса (рис. 3.3.1). Стрелка, первоначально установленная параллельно проволоке, при пропускании по проволоке тока ориентировалась перпендикулярно ей, причем направление вращения стрелки зависело от направления протекания тока. Таким образом, впервые была установлена связь электричества и магнетизма.

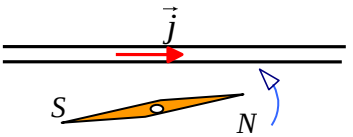


Рис. 3.3.1

2. Опыт Ампера (1820). А. М. Ампер рассматривал взаимодействие двух параллельных токов. Два параллельных провода, по которым текут одинаково направленные токи (рис. 3.3.2), притягиваются друг к другу. Он установил, что сила, приходящаяся на единицу длины любого из проводов с током, прямо пропорциональна произведению обоих токов и обратно пропорциональна расстоянию между проводами. Перемена направления одного из токов превращает силу притяжения в силу отталкивания. Между двумя нитями с постоянным электрическим током существует нечто вроде «действия на расстоянии».

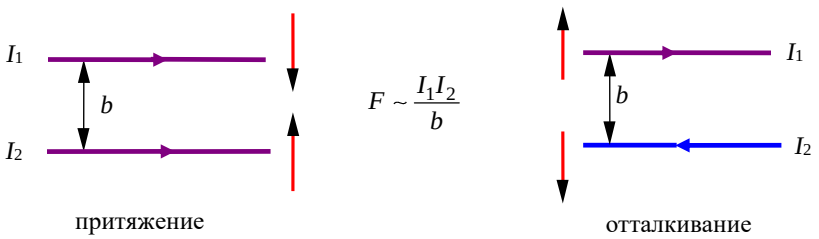


Рис. 3.3.2

Сила, о которой идет речь, зависит только от зарядов, движущихся по проводам, т. е. от двух токов. Это *магнитные силы*; причина их появления — *движение зарядов*. Стрелка компаса Эрстеда мало похожа на цепь постоянного тока. Однако Ампер догадался, что отклонение стрелки компаса, происходящее без видимого движения зарядов, обусловлено электрическими токами в атомном масштабе. Катушка с током ведет себя под влиянием проходящего вблизи тока точно так же, как магнитная стрелка компаса.

3. Более современный опыт по влиянию магнитного поля на движущиеся заряды изображен на рисунке 3.3.3: отклонение пучка электронов в электронно-лучевой трубке при поднесении провода с током. Электроны в

электронно-лучевой трубке, движущиеся прямолинейно, отклоняются к проводу с током или от него в зависимости от направления тока в этом проводе.

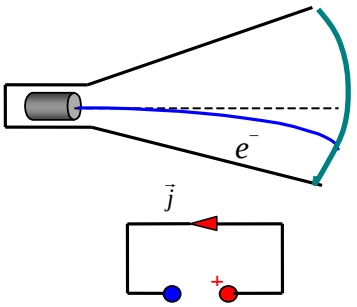


Рис. 3.3.3

Для описания взаимодействия движущихся зарядов вводят понятие магнитного поля, величину и направление которого характеризуют вектором *индукции магнитного поля* $\vec{B}$. Индукция магнитного поля есть аналог напряженности электрического поля $\vec{E}$ в электростатике, а отличие в названиях (индукция ↔ напряженность) связано с историческими причинами (аналогичные векторы, вводимые для описания магнитного и электрического поля в веществе, $\vec{H} \sim \vec{D}$ также имеют различные названия: напряженность ↔ индукция соответственно).

На покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует. Магнитное поле действует только на движущийся заряд. Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического поля, справедлив принцип суперпозиции. Магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности.

Итак, для магнитного поля справедлив *принцип суперпозиции*:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i \ . \qquad (3.3.1)$$

Для того чтобы определить магнитную индукцию и ввести единицы измерения, необходимы опытные факты и законы, связывающие взаимодействие магнитного поля с движущимися зарядами.

Примечание 32. Ханс Кристиан Эрстед (1777–1851), датский физик;
Андре Мари Ампер (1775–1836), французский физик.

3.3.2. Релятивистская природа магнитного поля

Природа взаимодействия движущихся зарядов обусловлена релятивистскими свойствами пространства и времени. Это утверждение вытекает из релятивистского уравнения движения. Релятивистское уравнение движения внешне выглядит как и обычное уравнение движения (см. в разделе «Механика» гл. 2, формулы (2.7.28)):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,. \qquad (3.3.2)$$

Оно инвариантно и, следовательно, имеет одинаковый вид в К-системе и во всех других инерциальных системах отсчета. Напомним, что в этом уравнении стоит релятивистский импульс $\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. В частности, в инерциальной K'-системе отсчета можно записать такое же уравнение:

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \vec{F}'\,. \qquad (3.3.3)$$

В левые части уравнений (3.3.2)–(3.3.3) входят чисто механические величины, изменение которых при переходе из одной системы отсчета в другую известно. Следовательно, левые части этих уравнений в обеих системах отсчета можно связать между собой. Тогда оказываются связанными между собой вследствие релятивистской инвариантности уравнений силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$. Поскольку в левые части уравнений входят скорости, то можно заключить, что сила взаимодействия двух движущихся зарядов зависит от скорости и не сводится к кулоновской силе, так как последняя не зависит от скорости $\vec{v}$. Следовательно, появляется дополнительная составляющая силы, которая носит чисто релятивистский характер.

Вывод. *Следовательно, взаимодействие движущихся зарядов осуществляется не только посредством кулоновской силы, но и силой другой природы — магнитной.*

Обсудим подробнее сказанное выше на конкретном примере: *взаимодействие точечного заряда и бесконечной равномерно заряженной нити*. Рассмотрение равномерно заряженной нити удобно, так как ее электрическое поле симметрично вдоль оси движения.

1. Пусть в К′-системе отсчета нить и точечный заряд q покоятся (см. рис. 3.3.4), нить ориентирована вдоль оси x'. Точечный заряд q расположен на оси y' на расстоянии y'_0 от нити. Объемная плотность заряда на нити ρ', и тогда малый элемент заряда нити: $dq' = \rho' S' dx'$. Сила, действующая на точечный заряд q со стороны нити, определяется напряженностью электрического поля нити (которая находится по теореме Гаусса):

$$E \cdot 2\pi r h = 4\pi\rho' S' h\,; \qquad E = \frac{2\rho' S'}{r}\,, \qquad (3.3.4)$$

где r — расстояние от оси нити. Тогда вектор рассматриваемой силы имеет следующие компоненты:

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 2q\frac{\rho' S'}{y'_0}, \quad F'_z = 0\,. \qquad (3.3.5)$$

2. Теперь рассмотрим эту же задачу в К-системе, которая движется со скоростью $\vec{v}$ в отрицательном направлении оси x', т. е. заряд и заряженная нить в ней движутся в положительном направлении оси x (см. рис. 3.3.5).

Найдем силу взаимодействия (отталкивания) нити с точечным зарядом q. Заряд q является *релятивистским инвариантом*, т. е. при переходе из одной ИСО в другую он не меняется. Однако при переходе в К-систему отсчета линейные размеры нити сокращаются, и на единицу длины теперь приходится больше зарядов, чем на единицу длины неподвижной нити.

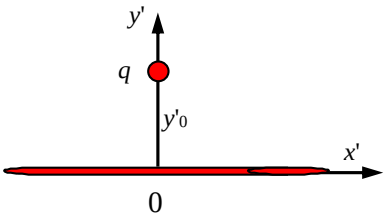


Рис. 3.3.4

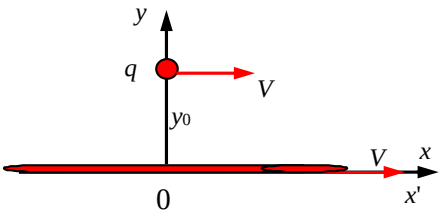


Рис. 3.3.5

Действительно, продольные размеры сокращаются согласно преобразованиям Лоренца: $dx = dx'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Поперечные размеры не меняются, т. е. сечение нити остается одинаковым: $S = S'$. Тогда для плотностей распределения заряда в нити в обеих системах имеем $\rho' = \frac{dq}{Sdx'}$ и $\rho = \frac{dq}{Sdx}$. Откуда плотность зарядов в К-системе отсчета равна

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (3.3.6)$$

Далее расчет силы взаимодействия заряда q с нитью в К-системе аналогичен расчету в К′-системе отсчета. Тогда компоненты силы f равны:

$$f_x = 0, \quad f_y = 2q\frac{\rho S}{y_0}, \quad f_z = 0. \qquad (3.3.7)$$

Здесь мы вычислили только кулоновскую (электрическую) силу взаимодействия, но, как увидим далее, это неполная сила взаимодействия, поэтому обозначаем ее маленькой буквой f. Поскольку поперечные размеры не изменяются, то $y_0 = y_0'$. Сравнивая f_y (3.3.7) и F_y' (3.3.5), получаем

связь между перпендикулярными компонентами электрической силы в двух системах отсчета:

$$f_y = \frac{2q\rho S}{y_0} = \frac{2q\rho' S'}{y'_0\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{F'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (3.3.8)$$

3. Теперь рассмотрим преобразование полной силы при переходе из К′-системы в К-систему. Воспользуемся уравнением движения и напишем его для перпендикулярной составляющей в К- и К′-системах:

$$F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad F'_y = \frac{dp'_y}{dt'}. \qquad (3.3.9)$$

Вспомним преобразования Лоренца для координат и времени:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dt = dt'\frac{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

при этом компонента скорости заряда q в К′-системе $\frac{dx'}{dt'} = v'_x = 0$. Тогда имеем преобразование для промежутков времени:

$$dt' = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c}} = dt\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (3.3.10)$$

Записывая перпендикулярную компоненту скорости и импульс (помня, что $v'_x = 0$), имеем:

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} = \frac{dy}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$p'_y = m_0 v'_y = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} v'_y\sqrt{1-\beta^2} = mv_y = p_y.$$

Таким образом, перпендикулярная компонента импульса инвариантна

$$p_y = p'_y. \qquad (3.3.11)$$

Примечание 33. Справедливость (3.3.11) можно получить проще, если вспомнить свойства 4-векторов. Ранее в релятивистской механике рассматривали 4-вектор энергии-импульса $\left(E/c, p_x, p_y, p_z\right)$, компоненты которого преобразуются при переходе к новой ИСО так же, как компоненты 4-радиус-вектора (преобразования Лоренца). При этом меняется только нулевая и продольная компоненты, а перпендикулярная компонента импульса не меняется: $p_y = p'_y$, $dp_y = dp'_y$.

Тогда, принимая во внимание (3.3.10) и (3.3.11), получаем для перпендикулярной составляющей полной силы:

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'}\frac{dt'}{dt} = F'_y\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (3.3.12)$$

4. Сравнивая последнее уравнение с (3.3.8) и исключая силу F'_y, получаем связь между полной силой F_y и кулоновской силой f_y:

$$F_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) f_y . \qquad (3.3.13)$$

Таким образом, получаем, что кулоновская сила отталкивания f_y больше силы (полной) F_y, действующей на движущийся заряд со стороны движущейся заряженной нити. Следовательно, кроме кулоновской силы отталкивания, на заряд действует еще другая сила — сила притяжения, которая отлична от кулоновской силы. Эта сила — *магнитная сила — сила магнитного взаимодействия движущихся зарядов*.

Магнитное взаимодействие как часть электромагнитного взаимодействия предполагает полевую трактовку. Приведенный пример иллюстрирует экспериментальные факты, положенные в основу теории электромагнитных явлений и упомянутые вначале параграфа. А именно: движущийся электрический заряд создает в окружающем его пространстве магнитное поле; а на движущийся заряд со стороны магнитного поля действует сила. В нашем примере магнитная сила определяется

$$F_{магн} = F_y - f_y = -\frac{v^2}{c^2} f_y , \qquad (3.3.14)$$

где f_y — кулоновская сила, а знак «минус» здесь указывает на силу притяжения. Видно из (3.3.13) и (3.3.14), что магнитная сила сравнима с кулоновской силой только при достаточно больших скоростях. Поэтому *магнитное поле проявляется как релятивистский эффект*. Однако если в проводящей среде протекает электрический ток (алгебраическая сумма зарядов проводника равна нулю), то кулоновская сила равна нулю и остается только магнитная сила, проявление которой мы и наблюдаем. При скоростях дрейфа электронов в проводнике магнитная сила в $\sim 10^{20}$ раз меньше кулоновской силы.

3.4. Сила Лоренца и закон Ампера

3.4.1. Сила Лоренца

В результате многочисленных экспериментов по исследованию магнитных явлений физиками были получены основные (фундаментальные) законы. Эти законы, записанные в виде математических формул, являются обобщением опытных фактов. Исторически первыми проводились опыты с прямыми токами (законы Ампера, Био и Савара) и устанавливались основные законы их взаимодействия. Однако при изучении этого раздела курса удобнее ввести те же законы для элементарных движущихся зарядов, а затем связать их с законами взаимодействия токов.

Итак, рассмотрим первый опытный факт: на движущийся электрический заряд в магнитном поле (см. рис. 3.4.1) действует сила — *сила Лоренца*, которая определяется следующим векторным произведением:

$$\vec{F}_q = \frac{q}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right], \qquad (3.4.1)$$

где q — заряд; $\vec{v}$ — скорость заряда; $\vec{B}$ — индукция магнитного поля. Здесь c — некоторая константа (физический смысл ее рассмотрим позже), которая определяется выбранной системой единиц. Индукция магнитного поля $\vec{B}$ — векторная силовая характеристика магнитного поля, определяющая величину и направление действия силы на движущийся заряд по формуле (3.4.1).

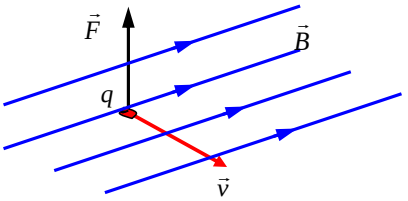


Рис. 3.4.1

В системе единиц *CGSE* (Гаусса), в чем мы убедимся далее, константа c — скорость света. В системе *СИ* константа c = 1, т. е. сила Лоренца в системе *СИ* записывается:

$$\vec{F}_q = q\left[\vec{v},\vec{B}\right]. \qquad (3.4.1а)$$

Таким образом, это соотношение может служить определением единиц магнитной индукции $\vec{B}$, поскольку остальные единицы, входящие в (3.4.1а), уже определены. В системе СИ имеем: $[F] = 1$Н, $[q] = 1$Кл, $[v] = 1$м/с, тогда единица магнитной индукции определяется как $[B] = 1$Тл (Тесла). Подробнее о единицах поговорим в следующем параграфе.

Если движение заряда происходит одновременно в магнитном и электрическом полях, то сила Лоренца равна сумме сил:

$$\vec{F}_q = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right]\right). \qquad (3.4.2)$$

Однако при этом заметим, что разделение силы на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчета.

3.4.2. Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле

По второму закону Ньютона уравнение, описывающее движение заряда q в магнитном поле индукции $\vec{B}$, имеет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_q = \frac{q}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right], \qquad (3.4.3)$$

где m — масса заряда; $\vec{v}$ — его скорость. Рассмотрим отдельно составляющие (проекции) скорости вдоль направления магнитного поля $v_{\parallel}$ и пер-

пендикулярно к нему $v_\perp$: $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$ (см. рис. 3.4.2). Легко видеть, что в направлении, параллельном магнитному полю, проекция силы, действующей со стороны поля на движущийся заряд, равна нулю, что вытекает из свойств векторного произведения:

$$m\frac{d\vec{v}_\parallel}{dt} = \frac{q}{c}\left[\vec{v}_\parallel, \vec{B}\right] = 0. \qquad (3.4.4)$$

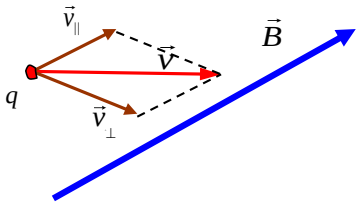


Рис. 3.4.2

Поэтому составляющая скорости, параллельная вектору индукции магнитного поля, не меняется: $v_B = v_\parallel = const$.

Для составляющей скорости, перпендикулярной к направлению магнитного поля $\vec{B}$, имеем уравнение

$$m\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{c}\left[\vec{v}_\perp, \vec{B}\right] = m\vec{a}. \qquad (3.4.5)$$

Ускорение заряда равно

$$\vec{a} = \frac{q}{mc}\left[\vec{v}_\perp, \vec{B}\right]$$

и направлено перпендикулярно скорости частицы (и индукции магнитного поля). Как известно из курса механики, ускорение, перпендикулярное скорости (центростремительное ускорение), не изменяет ее величину, а меняет только направление скорости. В этом случае частица движется в магнитном поле с постоянной по модулю скоростью $v_\perp = const$, и, следовательно, траекторией движения заряда в плоскости, перпендикулярной к полю, является *окружность* (рис. 3.4.3). При этом центростремительное ускорение определяется как $a = \frac{v_\perp^2}{R}$. Подставляя это ускорение в уравнение (3.4.5) и рассматривая его по модулю, находим радиус описываемой окружности:

$$\frac{qv_\perp B}{c} = \frac{mv_\perp^2}{R};$$

$$R = \frac{mcv_\perp}{qB}. \qquad (3.4.6)$$

Учитывая (3.4.6), получаем частоту вращения (угловую скорость) заряда вокруг силовой линии индукции магнитного поля — так называемую *циклотронную частоту* вращения:

$$\omega = \frac{v_\perp}{R} = \frac{qB}{mc}. \qquad (3.4.7)$$

Если скорость частицы направлена под произвольным углом к магнитному полю (вектору $\vec{B}$), то траектория частицы представляет собой винтовую линию (рис. 3.4.4), навитую на направление индукции магнитного поля.

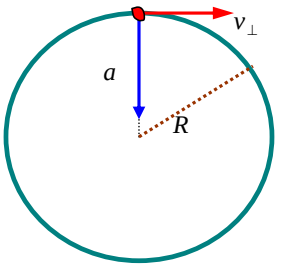


Рис. 3.4.3

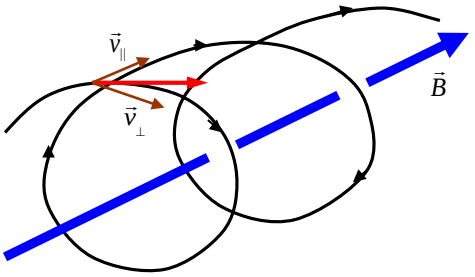


Рис. 3.4.4

Итак, в итоге получаем:

1) равномерное движение вдоль направления магнитного поля;

2) движение в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, с ускорением, перпендикулярным к скорости, т. е. движение по окружности с постоянной скоростью.

3.4.3. Взаимодействие токов. Закон Ампера

Обычно эксперименты проводились с постоянными токами, поскольку с ними проще оперировать, чем с отдельными зарядами. Рассмотрим взаимодействие токов. Каждый носитель тока в проводнике испытывает действие магнитной силы. В результате магнитное поле действует с определенной силой на сам проводник с током в целом.

Пусть имеем провод с током, помещенный в магнитное поле. На каждый заряд q (носитель) действует сила Лоренца (3.4.1):

$$\vec{F}_q = \frac{q}{c}\left[(\vec{v}+\vec{u}),\vec{B}\right], \qquad (3.4.8)$$

где $\vec{v}$ — скорость хаотического движения; $\vec{u}$ — скорость дрейфа носителей. Если S — сечение проводника, n — концентрация носителей, то на элемент тока длиной dl будет действовать сила

$$d\vec{F} = \left\langle \vec{F}_q \right\rangle nSdl, \tag{3.4.9}$$

где $\left\langle \vec{F}_q \right\rangle$ — средняя сила, действующая на заряд; $dV = Sdl$ — элементарный объем проводника. Так как средняя скорость теплового движения равна нулю $\langle \vec{v} \rangle = 0$, а средняя скорость дрейфа — $\langle \vec{u} \rangle = \vec{u}$, то получаем

$$\left\langle \vec{F}_q \right\rangle = \frac{q}{c}\left[\left(\langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle\right), \vec{B}\right] = \frac{q}{c}\left[\langle \vec{u} \rangle, \vec{B}\right] = \frac{q}{c}\left[\vec{u}, \vec{B}\right]. \tag{3.4.10}$$

Тогда сила, действующая на элемент объема проводника dV, равна

$$d\vec{F} = \frac{q}{c} n\left[\vec{u}, \vec{B}\right] Sdl = \frac{1}{c}\left[\vec{j}, \vec{B}\right] dV. \tag{3.4.11}$$

Здесь ввели плотность тока $\vec{j} = nq\vec{u}$. Итак, получаем силу, действующую на *объемный элемент тока*:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\left[\vec{j}, \vec{B}\right] dV. \tag{3.4.12}$$

Можно написать силу, действующую на тонкий провод с током в магнитном поле. Для этого объемный элемент тока выразим через *линейный элемент тока*:

$$\vec{j} dV = \vec{j} Sdl = Id\vec{l}. \tag{3.4.13}$$

Тогда сила, действующая на провод длиной $d\vec{l}$ в магнитном поле, определяется

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]. \tag{3.4.14}$$

Сила, действующая на провод конечной длины, записывается через интеграл:

$$\vec{F} = \int \frac{I}{c}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]. \tag{3.4.15}$$

В общем случае необходимо учитывать векторный характер подынтегрального выражения при получении результирующей силы.

Если имеем участок прямого провода с током длиной l, находящийся в постоянном магнитном поле, тогда величина силы, действующей на этот участок, получается из интегрирования (3.4.15) и равна

$$F = \frac{I}{c} Bl \sin\vartheta, \tag{3.4.16}$$

где угол ϑ — угол между направлением силовых линий индукции магнитного поля и прямым участком провода.

Эти соотношения (3.4.12)–(3.4.16) и определяет закон взаимодействия токов — *закон Ампера* (1820).

3.5. Поле движущегося заряда. Закон Био — Савара

3.5.1. Магнитное поле движущегося заряда

Если точечный заряд покоится, то он создает в окружающем его пространстве только электрическое поле. Это поле изотропное, и положение заряда определяет центр симметрии электростатического поля. Если заряд движется со скоростью $\vec{v}$, то в пространстве появляется выделенное направление, связанное с направлением его движения. Поэтому магнитное поле, появляющееся в результате движения заряда, имеет осевую (аксиальную) симметрию.

В результате обобщения экспериментальных данных был получен фундаментальный закон: *точечный заряд* q*, равномерно движущийся с малой (нерелятивистской* $v << c$*) скоростью, создает в окружающем пространстве магнитное поле*:

$$\vec{B} = k\frac{q[\vec{v},\vec{r}]}{r^3}, \qquad (3.5.1)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения A (см. рис. 3.5.1). Конец радиус-вектора $\vec{r}$ неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью $\vec{v}$, поэтому вектор $\vec{B}$ в данной системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени. В соответствии с (3.5.1) вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$. Направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ образует с направлением $\vec{v}$ правовинтовую систему и определяется по правилу буравчика: при повороте вектора скорости $\vec{v}$ в направлении вектора $\vec{r}$ поступательное движение винта определяет направление $\vec{B}$. Таким образом, по своим свойствам вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ — аксиальный вектор (псевдовектор). При обращении времени меняется направление скорости и соответственно меняется направление магнитного поля.

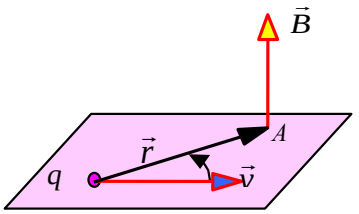


Рис. 3.5.1

Примечание 34. В системе CGSE (Гаусса) коэффициент $k = \frac{1}{c}$.

В системе СИ: $k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{Гн}{м}$.

Электрическое поле неподвижного и движущегося с нерелятивистской скоростью заряда определяется тем же законом Кулона $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$, тогда магнитное поле, созданное таким движущимся зарядом, может быть записано через напряженность электрического поля:

$$\vec{B} = k\left[\vec{v}, \vec{E}\right] = \frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{E}\right]. \qquad (3.5.2)$$

Закон (3.5.1) положен в *основу теории магнетизма*, хотя исторически первым экспериментально было получено выражение для магнитного поля, создаваемого прямым током.

3.5.2. Магнитное поле тока

Вычислим магнитное поле, создаваемое элементом тока I длиной dl и поперечным сечением S (рис. 3.5.2). Число носителей в этом элементе равно $nSdl = ndV$, где n — концентрация носителей. Каждый носитель заряда q согласно (3.5.1) создает в окружающем пространстве магнитное поле

$$\vec{B}_q = \frac{q}{c}\frac{\left[(\vec{v} + \vec{u}), \vec{r}\right]}{r^3}, \qquad (3.5.3)$$

где $\vec{v}$ — скорость хаотического движения, а $\vec{u}$ — скорость направленного движения (дрейфа). Вычисляя магнитное поле элемента тока, будем исходить из установленного опытным путем *принципа суперпозиции*. Следуя этому принципу, будем учитывать, что каждый заряд q возбуждает поле, совершенно не зависящее от наличия других зарядов. Усредняя по всем носителям, заключенным в объеме dV (считая скорость дрейфа $\langle\vec{u}\rangle = \vec{u}$),

$$\left\langle \vec{B}_q \right\rangle = \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{u}, \vec{r}\right]}{r^3}, \qquad \langle\vec{v}\rangle = 0 \qquad (3.5.4)$$

и, умножая на их количество, мы получим магнитное поле, созданное элементом тока:

$$d\vec{B} = \left\langle \vec{B}_q \right\rangle nSdl;$$

$$d\vec{B} = \frac{qn}{c}\frac{\left[\vec{u}, \vec{r}\right]}{r^3}dV = \frac{1}{c}\frac{\left[\vec{j}, \vec{r}\right]}{r^3}dV. \qquad (3.5.5)$$

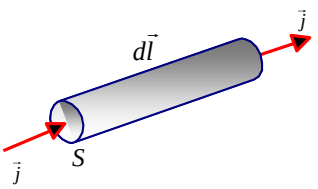


Рис. 3.5.2

Это соотношение составляет содержание *закона Био — Савара*: магнитное поле, создаваемое объемным элементом тока, определяется выражением

$$d\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\left[\vec{j},\vec{r}\right]}{r^3}dV. \qquad (3.5.6)$$

Магнитное поле, создаваемое линейным элементом тока, согласно соотношению (3.4.13) равно

$$d\vec{B} = \frac{I}{c}\frac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}. \qquad (3.5.7)$$

Здесь напоминаем, $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от элемента тока к точке наблюдения. Именно последнее выражение, определяющее вклад малого линейного участка тока в полное магнитное поле, было получено первоначально Био и Саваром и обобщено Лапласом. Запись закона Био — Савара в виде соотношения (3.5.1) легко может быть получена из (3.5.7), если ток обратно представить через движение зарядов с дрейфовой скоростью.

Магнитное поле от проводника конечной длины L получается путем интегрирования по нему:

$$\vec{B} = \frac{I}{c}\int_L \frac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}. \qquad (3.5.7а)$$

В силу векторного характера последнего выражения интегрирование необходимо проводить по проекциям магнитного поля.

Примечание 35. Жан Батист Био (1774–1862), французский физик;
Феликс Савар (1791–1841), французский физик;
Пьер-Симон де Лаплас (1749–1827), французский математик, физик и астроном.

3.5.3. Примеры вычисления магнитных полей

1. *Магнитное поле прямого тока*.

Вычислим магнитное поле прямого тока I, т. е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (см. рис. 3.5.3). Согласно закону Био — Савара в произвольно выбранной точке А векторы $d\vec{B}$ от всех элементов тока $d\vec{l}$ имеют одинаковое направление — на рисунке 3.5.3 (с правой стороны от прямого тока) векторв $d\vec{B}$ направлены за плоскость рисунка. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей dB, причем $Sin\left(\angle\left(d\vec{l},\vec{r}\right)\right) = cos\alpha$, и тогда поле от элемента тока $d\vec{l}$ равно

$$dB = \frac{1}{c}\frac{Idl\,cos\alpha}{r^2}. \qquad (3.5.8)$$

Из рисунка 5.3 следует, что

$$dl\,cos\alpha = rd\alpha \qquad \text{и} \qquad r = \frac{b}{\cos\alpha},$$

где b — расстояние от провода до точки А. Поэтому далее получаем

$$dB = \frac{1}{c}\frac{I\,cos\alpha d\alpha}{b}. \qquad (3.5.9)$$

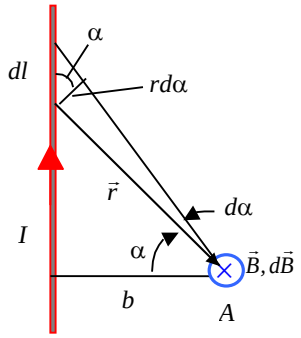


Рис. 3.5.3

Интегрируя последнее выражение по всем элементам бесконечно длинного тока, что эквивалентно интегрированию по углу α от $-\pi/2$ до $\pi/2$, находим индукцию магнитного поля прямого тока:

$$B = \frac{2I}{cb}. \qquad (3.5.10)$$

Магнитное поле, создаваемое прямым током, прямо пропорционально силе тока и обратно пропорционально расстоянию до провода.

Примечание 36. В системе *СИ* магнитное поле прямого тока равно $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}$.

2. *Сила взаимодействия двух параллельных токов*.

Пусть имеем два параллельных тока, расположенных на расстоянии R (рис. 3.5.4). Поле, создаваемое прямым током I_1 на расстоянии R от него в точках, где находится ток I_2, направлено за плоскость рисунка и согласно (3.5.10) равно

$$B = \frac{2I_1}{cR}.$$

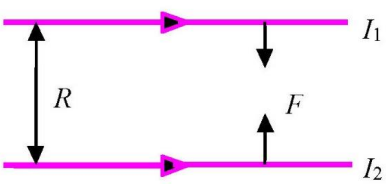


Рис. 3.5.4

Тогда сила, действующая на элемент dl прямого тока I_2 со стороны первого тока, согласно закону Ампера (3.4.14) равна

$$dF = \frac{1}{c} I_2 B dl = \frac{2I_1 I_2}{c^2 R} dl.$$

Здесь учтено, что угол между направлением магнитного поля и элементом dl тока I_2 равен $\frac{\pi}{2}$. Итак, *сила взаимодействия на единицу длины* проводника (притяжения или отталкивания — зависит от взаимного направления токов) равна:

$$f = \frac{dF}{dl} = \frac{2I_1I_2}{c^2R}. \qquad (3.5.11)$$

Примечание 37. Сила взаимодействия двух токов на единицу длины в системе СИ записывается:

$$f = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi R.$$

Важно отметить, что последнее соотношение используется для определения единицы тока в системе СИ — ампера (см. ниже п. 3.5.4).

В общем случае сила магнитного взаимодействия двух элементов тока может быть записана в следующем виде:

$$d\vec{F} = \frac{I_1I_2}{c^2}\frac{\left[d\vec{l}_1, \left[d\vec{l}_2, \vec{r}\right]\right]}{r^3}, \qquad (3.5.12)$$

где $|\vec{r}|$ — расстояние между двумя элементами тока $I_1 d\vec{l}_1$ и $I_2 d\vec{l}_2$.

3. *Магнитное поле кругового тока.*

Вычислим магнитное поле, создаваемое круговым током на его оси. Выберем точку А на оси контура на расстоянии z от центра контура. На круговом контуре с током выделим (на рис. 3.5.5) элемент тока Idl. Этот элемент будет создавать в точке А поле $d\vec{B}$, направление вектора которого перпендикулярно плоскости, образованной элементом контура $d\vec{l}$ и вектором $\vec{r}$. Все элементы кругового тока будут создавать в рассматриваемой точке «конус» векторов индукции $d\vec{B}$. Понятно, что в результате осевой симметрии результирующий вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$, создаваемого в точке А круговым током, будет направлен вверх по оси z. Поэтому для нахождения модуля вектора $\vec{B}$ надо сложить проекции векторов $d\vec{B}$ на ось z. Каждая такая проекция равна

$$dB_z = dB\cos\beta = \frac{1}{c}\frac{Idl}{r^2}\cos\beta,$$

где учтено, что угол между элементом $d\vec{l}$ и радиус-вектором $\vec{r}$ равен $\frac{\pi}{2}$. Интегрируя это выражение по dl (это дает множитель $2\pi R$) и учитывая, что

$$\cos\beta = R/r, \quad r = \sqrt{z^2 + R^2},$$

получаем, что поле на оси витка на расстоянии z от его центра равно

$$B = \frac{1}{c}\frac{2\pi R^2 I}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}. \qquad (3.5.13)$$

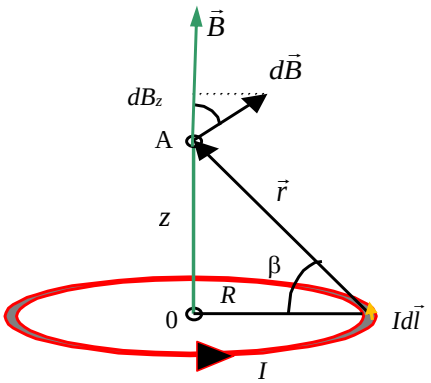


Рис. 3.5.5

В частности, в центре витка ($z = 0$) имеем магнитную индукцию, равную

$$B_{z=0} = \frac{1}{c}\frac{2\pi I}{R}. \qquad (3.5.14)$$

Примечание 38. В системе *СИ* имеем $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$, а в центре витка $B_{z=0} = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

3.5.4. О системах электромагнитных единиц

Закон взаимодействия токов (3.5.11) послужил основой для определения электромагнитных единиц.

1. Напомним сначала, как строится система СГСЭ (CGSE). Основные единицы: см, г, с, а единица заряда $CGSE_q$ определяется из закона Кулона $F = q_1 q_2 / r^2$. Следовательно, магнитные величины уже не произвольны. Так, сила, действующая на единицу длины провода с током в магнитном поле другого тока, равна

$$f = \frac{dF}{dl} = k\frac{2I_1 I_2}{R}.$$

Из этого закона взаимодействия токов получаем, что константа k имеет размерность. Ее размерность легко определить (размерности R и dl совпадают):

$$[k] = \frac{[F]}{[I]^2} = \frac{\textit{сила}}{\textit{квадрат тока}} = \frac{\left[q^2/r^2\right]}{[q/t]^2} = \left[\frac{t}{r}\right]^2 = \frac{\textit{квадрат времени}}{\textit{квадрат длины}} = \frac{c^2}{см^2}. \qquad (3.5.15)$$

То есть размерность k равна обратному квадрату скорости. Опыты показали, что

$$k = \frac{1}{c^2}. \qquad (3.5.16)$$

Здесь константа c — *электродинамическая постоянная*, которая равна скорости света в вакууме ($c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с). Максвелл показал, что свет — это электромагнитная волна. Далее, отсюда строятся все единицы магнитных величин в системе СГСЭ. Напоминаем, что в системе CGSE законы Лоренца (Ампера) и Био — Савара записываются в виде:

$$\vec{F} = \frac{q}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right], \qquad \vec{B} = \frac{q}{cr^3}\left[\vec{v}, \vec{r}\right].$$

2. Система СГСМ (CGSM) строится так же, как СГСЕ — основные механические единицы те же: см, г, с, но дальше для введения электромагнитных единиц измерения используют *закон взаимодействия токов* в виде

$$f = \frac{2I_1 I_2}{R}. \qquad (3.5.17)$$

Здесь коэффициент $k = 1$ и уравнение (3.5.17) используется для определения единицы тока: 1 $CGSM_{тока}$.

Единица тока 1 $CGSM_I$ (= 1 Био) равна такому току, который, протекая по бесконечному проводу, действует на параллельный такой же ток (единицу длины провода), находящийся на расстоянии в 1 см, с силой в 2 Дн. Итак, в этой системе основной единицей электромагнитных величин является *единица тока*. Тогда в системе CGSM имеем законы Ампера и Био — Савара без дополнительных коэффициентов:

$$\vec{F} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right], \qquad \vec{B} = \frac{q}{r^3}\left[\vec{v}, \vec{r}\right]. \qquad (3.5.18)$$

Однако в этих соотношениях надо учитывать, что заряды измерены в системе СГСМ ($CGSM_q$).

Уравнения (3.5.18) служат для определения единицы индукции поля в CGSM — 1 Гс (Гаусс): 1 Гс — один гаусс есть индукция такого магнитного поля, которое действует на заряд в 1 $CGSM_q$ с силой в 1 Дн, если заряд движется перпендикулярно магнитному полю со скоростью 1 см/с.

$$B = \frac{qv}{r^2}, \qquad 1Гс = \frac{[q]\cdot[v]}{[r]^2} = \frac{1CGSM_q \cdot 1 см/с}{см^2} = \frac{1CGSM_q}{см \cdot с};$$

$$F = qvB, \qquad 1Дн = 1CGSM_q \cdot 1 см/с \cdot 1Гс.$$

Исключая отсюда единицу заряда, получим:

$$[B] = [F]^{1/2}[r]^{-1}, \qquad 1Гс = \frac{1Дн^{1/2}}{см} = 1г^{1/2}см^{-1/2}с^{-1}.$$

Аналогично получаем все магнитные единицы в системе *СГСМ.*

3. Система СИ — основные единицы: м, кг, с, и сила тока измеряется в А (амперах). Основанием определения силы тока является уравнение

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1 I_2}{r}. \qquad (3.5.19)$$

Ампер — это сила тока, который, проходя по двум прямолинейным параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии в 1 м в вакууме, вызвал бы силу на 1 м каждого проводника, равную $2\cdot10^{-7}$ Н.

Откуда получаем для коэффициента μ_0 следующее значение:

$$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7} = 1.26\cdot10^{-6}\ Г/м\ \ (Генри/метр,\ 1Г = \frac{1м^2\cdot кг}{A^2\cdot c^2}).$$

Единица измерения магнитной индукции — 1 Тс (тесла), которая, как уже упоминалось в п. 3.4, определяется из уравнения $\vec{F} = q[\vec{v},\vec{B}]$, где все величины записаны в системе *СИ*.

$$1Тс = \frac{1Н}{1Кл\cdot1м/с} = 1\frac{кг}{A\cdot c^2}.$$

Отсюда определяются также все остальные магнитные величины в системе СИ.

4. Запишем связь между единицами заряда и тока в рассмотренных системах единиц. Из сравнения (3.5.11) и (3.5.17) в системах СГСЕ и СГСМ, а также уравнения (3.5.19) в системе СИ с учетом определения Ампера и значения константы μ_0 получаем связь между единицами тока:

$$1Био = 1CGSM_I = c\cdot1CGSE_I \approx 3\cdot10^{10}\cdot1CGSE_I = 10A.$$

Единицы заряда связаны соответственно (см. также в электростатике параграф 1.2. формулы (1.2.3) и (1.2.4.)):

$$1CGSM_q = c\cdot1CGSE_q \approx 3\cdot10^{10}CGSE_q = 10Кл.$$

Единицы индукции магнитного поля:

$$1\ Тс = 10^4\ Гс.$$

Итак, <u>основные выводы</u>.

Система СИ и ее единицы наиболее часто используются в технической физике.

Система CGSE (СГСЕ) используется для измерения чисто электрических величин: заряд, напряженность и индукция электрического поля, электрического потенциала, емкости, электропроводности и т. д.

Система CGSM (СГСМ) используется для измерения чисто магнитных величин: напряженность и индукция магнитного поля, магнитного потока, коэффициентов индукции и самоиндукции, магнитных моментов и т. д.

Гаусс объединил системы единиц CGSE и CGSM, и эта объединенная система чаще используется в физических исследованиях и работах. *Гауссова система единиц*: все электрические величины (q, I, E, D,…) измеряются в единицах *CGSE*, а магнитные величины (B, H, L, M,…) — в единицах *CGSM*. В этой системе единиц в формулы, куда входят <u>одновременно</u> магнитные и электрические величины, пишут множитель $1/c$ на каждую величину тока I и заряда q. Этот множитель превращает величины I и q, выраженные в единицах *CGSE*, в значения этих величин, выраженные в системе *CGSM*.

Итак, в системе единиц Гаусса основные соотношения с участием магнитного поля и тока записываются:

$$\vec{B} = \frac{q}{c}\frac{[\vec{v},\vec{r}]}{r^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v},\vec{B}], \qquad d\vec{F} = \frac{I}{c}[d\vec{l},\vec{B}], \qquad f = \frac{2I_1 I_2}{c^2 a}. \qquad (3.5.20)$$

Фактически мы использовали гауссову систему единиц при написании формул во всех предыдущих параграфах.

3.6. Поток и циркуляция вектора магнитной индукции

3.6.1. Поток вектора магнитной индукции

Как и любое векторное поле, магнитное поле может быть наглядно представлено с помощью линий вектора магнитной индукции $\vec{B}$. Их проводят, как и для напряженности электрического поля, так, чтобы касательная к этим линиям в каждой точке совпадала с направлением вектора $\vec{B}$, а густота линий была бы пропорциональна модулю вектора $\vec{B}$ в данном месте. Геометрическая картина позволяет судить о конфигурации рассматриваемого магнитного поля и значительно облегчает анализ конкретных ситуаций.

Для электростатического поля в главах 1 и 2 мы получили две теоремы: о потоке вектора напряженности электрического поля и его циркуляции как следствие закона Кулона. Поступим точно так же для вектора индукции магнитного поля. Определяя поток вектора $\vec{B}$ («*магнитный поток*») через поверхность ΔS обычным образом:

$$\Phi_B = \int_{\Delta S} \vec{B} d\vec{S},$$

найдем магнитный поток через замкнутую поверхность. Поскольку для магнитных полей справедлив принцип суперпозиции, поток геометрической суммы нескольких векторов индукции через любую поверхность равен алгебраической сумме потоков этих векторов. Поэтому достаточно найти поток вектора поля, создаваемого отдельным точечным зарядом, движущимся со скоростью $\vec{v}$.

Магнитное поле, создаваемое подобным точечным зарядом, определяется законом Био — Савара (3.5.1):

$$\vec{B} = \frac{q}{c}\frac{[\vec{v},\vec{r}]}{r^3}. \qquad (3.6.1)$$

При этом *силовые линии* поля имеют вид *концентрических окружностей*, плоскости которых перпендикулярны вектору скорости заряда. Это есть следствие аксиальной симметрии магнитного поля относительно вектора скорости заряда $\vec{v}$. Произвольная силовая линия, проходящая через любую выбранную замкнутую поверхность *S*, пересекает ее дважды или четное число раз (рис. 3.6.1). То есть потоки в малых окрестностях этих пересечений будут одинаковы по величине и противоположны по знаку, что следует из скалярного произведения вектора индукции поля и внешней нормали к поверхности:

$$\vec{B} d\vec{S} = -B_n dS_1 = B_n dS_2.$$

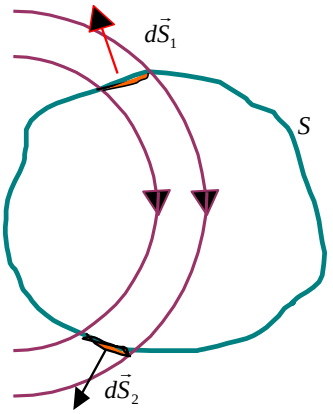


Рис. 3.6.1

Таким образом, сумма потоков через такие площадки будет равна нулю так же, как и полная сумма потоков через всю замкнутую поверхность. Иначе говоря, сколько силовых линий индукции поля входит внутрь поверхности, столько и выходит.

Итак, *поток вектора магнитной индукции* $\vec{B}$ *через любую замкнутую поверхность равен нулю*.

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \qquad (3.6.2)$$

Уравнение (3.6.2) — теорема Гаусса для вектора магнитной индукции. Эта теорема является, по существу, обобщением опыта. Она отражает тот экспериментальный факт, что линии вектора $\vec{B}$ не имеют ни начала, ни конца. Поэтому число линий, выходящих из объема, ограниченного замкнутой поверхностью S, всегда равно числу линий, входящих в этот объем. Как следствие, поток вектора $\vec{B}$ через произвольную поверхность S, ограниченную некоторым замкнутым контуром, не зависит от формы поверхности S.

Рассматриваемая теорема выражает и тот факт, что *в природе нет магнитных зарядов*, на которых бы начинались или заканчивались линии вектора $\vec{B}$. Источником магнитного поля являются не магнитные заряды, а электрические токи. Магнитное поле — *соленоидальное* или *вихревое* поле.

Примечание 39. Отсутствие магнитных зарядов — экспериментальный факт. Однако современная квантовая теория поля предсказывает существование магнитного заряда — монополя Дирака. По теории эти заряды проявляются при очень больших энергиях, недостижимых в нашем обычном макромире.

Стягивая объем, заключенный внутри поверхности S к интересующей нас точке поля, или воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \int_V div\vec{B}dV,$$

можем записать теорему Гаусса для вектора $\vec{B}$ в дифференциальной форме:

$$div\vec{B} = 0\,. \qquad (3.6.3)$$

Полученные выражения имеют *фундаментальный характер*: они справедливы не только для постоянных, но и для переменных магнитных полей.

3.6.2. Циркуляция вектора магнитной индукции

Рассмотрим циркуляцию вектора магнитной индукции по замкнутому контуру $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l}$.

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции: циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ поля постоянных токов по произвольному замкнутому контуру в системе единиц Гаусса равна произведению $4\pi/c$ на алгебраическую сумму токов, пронизывающих контур циркуляции.

Доказательство этой теоремы рассмотрим последовательно, применяя метод индукции. Вначале докажем эту теорему для прямого тока I и контура L, лежащего в плоскости, перпендикулярной направлению тока (см. рис. 3.6.2). Согласно закону Био — Савара (см. (3.5.10) — полученное ранее поле прямого тока) в каждой точке контура L вектор $\vec{B}$ поля прямого тока I направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку, а его модуль равен

$$B = \frac{1}{c}\frac{2I}{r}, \qquad (3.6.4)$$

где r — расстояние от оси тока до точки определения поля. Проведем для интересующей нас точки окружность радиусом r (см. рис. 3.6.3, на котором показан вид на контур со стороны тока — ток течет на нас). Тогда для скалярного произведения векторов индукции и элемента контура имеем

$$\vec{B}d\vec{l} = Bdl_B = \frac{2I}{cr}dl_B = \frac{2I}{c}d\varphi,$$

где $dl_B = rd\varphi$ — проекция вектора $d\vec{l}$ на направление вектора $\vec{B}$ (рис. 3.6.3). Суммируя по всему контуру, получаем:

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{2I}{c}\oint\limits_L d\varphi = \frac{2I}{c}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{c}I\,. \qquad (3.6.5)$$

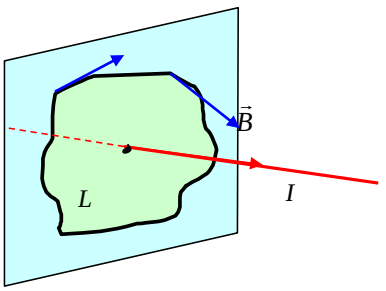


Рис. 3.6.2

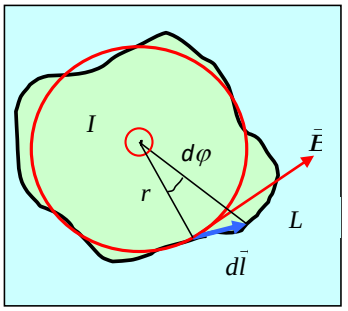


Рис. 3.6.3

Если контур L не охватывает ток I, то, как видно из рисунка 3.6.4, проекции вектора $d\vec{l}$ на направление вектора $\vec{B}$ индукции поля прямого тока I на противоположных сторонах контура будут иметь обратные знаки (на рис. 3.6.4 направление тока перпендикулярно плоскости листа). В этом случае получаем $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = 0$.

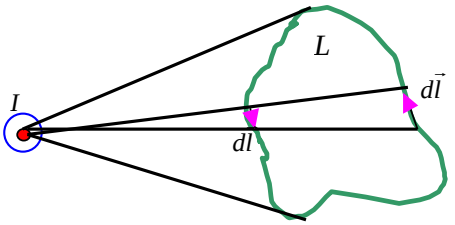


Рис. 3.6.4

Отметим, что в примере выше рассматривался частный случай: прямой ток и плоский контур. Однако полученный результат легко обобщить на произвольно ориентированный относительно направления тока контур L. Так, на рисунке 3.6.5 линии индукции магнитного поля (объемная пунктирная линия с насечками) лежат в плоскости, а выбранный контур с выделенным элементом $d\vec{l}$ (отрезок черного цвета) пересекает ее. При этом скалярное произведение равно

$$\vec{B}d\vec{l} = B \cdot dl_B = Brd\varphi.$$

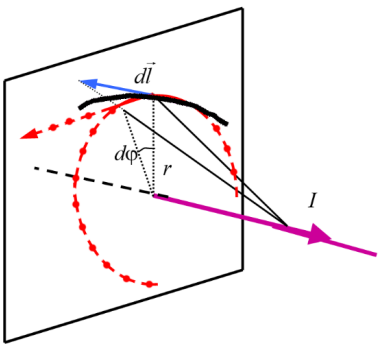


Рис. 3.6.5

Здесь под элементом угла $d\varphi$ следует понимать проекцию угла, под которым виден элемент контура $d\vec{l}$, на плоскость, перпендикулярную направлению тока. Поэтому при интегрировании по всему контуру мы вновь получаем выражение (3.6.5).

Чтобы обобщить полученный результат на случай произвольного числа прямолинейных токов, достаточно воспользоваться принципом суперпозиции для вектора магнитной индукции $\vec{B}$.

Справедливость теоремы для криволинейных токов следует из дифференциального характера закона, который будет рассмотрен в следующем пункте этого параграфа.

Итак, получаем теорему о циркуляции вектора магнитной индукции $\vec{B}$:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\sum_i I_i \qquad \text{или} \qquad \oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I\,. \tag{3.6.6}$$

Здесь I — полный ток, охватываемый контуром и равный алгебраической сумме всех токов, проходящих через контур.

При применении формулы (3.6.6) необходимо учитывать следующее.

1. Токи, проходящие через контур, суммируются алгебраически.

2. Положительное направление обхода образует правовинтовую систему с направлением тока.

3. Изменение направления обхода контура изменяет знак в правой части уравнения.

4. Токи, не охватываемые контуром, не дают вклада в сумму, стоящую в правой части уравнения.

Если токи распределены непрерывно внутри контура, то полный ток, проходящий через контур, равен

$$I = \int_S \vec{j}d\vec{S}\,, \tag{3.6.7}$$

где S — площадь поверхности, опирающаяся на контур L; $\vec{j}$ — объемная плотность тока. В этом случае теорема о циркуляции принимает вид:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}d\vec{S}\,. \tag{3.6.8}$$

Иногда теорему *о циркуляции вектора* $\vec{B}$ *называют законом полного тока*. Тот факт, что циркуляция вектора $\vec{B}$, вообще говоря, не равна нулю, означает, что магнитное поле не потенциально (в отличие от электростатического поля). Как уже упоминалось в первом пункте этого параграфа, такое поле называют *вихревым*, или *соленоидальным*.

3.6.3. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции

Полный ток через поверхность, охватываемую контуром L, определяется интегралом (3.6.7), и формула (3.6.8) определяет интегральную форму теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля. К дифференциальной форме теоремы о циркуляции можно также перейти, воспользо-

вавшись теоремой Стокса (см. п. 1.5.3), а именно: циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через поверхность, опирающуюся на этот контур:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_S rot\vec{B}d\vec{S}. \qquad (3.6.9)$$

От интеграла, выражающего циркуляцию вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру, переходим к интегралу по поверхности, определяющему поток $rot\vec{B}$. Тогда имеем

$$\int_S rot\vec{B}d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}d\vec{S}$$

и в силу произвольности выбора контура L и, следовательно, поверхности S получаем равенство подинтегральных выражений:

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \qquad (3.6.10)$$

Теорема о циркуляции, представленная в виде (3.6.10), имеет дифференциальный характер и справедлива в каждой точке. Отсюда следует, что она справедлива для произвольного магнитного поля, хотя в предыдущем пункте доказательство ограничивалось рассмотрением поля, порождаемого током, текущим по прямолинейному бесконечному проводнику. Исходя же из (3.6.10), можно доказать теорему о циркуляции в интегральном виде для произвольных токов (а не только прямолинейных), рассуждая в обратном порядке: берем любую поверхность, интегрируем, используем теорему Стокса и получаем (3.6.8).

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$, выраженная в дифференциальной форме (3.6.10), ясно показывает, что магнитное поле является *вихревым* в тех областях, где текут токи, и *безвихревым*, где токов нет. В последнем случае, в тех областях, где нет токов $\vec{j} = 0$, вектор $\vec{B}$ может быть представлен (по аналогии с электростатикой) в виде градиента *магнитного потенциала*, что облегчает в некоторых случаях решение задач. Однако такое представление невозможно в тех областях, где текут токи $\vec{j} \neq 0$. Там понятие магнитного потенциала лишено смысла. Действительно, известно дифференциальное тождество $rot\, grad\varphi_m \equiv 0$, какова бы ни была функция φ_m. Тогда, если $\vec{B} = -grad\varphi_m$, то имеем $rot\vec{B} = 0$ и $\vec{j} = 0$, что лишено смысла.

Примечание 40. В системе СИ теорема о циркуляции имеет вид:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I, \quad rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}.$$

3.6.4. Примеры вычисления магнитных полей

Теорема о циркуляции вектора индукции $\vec{B}$ справедлива для любого замкнутого контура, она есть отражение фундаментального закона об отсутствии магнитных зарядов и, как следствие, вихревого характера магнитного поля. Силовые линии индукции магнитного поля являются замкнутыми кри-

выми, не имеющими начала и конца. Для расчета индукции магнитного поля в конкретных случаях теорему о циркуляции (3.6.8) удобно использовать, когда рассматриваются симметричные конфигурации электрического тока и возбуждаемого им магнитного поля. Тогда выбором соответствующего контура интегрирования искомую индукцию $\vec{B}$ можно вынести за знак интеграла.

Приведем ряд примеров применения теоремы о циркуляции.

1. Рассмотрим длинный пустотелый проводящий цилиндр радиусом R, по поверхности которого течет ток I (рис. 3.6.6). Найдем поле внутри и снаружи цилиндра с помощью теоремы о циркуляции (3.6.8), выбирая контур интегрирования в виде концентрической окружности, на которой индукция магнитного поля постоянна по модулю в силу симметрии.

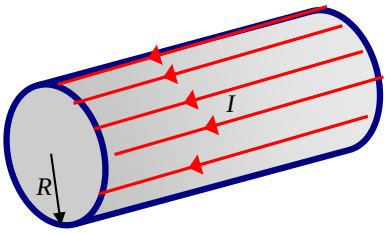


Рис. 3.6.6

А. Поле внутри цилиндра: рассматриваем контур интегрирования в виде окружности радиусом $r < R$, и поскольку внутри токов нет, то по теореме о циркуляции получаем, что магнитное поле внутри такого цилиндра равно нулю:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = 0, \text{ и отсюда } \vec{B} = 0.$$

Б. Поле снаружи цилиндра: рассматриваем контур интегрирования в виде окружности радиусом $r > R$ и тогда в результате интегрирования по такому контуру получаем индукцию магнитного поля вне цилиндра:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}I; \text{ и далее } B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}I;$$

$$B = \frac{1}{c}\frac{2I}{r}. \qquad (3.6.11)$$

Естественно, что полученное выражение совпадает с формулой (3.5.10) для индукции магнитного поля, созданной бесконечным прямолинейным током I.

2. Рассмотрим прямолинейный бесконечный провод радиусом R с постоянной по сечению плотностью токов $\vec{j}$. На рисунке 3.6.7 показан перпендикулярный срез провода, причем ток течет в направлении за плоскость рисунка. Рассмотрим магнитное поле внутри и снаружи проводника.

А. Поле внутри провода: магнитные силовые линии внутри провода — коаксиальные окружности. Циркуляция вектора $\vec{B}$ по круговому контуру L_1 радиусом r ($< R$) вдоль силовой линии равна

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}I,$$

где I — ток, охватываемый окружностью радиусом r. Тогда имеем

$$B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\pi r^2 j .$$

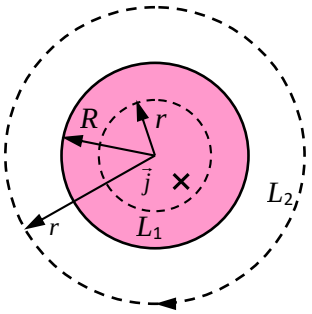


Рис. 3.6.7

Откуда поле внутри провода определяется током, проходящим через плоскость контура L_1, и его величина пропорциональна расстоянию r от оси провода:

$$B = \frac{1}{c} 2\pi j r . \qquad (3.6.12)$$

Б. Поле снаружи провода легко найти через циркуляцию вектора магнитной индукции по контуру L_2 ($r > R$), и его индукция определяется по формуле (3.6.11), где берется полный ток, текущий через все сечение провода:

$$B = \frac{1}{c}\frac{2I}{r} .$$

Итак, магнитная индукция вне провода с током падает с расстоянием до провода по закону $1/r$.

3. Рассмотрим магнитное поле внутри длинного соленоида, по которому течет ток I. Выберем контур l, проходящий внутри соленоида и снаружи, как показано на рисунке 3.6.8. Легко увидеть из симметрии, что поле внутри соленоида направлено вдоль его оси, поэтому по перпендикулярным к оси участкам контура вклад в циркуляцию равен нулю:

$$\int_{\perp} \vec{B} d\vec{l} = 0 .$$

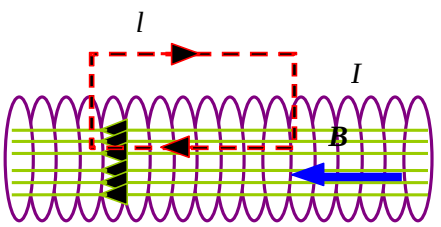


Рис. 3.6.8

Вклад в циркуляцию участка вне длинного соленоида также равен нулю: в этом можно убедиться, если наружный горизонтальный участок контура увести на бесконечность, где поле всегда равно нулю. Однако можно увидеть, что поле снаружи равно нулю просто из суперпозиции полей, создаваемых соседними витками, если они расположены достаточно близко друг к другу.

Итак, остается отличным от нуля только горизонтальный участок контура внутри соленоида, поэтому циркуляция индукции магнитного поля по выбранному контуру равна

$$B \cdot l = \frac{4\pi}{c} n \cdot I \cdot l ,$$

где n — плотность числа витков (количество на единицу длины); I — ток, текущий по проводам соленоида. Окончательно получаем поле внутри соленоида:

$$B = \frac{4\pi}{c} nI . \qquad (3.6.13)$$

Магнитное поле внутри длинного соленоида постоянно, т. е. не зависит от расстояния до оси соленоида, таким образом, внутри соленоида получаем однородное магнитное поле.

3.7. Векторный потенциал магнитостатического поля. Магнитный момент

3.7.1. Векторный потенциал. Неоднозначность, калибровка и градиентная инвариантность

Для описания магнитного поля мы получили в предыдущем параграфе уравнения (3.6.3) и (3.6.10). Сравним эти уравнения с уравнениями электростатического поля, найдем отличия и аналогии.

Ранее для электростатического поля мы записали уравнения поля в следующем дифференциальном виде $div\vec{E} = 4\pi\rho$ (следствие закона Кулона $E \sim 1/r^2$) и $rot\vec{E} = 0$ (потенциальность поля).

Оба вектора $\vec{E}$ и $\vec{B}$ — силовые характеристики электрического и магнитного полей. В главе 1 (п. 1.6 и 1.7) мы вводили понятие потенциала как энергетическую характеристику электростатического поля. Возникает вопрос: можно ли наряду с потенциалом электростатического поля ввести аналогичную величину для поля магнитного, которая являлась бы его энергетической характеристикой, и найти соответствующее уравнение, решением которого она бы являлась?

Напомним основные результаты, полученные ранее в п. 1.6–1.7. Для электрического поля вводили скалярную потенциальную функцию $\varphi(x,y,z) = \varphi(\vec{r})$ (см. также соотношение (1.6.7)), определяющую распределение потенциала в пространстве.

Пусть (x_a, y_a, z_a) — координаты точки наблюдения А (вектор $\vec{r}_a$ на рис. 3.7.1), в которой определяем потенциал. Координаты точек пространства (x_q, y_q, z_q), где распределены заряды с плотностью ρ, определяются вектором $\vec{r}_q$. Тогда потенциал электрического поля в точке А записывается:

$$\varphi(x_a, y_a, z_a) = \int \frac{\rho(x_q, y_q, z_q)}{r_{aq}} dV_q , \qquad (3.7.1)$$

где $\vec{r}_{aq} = \vec{r}_a - \vec{r}_q$ — разность координат; dV_q — элемент объема заряженного тела, а интеграл берется по всему объему этого тела.

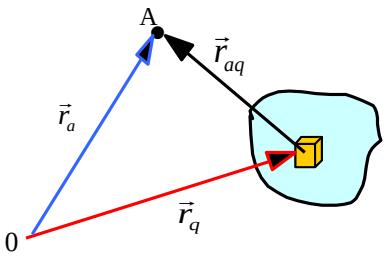


Рис. 3.7.1

Вообще для любой скалярной функции всегда можно взять ее градиент, и при этом ротор ее градиента тождественно равен нулю (условие потенциальности силового поля):

$$rot(grad\varphi) \equiv [\nabla, \nabla\varphi] \equiv 0 . \qquad (3.7.2)$$

Потенциал электростатического поля (3.7.1) — скалярная функция, при этом вектор напряженности $\vec{E}$ определяется как градиент потенциала $\vec{E} = -\nabla\varphi(x_a, y_a, z_a) = -\nabla_a\varphi$, поэтому уравнение $rot\vec{E} = 0$ выполняется автоматически. Напомним также, что дифференциальное уравнение для потенциала — уравнение Пуассона имеет вид:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho .$$

Решением этого уравнения и является потенциал (3.7.1).

Магнитное поле $\vec{B}$ носит существенно другой характер, чем электрическое $\vec{E}$. В общем случае $rot\vec{B} \neq 0$ и вектор индукции $\vec{B}$ не могут быть градиентом скалярной функции. Уравнения магнитостатического поля (3.6.3) и (3.6.10), напомним, имеют вид

$$\nabla\vec{B} = 0, \qquad \left[\nabla, \vec{B}\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{j} , \qquad (3.7.3)$$

где $\vec{j}$ — объемная плотность тока.

Однако в векторной алгебре известно другое тождество — дивергенция от ротора вектора тождественно равна нулю:

$$div(rot\vec{A}) \equiv (\nabla, [\nabla, \vec{A}]) \equiv 0 . \qquad (3.7.4)$$

Физический смысл этого векторного тождества состоит в том, что у соленоидального (вихревого) поля нет его источников — зарядов. Силовые линии такого поля представляют собой замкнутые кривые. Исходя из (3.7.4), индукцию магнитного поля можно представить как ротор некоторой векторной функции $\vec{A}$:

$$\vec{B} = rot\vec{A} \ , \tag{3.7.5}$$

где $\vec{A}$ носит название *векторного потенциала*. При этом первое уравнение из (3.7.3) выполняется автоматически. Зачем вводить векторный потенциал и каков его физический смысл, поясним несколько позже. Пока ограничимся только тем, что если векторный потенциал нам известен, то магнитное поле находится из соотношения (3.7.5).

Выбор векторного потенциала *неоднозначен*. Поле с заданной индукцией $\vec{B}$ может быть описано многими векторными потенциалами. Пусть векторный потенциал $\vec{A}$ описывает магнитное поле $\vec{B}$, тогда другой векторный потенциал

$$\vec{A}' = \vec{A} + grad\chi \tag{3.7.6}$$

при произвольной функции χ описывает то же самое поле $\vec{B}$. В самом деле, в силу (3.7.2) имеем:

$$\vec{B}' = rot\vec{A}' = rot\vec{A} + rot(grad\chi) = rot\vec{A} = \vec{B} \, . \tag{3.7.7}$$

Преобразование векторного потенциала (3.7.6) называют *градиентным*, а эквивалентность векторов $\vec{A}$ и $\vec{A}'$ в смысле описания одного и того же магнитного поля — *градиентной инвариантностью*. Неоднозначность векторного потенциала аналогична неоднозначности скалярного потенциала в теории электростатического поля. Только потенциал φ определяется с точностью до произвольной постоянной, а векторный потенциал $\vec{A}$ — с точностью до произвольной функции определенного класса.

Благодаря градиентному преобразованию на векторный потенциал можно накладывать дополнительные условия, которые могут быть удовлетворены подбором скалярной функции χ.

3.7.2. Пример однородного магнитного поля

Рассмотрим случай однородного магнитного поля и определим его векторный потенциал. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси *z*: $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Тогда исходя из (3.7.5) имеем следующие уравнения для компонент векторного потенциала:

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ B_y = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ B_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = B \end{cases} . \tag{3.7.8}$$

В частности, имеем три решения системы (3.7.8) (как следствие неоднозначности определения векторного потенциала):

(1) $A_y = Bx, \quad A_x = A_z = 0$; (3.7.9а)

(2) $A_x = -By, \quad A_y = A_z = 0$; (3.7.9б)

(3) $A_x = -\frac{1}{2}By, \quad A_y = \frac{1}{2}Bx, \quad A_z = 0$, т. е. $\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{B},\vec{r}\right]$. (3.7.9в)

Нетрудно убедиться, что, подействовав оператором ротора на эти решения с учетом условия $\vec{B} = const$, получаем выполнение уравнения (3.7.5). Например, проверим третье уравнение (3.7.9в):

$$rot\vec{A} \equiv -\left[\nabla, \frac{1}{2}\left[\vec{r},\vec{B}\right]\right] = -\frac{1}{2}\left(\vec{B},\nabla\right)\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{B}\left(\nabla,\vec{r}\right) = -\frac{1}{2}\vec{B} + \frac{3}{2}\vec{B} = \vec{B}.$$

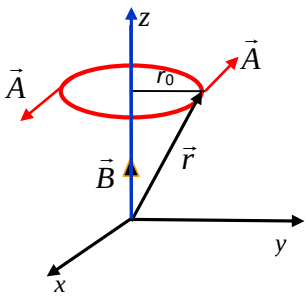


Рис. 3.7.2

Примечание 41. Напомним, что, в*ыполняя операции с векторами, необходимо позаботиться, чтобы операторный множитель всегда находился впереди тех сомножителей, на которые он действует в исходном выражении*. Это также относится к формуле БАЦ–ЦАБ для двойного векторного произведения.

Поскольку вектор $\vec{A}$ в виде (3.7.9в) перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{B}$ и $\vec{r}$, и зависит только от модуля *r*, то отсюда получаем, что силовые линии вектора $\vec{A}$ представляют собой окружности вокруг направления индукции однородного магнитного поля (см. рис. 3.7.2). Иначе говоря, вектор $\vec{A}$ «вращается» вокруг оси *z*, причем его величина определяется $A = \frac{1}{2}Br_0$, где r_0 — радиус окружности относительно оси *z* (рис. 3.7.2). Вычислим, чему равен интеграл $\oint \vec{A}d\vec{l}$ по окружности:

$$A \cdot 2\pi r_0 = \frac{1}{2}Br_0 2\pi r_0 = B \cdot \pi r_0^2.$$

Таким образом, получили, что интеграл по замкнутому контуру (окружности) равен потоку вектора $\vec{B}$ через круг радиусом r_0, и это не случайно, так как в общем случае это же следует из теоремы Стокса:

$$\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \int_S rot\vec{A}d\vec{S} = \int_S \vec{B}d\vec{S}. \quad (3.7.10)$$

В чем состоит удобство и смысл введения векторного потенциала? Проявляется ли он на опыте? К этим вопросам мы вернемся ниже, проясним его физический смысл, а затем снова рассмотрим векторный потенциал при описании электромагнитных волновых процессов.

3.7.3. Уравнение для векторного потенциала. Векторный потенциал токов

Какому уравнению удовлетворяет векторный потенциал? Подставим (3.7.5) во второе уравнение (3.7.3), представляющее дифференциальную форму теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции. При этом воспользуемся правилом БАЦ–ЦАБ и свойствами операторного сомножителя (оператор стоит слева от величины, на которую он действует):

$$\left[\nabla,\vec{B}\right]=\left[\nabla,\left[\nabla,\vec{A}\right]\right]=\nabla\left(\nabla,\vec{A}\right)-\left(\nabla,\nabla\right)\vec{A}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,.$$

Воспользуемся неоднозначностью потенциала, наложив на потенциал определенное дополнительное условие — *калибровку*. В магнитостатике обычно выбирают следующую калибровку (отсутствие источников векторного потенциала):

$$div\vec{A}\equiv\left(\nabla,\vec{A}\right)=0\,. \qquad (3.7.11)$$

Тогда уравнение для векторного потенциала магнитостатического поля имеет следующий вид:

$$\Delta\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,. \qquad (3.7.12)$$

Поскольку это векторное уравнение, то на самом деле мы имеем три уравнения:

$$\begin{aligned}\Delta A_x&=-\frac{4\pi}{c}j_x;\\ \Delta A_y&=-\frac{4\pi}{c}j_y;\\ \Delta A_z&=-\frac{4\pi}{c}j_z.\end{aligned} \qquad (3.7.13)$$

где A_i, j_i — компоненты векторного потенциала и плотности токов. Каждое из этих трех уравнений аналогично уравнению Пуассона в электростатике (см. уравнение (1.6.13)), решение которого мы уже знаем. Так, например, решение для x-й компоненты векторного потенциала можно записать в виде

$$A_x\left(\vec{r}_a\right)=\frac{1}{c}\int\frac{j_x\left(\vec{r}_q\right)dV_q}{r_{aq}}\,, \qquad (3.7.14)$$

где $\vec{r}_a\left(x_a,y_a,z_a\right)$ — координаты точки наблюдения, а $\vec{r}_q\,(x_q,\,y_q,\,z_q)$ — координаты точек, где распределены токи $\vec{j}$, $r_{aq}=\left|\vec{r}_a-\vec{r}_q\right|$ (см. рис. 3.7.3). Отметим, что дифференцирование в (3.7.12) и (3.7.13) происходит по координате $\vec{r}_a$. В векторном виде решение системы (3.7.13) можно записать в виде уравнения, имеющего название *векторный потенциал объемных токов*:

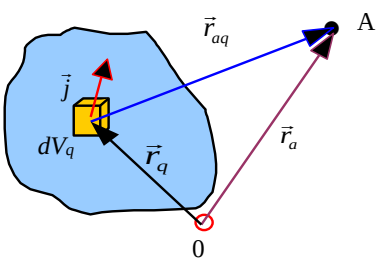


Рис. 3.7.3

$$\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}_q)dV_q}{r_{aq}}. \qquad (3.7.15)$$

Векторный потенциал линейных токов равен соответственно

$$\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c}\int \frac{I(\vec{r}_q)d\vec{l}_q}{r_{aq}}. \qquad (3.7.16)$$

Примечание 42. В системе СИ этот потенциал записывается $\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{\mu}{4\pi}\oint \frac{I(\vec{r}_q)d\vec{l}_q}{|\vec{r}_a - \vec{r}_q|}$.

В заключение этого пункта сделаем некоторые простейшие преобразования, показывающие правильность полученных соотношений. Проверим, что векторный потенциал токов (3.7.15) подчиняется условию калибровки (3.7.11). Подействуем оператором дивергенции на (3.7.15) и внесем оператор под интеграл:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c}\int \vec{\nabla}\left(\vec{j}(\vec{r}_q)\frac{1}{r_{aq}}\right)dV_q. \qquad (3.7.17)$$

Здесь оператор «градиента» осуществляет дифференцирование по точкам наблюдения $\vec{r}_a$:

$$\nabla_a \equiv grad_a = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x_a} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y_a} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z_a}.$$

От дифференцирования по координатам $\vec{r}_a$ — точки наблюдения A — перейдем к дифференцированию по координатам элементов тока $\vec{r}_q$ под интегралом следующим образом:

$$\left\{\vec{\nabla}_a\cdot\left(\vec{j}(\vec{r}_q)\frac{1}{r_{aq}}\right) = \vec{j}(\vec{r}_q)\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{aq}}\right) = -\vec{j}(\vec{r}_q)\vec{\nabla}_q\left(\frac{1}{r_{aq}}\right) = -\vec{\nabla}_q\left(\vec{j}(\vec{r}_q)\frac{1}{r_{aq}}\right) + \frac{1}{r_{aq}}\left(\vec{\nabla}_q\vec{j}(\vec{r}_q)\right)\right\}. \qquad (3.7.18)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{aq}}\right) = -\vec{\nabla}_q\left(\frac{1}{r_{aq}}\right).$$

Для стационарных токов имеем из теоремы неразрывности

$$\vec{\nabla}_q\vec{j}(\vec{r}_q) = div\vec{j} = 0.$$

Тогда, продолжая (3.7.17) по теореме Гаусса — Остроградского, получаем равенство дивергенции векторного потенциала нулю:

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r}_a) = -\frac{1}{c}\int_v \vec{\nabla}_q\left(\vec{j}(\vec{r}_q)\frac{1}{r_{aq}}\right)dV_q = -\frac{1}{c}\oint \vec{j}(\vec{r}_q)\frac{1}{r_{aq}}d\vec{S} = -\frac{1}{c}\oint \frac{j_n dS}{r_{aq}} = 0, \qquad (3.7.19)$$

так как на поверхности проводников нормальная составляющая вектора плотности тока $j_n = 0$. Таким образом, выполняется калибровка потенциала токов (3.7.15) и (3.7.16).

А что получим для индукции магнитного поля $\vec{B}$? Подействуем оператором ротора на векторный потенциал (3.7.15):

$$\vec{B} = \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] = \frac{1}{c}\int\left[\vec{\nabla}_a, \frac{\vec{j}\left(\vec{r}_q\right)}{r_{aq}}\right]dV_q = -\frac{1}{c}\int\left[\vec{j}\left(\vec{r}_q\right), \vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r_{aq}}\right)\right]dV_q = \\ = \frac{1}{c}\int\frac{\left[\vec{j}\left(\vec{r}_q\right), \vec{r}_{aq}\right]}{r_{aq}^3}dV_q. \qquad (3.7.20)$$

Получили закон Био — Савара в интегральной форме (см. формулу (3.5.6)), что и следовало ожидать.

3.7.4. О физическом смысле векторного потенциала

Обычно в классической физике векторный потенциал $\vec{A}$ рассматривается как вспомогательная величина, не имеющая физического смысла, т. е. ненаблюдаемая и неизмеряемая величина. Такая интерпретация восходит к работам О. Хевисайда и Г. Герца, рассматривавших электромагнитное поле довольно формально и интересовавшихся больше методами расчетов, чем физическими свойствами векторного потенциала. Однако Максвелл вводил векторный потенциал как величину, пропорциональную импульсу (количеству движения) сгустка электромагнитного поля, сопровождающего движущийся электрический заряд.

В середине XX в. Я. Ааронов и Д. Бом предсказали интересный эффект, позже обнаруженный экспериментально. В области, где отсутствует магнитное поле $\vec{B} = 0$, но существует отличный от нуля векторный потенциал, изменение векторного потенциала меняет движение электронов, так как меняется импульс сгустка электромагнитного поля, сопровождающего электрон.

Такая ситуация складывается для длинного соленоида с током, у которого магнитное поле сосредоточено внутри цилиндра, а во внешней области магнитное поле равно нулю.

На рисунке 3.7.4 показан соленоид в разрезе, причем магнитное поле внутри соленоида направлено за плоскость рисунка. Индукция магнитного поля, определяемая соотношением $B = \partial A/\partial r$, терпит на границе соленоида (на радиусе r_0) конечный скачок (кривая *1* на рис. 3.7.4), а зависимость векторного потенциала от расстояния до центра $A(r)$ всего лишь меняет наклон (пунктирная кривая на рис. 3.7.4). Таким образом, векторный потенциал отличен от нуля и вне соленоида, т. е. там, где индукция магнитного поля обращается в нуль. Отметим, приведенная на рисунке зависимость $B(r)$ (кривая *1*), где r_0 — радиус соленоида, является довольно грубой, так как не учитывает некоторых деталей на границе соленоида, но дает правильное качественное представление.

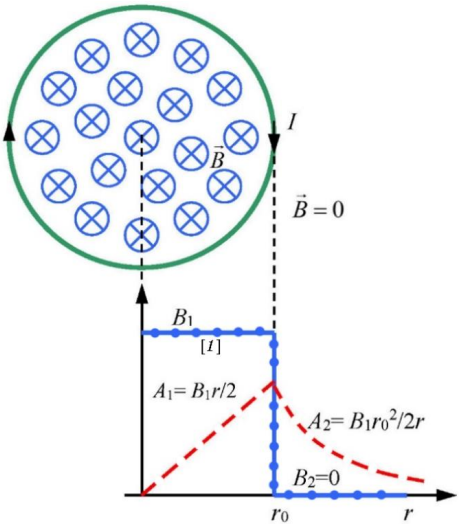


Рис. 3.7.4

И. Ааронов и Д. Бом рассматривали рассеяние электронов на соленоиде, причем электроны, направленные перпендикулярно оси соленоида, могли огибать соленоид сверху или снизу (см. рис. 3.7.5). Электронам присущи волновые свойства, и в отсутствие тока в катушке электронные волны, огибая соленоид (в этой части курса не будем вдаваться в детали), создают на экране некоторую интерференционную картину.

При появлении в соленоиде тока оказывается, что интерференционная картина сдвигается, хотя электроны по-прежнему движутся во внешней области, где индукция магнитного поля $\vec{B}$ равна нулю. Это означает, что *изменение векторного потенциала* в пространстве, окружающем соленоид, *меняет фазы электронных волн*, что, в свою очередь, приводит к изменению наблюдаемой на экране интерференционной картины. Следовательно, по изменению интерференционной картины можно определить изменение векторного потенциала. Таким образом, *изменение векторного потенциала магнитного поля оказывается наблюдаемой и измеряемой физической величиной*.

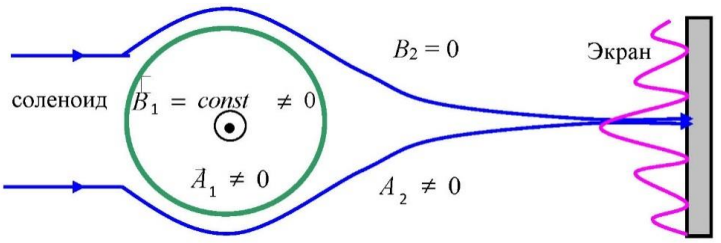


Рис. 3.7.5

Необходимо отметить, что объяснение эффекта Ааронова — Бома возможно только при учете квантовых законов движения электронов в магнитном поле.

Кроме того, хотя в классической физике нет прямого способа измерения векторного потенциала $\vec{A}$, введение его очень удобно для теории поля. Так, с введением векторного потенциала упрощается выражение для энергии взаимодействия системы зарядов и токов с электромагнитным полем, векторный потенциал определяет электрокинетический импульс заряженной частицы в электромагнитном поле, с его помощью упрощается запись системы уравнений Максвелла. Помимо всего прочего векторный потенциал $\vec{A}$ вместе со скалярным потенциалом электростатического поля φ образуют 4-вектор, компоненты которого при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую преобразуются согласно преобразованиям Лоренца.

Однако отметим, что все вышесказанное было получено для статических полей, когда нет зависимости от времени. В дальнейшем мы рассмотрим зависящий от времени векторный потенциал и соответствующие электромагнитные поля.

Примечание 43. Оливер Хевисайд (1850–1925), английский физик;
Генрих Рудольф Герц (1857–1894), немецкий физик;
Дэвид Джозеф Бом (1917–1992), американский физик;
Якир Ааронов (1932 г. р.), израильский физик.

3.7.5. Векторный потенциал и магнитное поле витка с током

В этом пункте для примера используем векторный потенциал для вычисления магнитного поля витка или контура с током. Перепишем векторный потенциал линейных токов (3.7.16) в виде

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\oint \frac{I d\vec{l}_q}{\left|\vec{r} - \vec{r}_q\right|}, \qquad (3.7.21)$$

где $d\vec{l}_q$ — элемент контура с током I (см. рис. 3.7.6); $\vec{r}$ и $\vec{r}_q$ — радиус-векторы до точки наблюдения и до элемента контура соответственно.

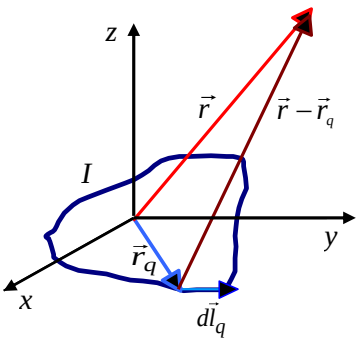


Рис. 3.7.6

Пусть $r_q << r$, т. е. рассмотрим малый контур на больших расстояниях, тогда можно использовать следующее разложение:

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r_q^2-2\left(\vec{r},\vec{r}_q\right)}}\approx\frac{1}{r}+\frac{\left(\vec{r},\vec{r}_q\right)}{r^3}. \qquad (3.7.22)$$

Ограничимся первыми двумя членами разложения и, подставляя их в (3.7.21), имеем

$$\vec{A}=\frac{I}{c}\oint\frac{d\vec{l}_q}{r}+\frac{I}{c}\oint\frac{\left(\vec{r}_q,\vec{r}\right)}{r^3}d\vec{l}_q\,. \qquad (3.7.23)$$

Первое слагаемое в (3.7.23) равно нулю:

$$\frac{I}{cr}\oint d\vec{l}_q=0\,,$$

в силу векторного обхода замкнутого контура.

Разберемся со вторым слагаемым в (3.7.23):

$$\frac{I}{cr^3}\oint\left(\vec{r}_q,\vec{r}\right)d\vec{l}_q\,. \qquad (3.7.24)$$

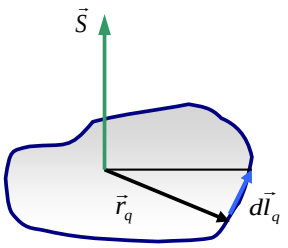


Рис. 3.7.7

Для вычисления интеграла по контуру (3.7.24) воспользуемся определением вектора площадки:

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\oint\left[\vec{r}_q,d\vec{l}_q\right] \qquad (3.7.25)$$

(см. рис. 3.7.7), а также известным векторным тождеством для произвольного постоянного вектора $\vec{b}$:

$$\oint d\vec{l}_q\left(\vec{r}_q,\vec{b}\right)=-\left[\vec{b},\frac{1}{2}\oint\left[\vec{r}_q,d\vec{l}_q\right]\right]=\left[\oint d\vec{S},\vec{b}\right]=\left[\vec{S},\vec{b}\right], \qquad (3.7.26)$$

где интегрирование проводится по замкнутому контуру с площадью S (рис. 3.7.7). Доказательство (3.7.26) приведено в Приложениях 1 и 2.

Видно, что в качестве произвольного вектора $\vec{b}$ можно рассмотреть вектор, входящий в (3.7.24):

$$\vec{b}=\frac{I\vec{r}}{cr^3}\,.$$

Тогда интеграл (3.7.24), следуя (3.7.26), можно записать в виде

$$\vec{A}=\frac{I}{cr^3}\oint\left(\vec{r}_q,\vec{r}\right)d\vec{l}_q=\frac{I}{cr^3}\left[\vec{S},\vec{r}\right]. \qquad (3.7.27)$$

Итак, в общем случае векторный потенциал малого витка с током равен

$$\vec{A}=\frac{I}{cr^3}\left[\vec{S},\vec{r}\right]=\frac{\left[\vec{\boldsymbol{M}},\vec{r}\right]}{r^3}. \qquad (3.7.28)$$

Здесь мы ввели *магнитный момент* $\vec{\boldsymbol{M}}$ витка с током:

$$\vec{\boldsymbol{M}}=\frac{I}{c}\vec{S}\,. \qquad (3.7.29)$$

Магнитный момент определяет векторный потенциал магнитного поля и играет в магнетизме ту же роль, что и электрический дипольный момент диполя в электростатике (сравните с формулами (1.7.1) и (1.7.4)).

Теперь, используя полученное выражение для векторного потенциала витка с током и определение $\vec{B} = rot\vec{A}$, сосчитаем *магнитное поле витка с током*, пользуясь правилом БАЦ–ЦАБ:

$$\vec{B} = \left[\nabla, \vec{A}\right] = \left[\nabla, \left[\frac{\vec{\mathcal{M}}, \vec{r}}{r^3}\right]\right] = \vec{\mathcal{M}}\left(\nabla, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \left(\vec{\mathcal{M}}, \nabla\right)\frac{\vec{r}}{r^3}. \qquad (3.7.30)$$

Первое слагаемое равно нулю, так как $\left(\nabla, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) \equiv div\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$, и, далее, для второго слагаемого имеем

$$\vec{B} = -\frac{1}{r^3}\left(\vec{\mathcal{M}}, \nabla\right)\vec{r} - \vec{r}\left(\vec{\mathcal{M}}, \nabla\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{\vec{\mathcal{M}}}{r^3} + 3\frac{\left(\vec{\mathcal{M}}, \vec{r}\right)}{r^5}\vec{r};$$

$$\vec{B} = \frac{3\left(\vec{\mathcal{M}}, \vec{r}\right)}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r^3}. \qquad (3.7.31)$$

Итак, выражение для магнитного поля, созданного витком с током, в точности совпадает с выражением для электрического поля электрического диполя при замене дипольного момента диполя на магнитный момент витка с током.

Примечание 44. В системе *СИ* имеем $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[\vec{\mathcal{M}}, \vec{r}\right]}{r^3}$, $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$

Приложение 1. Докажем следующую формулу:

$$\oint_L \left(\vec{\rho}, \vec{b}\right)d\vec{l} = \left[\int_S d\vec{S}, \vec{b}\right] = \left[\vec{S}, \vec{b}\right],$$

где $\vec{b}$ — некоторый вектор в пространстве; $\vec{\rho} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ — вектор, определяющий координаты элемента $d\vec{l}$ контура *L*, а интегрирование ведется по контуру и поверхности, опирающейся на контур. Умножим равенство скалярно на произвольный, но постоянный вектор $\vec{a}$, который можно ввести под знак интеграла:

$$\left(\vec{a}, \oint_L \left(\vec{\rho}, \vec{b}\right)d\vec{l}\right) = \oint_L \left(\vec{\rho}, \vec{b}\right)\vec{a}d\vec{l} = \int_S rot\left(\left(\vec{\rho}, \vec{b}\right)\vec{a}\right)d\vec{S} = \int_S \left\{\left(\vec{\rho}, \vec{b}\right)rot\vec{a} + \left[\nabla\left(\vec{\rho}, \vec{b}\right), \vec{a}\right]\right\}d\vec{S}.$$

Здесь мы воспользовались теоремой для циркуляции вектора $\left(\vec{\rho}, \vec{b}\right)\vec{a}$, по которой циркуляция вектора $\left(\vec{\rho}, \vec{b}\right)\vec{a}$ по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через поверхность, опирающуюся на этот контур, и следующим векторным соотношением:

$$rot\left(\varphi\vec{a}\right) = \varphi rot\vec{a} + \left[\nabla\varphi, \vec{a}\right].$$

Далее, поскольку вектор $\vec{a} = const$, то $rot\vec{a} = 0$ и получаем, продолжая равенство:

$$= \int_S \left[\nabla\left(\vec{\rho}, \vec{b}\right), \vec{a}\right]d\vec{S} = \int_S \left[\vec{b}, \vec{a}\right]d\vec{S} = -\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\int_S d\vec{S} = -\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \int_S d\vec{S}\right]\right) = \left(\vec{a}, \left[\int_S d\vec{S}, \vec{b}\right]\right).$$

Здесь учли, что $\nabla\left(\vec{\rho}, \vec{b}\right) = \vec{b}$, и воспользовались циклической перестановкой в смешанном (скалярном и векторном) произведении векторов. Из последнего соотношения в силу произвольности постоянного вектора $\vec{a} = const$ получаем вышеуказанное равенство.

Приложение 2. Можно формулу (3.7.26) получить непосредственно из прямых вычислений. Пусть для простоты имеем плоский контур, причем начало координат лежит внутри контура, а оси (x, y) — в плоскости контура, т. е.

$$\vec{r}_q = x_q\vec{e}_x + y_q\vec{e}_y + 0\cdot\vec{e}_z \quad \text{и} \quad d\vec{l}_q = dx_q\vec{e}_x + dy_q\vec{e}_y + 0\cdot\vec{e}_z .$$

Тогда записываем

$$\oint(\vec{r}_q,\vec{r})d\vec{l}_q = \oint(x_q x + y_q y)d\vec{l}_q = \oint(x_q x + y_q y)(dx_q\vec{e}_x + dy_q\vec{e}_y).$$

Считаем слагаемые отдельно — y-ю компоненту и x-ю компоненту:

$$\oint(x_q x + y_q y)dy_q = x\oint x_q dy_q + y\frac{y_q^2}{2}\Big|_{-a}^{a} = xS_z + 0 = xS_z;$$

$$\oint(x_q x + y_q y)dx_q = x\frac{x_q^2}{2}\Big|_{-a}^{a} + y\oint y_q dx_q = 0 - yS_z = -yS_z .$$

Здесь мы ввели величину a, характеризующую пределы изменения переменных x (y) контура, и определили проекцию вектора малой площадки контура на ось z как интеграл $S_z = \oint x_q dy_q = -\oint y_q dx_q$. Во втором интеграле получаем отрицательное значение, так как $dx_q < 0$ там, где $y_q > 0$. Итак, получаем для компонент векторного потенциала:

$$A_x = -\frac{IyS_z}{cr^3}, \quad A_y = \frac{IxS_z}{cr^3}.$$

Видно, что это есть компоненты векторного произведения радиус-вектора на вектор площадки контура.

3.8. Контур с током в магнитном поле

3.8.1. Контур с током в однородном магнитном поле

Рассмотрим силу, действующую на виток с током I в постоянном (однородном) магнитном поле $\vec{B} = const$ (см. рис. 3.8.1). Исходя из формулы Ампера, имеем силу, действующую на элемент контура $d\vec{l}$ с током:

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\left[d\vec{l},\vec{B}\right].$$

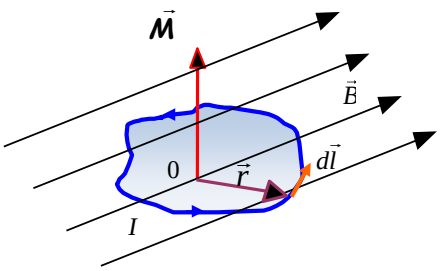


Рис. 3.8.1

Интегрируя по всему контуру витка, получаем, что полная сила, действующая на виток с током, равна нулю:

$$\vec{F} = \frac{I}{c}\oint\left[d\vec{l},\vec{B}\right] = \frac{I}{c}\left[\oint d\vec{l},\vec{B}\right] = 0, \quad (3.8.1)$$

так как для замкнутого провода $\oint d\vec{l} = 0$.

Однако момент сил, действующих на контур с током в магнитном поле, отличен от нуля $\vec{M} \neq 0$. Так, например, стрелка компаса в магнитном поле Земли под действием момента сил поворачивается вдоль направления магнитного поля. Момент сил, действующих на элемент контура с током $d\vec{l}$ в магнитном поле $\vec{B}$ относительно точки 0, определяется выражением

$$d\vec{M} = \left[\vec{r}, d\vec{F}\right] = \frac{I}{c}\left[\vec{r}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]\right], \qquad (3.8.2)$$

где вектор $\vec{r}$ определяет положение элемента контура $d\vec{l}$ относительно точки 0. Тогда полный момент сил Ампера, действующих на виток с током, равен

$$\vec{M} = \oint d\vec{M} = \frac{I}{c}\oint\left[\vec{r}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]\right] = \frac{I}{c}\oint\left(d\vec{l}\left(\vec{r}, \vec{B}\right) - \vec{B}\left(\vec{r}, d\vec{l}\right)\right) = \frac{I}{c}\oint d\vec{l}\left(\vec{r}, \vec{B}\right) - \frac{I}{c}\oint \vec{B}\left(\vec{r}, d\vec{l}\right). \qquad (3.8.3)$$

Первый интеграл в (3.8.3) мы уже считали (см. формулы (3.7.24), (3.7.26) и (3.7.27)), когда получали выражение для векторного потенциала, с той лишь разницей, что вместо вектора $\vec{B}$ ранее стоял вектор $\vec{b} = I\,\vec{r}/cr^3$:

$$\frac{I}{c}\oint d\vec{l}\left(\vec{r}, \vec{B}\right) = \frac{I}{c}\left[\vec{S}, \vec{B}\right] = \vec{\mathcal{M}} \times \vec{B} \equiv \left[\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}\right]. \qquad (3.8.4)$$

Здесь $\vec{\mathcal{M}}$ магнитный момент контура. Второй интеграл в (3.8.3), учитывая, что $\vec{B} = const$, равен нулю:

$$-\frac{I}{c}\oint \vec{B}\left(\vec{r}, d\vec{l}\right) = -\frac{I}{c}\vec{B}\oint\left(\vec{r}, d\vec{l}\right) = -\frac{I}{c}\vec{B}\oint\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}r^2\right)d\vec{l} = 0, \qquad (3.8.5)$$

так как интеграл по замкнутому контуру от операции $grad$ равен нулю. В самом деле, при переходе по теореме Стокса к потоку ротора вектора мы получаем под интегралом $rot(grad)$, который тождественно равен нулю: $rot\,grad \equiv 0$.

Таким образом, *механический момент сил* определяется следующим выражением:

$$\vec{M} = \left[\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}\right]. \qquad (3.8.6)$$

Магнитное поле стремится развернуть магнитный момент $\vec{\mathcal{M}}$ контура с током вдоль поля (вектора $\vec{B}$, см. рис. 3.8.2). Такое положение контура устойчиво, так как при $\vec{\mathcal{M}} \parallel \vec{B}$ получаем $\vec{M} = 0$, так же как и $\vec{F}$.

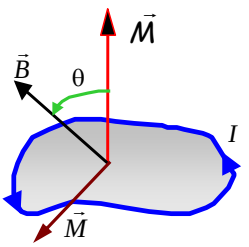


Рис. 3.8.2

Из механики известно, что если результирующая сила всех сил, действующих на систему, равна нулю, то суммарный момент этих сил не зависит от точки, относительно которой определяют моменты этих сил. Поэтому в нашем случае можно просто говорить о моменте «амперовых» сил, действующих на виток с током.

Получим *потенциальную энергию контура с током в магнитном поле*. Тот факт, что поле стремится ориентировать контур относительно направления вектора $\vec{B}$, означает, что потенциальная энергия контура с током будет зависеть от его ориентации в поле. Работа момента сил при малом повороте на угол $d\theta$ (рис. 3.8.2) равна

$$dW = Md\theta = \mathcal{M} \cdot B\sin\theta d\theta.$$

Тогда запас энергии при произвольном угле между векторами индукции магнитного поля и магнитного момента равен

$$W = -\mathcal{M} \cdot B\cos\theta + const = -\mathcal{M} \cdot B\cos\theta.$$

Постоянную можно положить равной нулю. Окончательно получаем выражение для потенциальной энергии в виде

$$W = -\vec{M}\vec{B}. \qquad (3.8.7)$$

Напомним, что аналогичное выражение мы получали для энергии диполя в электрическом поле (см. (1.7.14) в п. 1.7).

3.8.2. Контур с током в неоднородном магнитном поле

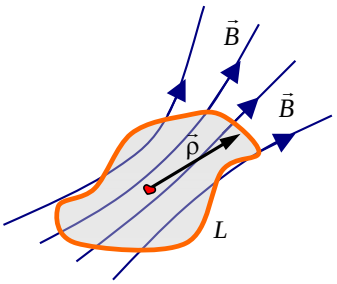


Рис. 3.8.3

Рассмотрим неоднородное магнитное поле и контур с током, который будем считать достаточно малым по сравнению с областью существенного изменения магнитного поля (рис. 3.8.3). Найдем, как меняется вблизи контура индукция внешнего магнитного поля $\vec{B}(\vec{\rho})$, где $\vec{\rho}$ — координаты контура, отсчитанные от его условного центра. Для этого представим компоненты неоднородного поля вблизи границы витка как сумму однородного магнитного поля на границе и изменения поля в её окрестностях в первом порядке разложения по степеням проекций вектора $\vec{\rho}$:

$$B_x(\vec{\rho}) = B_{0x} + \vec{\rho}\vec{\nabla}B_x = B_{0x} + \rho_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + \rho_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + \rho_z\frac{\partial B_x}{\partial z};$$

$$B_y(\vec{\rho}) = B_{y_0} + \vec{\rho}\vec{\nabla}B_y; \qquad (3.8.8)$$

$$B_z(\vec{\rho}) = B_{z_0} + \vec{\rho}\vec{\nabla}B_z.$$

Таким образом, получаем для всего вектора индукции магнитного поля в окрестности малого контура:

$$\vec{B}(\vec{\rho}) = \vec{B}_0 + (\vec{\rho},\vec{\nabla})\vec{B}. \qquad (3.8.9)$$

Запишем силу, действующую в магнитном поле на элемент $d\vec{l}$ витка с током:

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\left[d\vec{l},\vec{B}\right] = \frac{I}{c}\left[d\vec{l},\vec{B}_0\right] + \frac{I}{c}\left[d\vec{l},(\vec{\rho},\vec{\nabla})\vec{B}\right]. \qquad (3.8.10)$$

Первое слагаемое при интегрировании обращается в нуль, так как $\vec{B}_0 = const$ определяет индукцию однородного поля. Второе слагаемое в (3.8.10) перепишем подробнее:

$$\vec{F} = \frac{I}{c}\oint d\vec{l}\times(\vec{\rho},\vec{\nabla})\vec{B} = \frac{I}{c}\oint d\vec{l}\times\left[(\vec{\rho},\vec{\nabla}B_x)\vec{e}_x + (\vec{\rho},\vec{\nabla}B_y)\vec{e}_y + (\vec{\rho},\vec{\nabla}B_z)\vec{e}_z\right] =$$

$$= \frac{I}{c}\left(\oint d\vec{l}\,(\vec{\rho},\vec{\nabla}B_x)\right)\times\vec{e}_x + \frac{I}{c}\left(\oint d\vec{l}\,(\vec{\rho},\vec{\nabla}B_y)\right)\times\vec{e}_y + \frac{I}{c}\left(\oint d\vec{l}\,(\vec{\rho},\vec{\nabla}B_z)\right)\times\vec{e}_z.$$

Опять получаем интегралы, которые мы фактически сосчитали ранее (см. (3.7.26) и (3.7.27)):

$$\frac{I}{c}\oint d\vec{l}\,(\vec{\rho},\vec{\nabla}B_i) = \frac{I}{c}\left[\vec{S},\vec{\nabla}B_i\right] = \left[\vec{M},\vec{\nabla}B_i\right].$$

Подставим их значения и далее, используя свойства перестановки в векторных произведениях и правило БАЦ–ЦАБ, имеем в продолжении для силы:

$$\vec{F}=\left[\left[\vec{M},\vec{\nabla}B_x\right]\vec{e}_x\right]+\left[\left[\vec{M},\vec{\nabla}B_y\right]\vec{e}_y\right]+\left[\left[\vec{M},\vec{\nabla}B_z\right]\vec{e}_z\right]=-\left[\vec{e}_x\left[\vec{M},\vec{\nabla}B_x\right]\right]+...=$$
$$=\left(\vec{M},\vec{e}_x\right)\vec{\nabla}B_x-\left(\vec{\nabla}B_x,\vec{e}_x\right)\vec{M}+\left(\vec{M},\vec{e}_y\right)\vec{\nabla}B_y-...=$$
$$=\left(M_x\vec{\nabla}B_x+M_y\vec{\nabla}B_y+M_z\vec{\nabla}B_z\right)-\vec{M}\,div\vec{B}=\vec{\nabla}\left(\vec{M},\vec{B}\right). \qquad (3.8.11)$$

Здесь мы воспользовались также тем, что $div\vec{B}=0$.

С другой стороны мы знаем, что потенциальная энергия магнитного момента во внешнем поле равна $W=-\vec{M}\vec{B}$, тогда для силы получаем

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}W=\vec{\nabla}\left(\vec{M},\vec{B}\right). \qquad (3.8.12)$$

Полученную формулу можно переписать несколько иначе, используя формулу БАЦ–ЦАБ для двойного векторного произведения:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{M},\vec{B}\right)=\left[\vec{M},\left[\vec{\nabla},\vec{B}\right]\right]+\left(\vec{M},\vec{\nabla}\right)\vec{B}. \qquad (3.8.13)$$

($\vec{\nabla}\times\vec{B}\equiv\left[\vec{\nabla},\vec{B}\right]\equiv rot\vec{B}$). В тех областях, где отсутствует токи, $rot\vec{B}=0$ и $\vec{\nabla}\left(\vec{M},\vec{B}\right)=\left(\vec{M},\vec{\nabla}\right)\vec{B}$, поэтому верны обе формулы, определяющие силу, действующую на малый контур с током с моментом $\vec{M}$ в неоднородном магнитном поле:

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\left(\vec{M},\vec{B}\right) \qquad \text{и} \qquad \vec{F}=\left(\vec{M},\vec{\nabla}\right)\vec{B} \qquad (3.8.14)$$

($\vec{M}$ не зависит от координат точки $\vec{r}$, поэтому его можно «пронести» через оператор $\vec{\nabla}$ влево).

Формулы (3.8.14) можно написать сразу, если показать, что $W=-\vec{M}\vec{B}$ есть потенциальная энергия витка с током в данной точке поля, связанная не только с его ориентацией, но и местоположением. Поясним, почему это выражение вообще можно считать всей механической энергией витка в магнитном поле, хотя мы ее получили исходя только из поворота магнитного момента в магнитном поле.

Предположим, что имеем магнитное поле $\vec{B}$ и магнитный момент $\vec{M}$. По определению потенциальная энергия равна работе сторонних сил по перемещению тела из бесконечности (где поле равно нулю) в заданную точку пространства. Предположим, что мы вносим магнитный момент $\vec{M}$ в поле так, что направление магнитного момента перпендикулярно направлению магнитного поля во всех точках траектории. В этом случае сила, действующая на магнитный момент $\vec{M}$, может быть легко найдена (считаем, что ось x направлена перпендикулярно к индукции магнитного поля $\vec{B}$):

$$\vec{F}=\left(\vec{M},\vec{\nabla}\right)\vec{B}=M\frac{\partial}{\partial x}\vec{B}=M\frac{\partial}{\partial x}\left(B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_z\vec{e}_z\right)=M\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\vec{e}_y+\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e}_z\right),$$

так как $B_x=0$. Таким образом, сила перпендикулярна к оси x, т. е. к перемещению магнитного момента, и работа по его перемещению равна нулю. Поэтому работа затрачена только на поворот $\vec{M}$ в поле, для которого мы имеем энергию $W=-\vec{M}\vec{B}$.

3.8.3. Сравнение формул электростатики и магнитостатики. Аналогия и различие

Рассмотрим и сравним основные соотношения для электростатики и магнитостатики. Формулы представлены в системе единиц Гаусса и в СИ.

Электростатика	**Магнитостатика**
система единиц Гаусса (СИ)	**система единиц Гаусса (СИ)**
Напряженность электрического поля $\vec{E} = \int\limits_V \frac{\rho\vec{r}}{r^3} dV \qquad (\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho\vec{r}}{r^3} dV)$	Индукция магнитного поля $\vec{B} = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{[\vec{j},\vec{r}]}{r^3} dV \qquad (\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\vec{j},\vec{r}]}{r^3} dV)$
Скалярный потенциал электрического поля $\varphi = \int\limits_V \frac{\rho dV}{r} \qquad (\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho dV}{r})$	Векторный потенциал магнитостатического поля $\vec{A} = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\vec{j}}{r} dV \qquad (\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}}{r} dV)$
Связь потенциала и напряженности $\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi$	Связь векторного потенциала и индукции $\vec{B} = rot\vec{A} = [\nabla,\vec{A}]$
Уравнение Пуассона для потенциала $\Delta\varphi = -4\pi\rho \qquad (\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0})$	Уравнение для векторного потенциала $\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j})$
Электрический диполь $\vec{p} = q\vec{l}$	Магнитный диполь $\vec{M} = \frac{I}{c}\vec{S} \qquad (\vec{M} = I\vec{S})$
Поле электрического диполя $\vec{E} = \frac{3(\vec{p},\vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}$	Поле магнитного диполя $\vec{B} = \frac{3(\vec{M},\vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{M}}{r^3}$
Момент сил, действующих на диполь во внешнем поле $\vec{M} = [\vec{p},\vec{E}]$	Момент сил, действующих на диполь во внешнем поле $\vec{M} = [\vec{M},\vec{B}]$
Энергия электрического диполя во внешнем поле $W = -(\vec{p},\vec{E})$	Энергия магнитного диполя во внешнем поле $W = -(\vec{M},\vec{B})$
Сила, действующая на электрический диполь $\vec{F} = (\vec{p},\nabla)\vec{E}$	Сила, действующая на магнитный диполь $\vec{F} = (\vec{M},\nabla)\vec{B}$

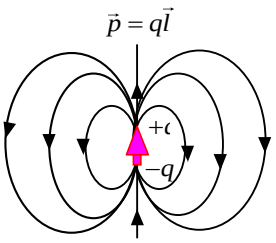


Рис. 3.8.4

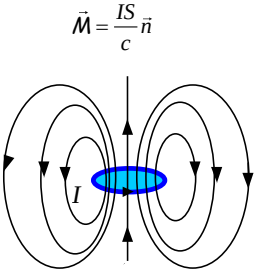


Рис. 3.8.5

На рисунках 3.8.4 и 3.8.5 показано подобие линий напряженности электрического поля диполя и линий индукции магнитного диполя.

Отличие электростатических и магнитостатических величин связано с тем, что магнитное поле соленоидальное, т. е. не имеет источников ($div\vec{B} = 0$). Электрическое поле — потенциальное ($rot\vec{E} = 0$). Однако эта разница относится только к области пространства, в которой расположена система, создающая поле. Если посмотреть на силовые линии полей, создаваемые диполями, видна полная аналогия. И если исключить из рассмотрения малую область, заключающую дипольные моменты, то картинки абсолютно одинаковые. Есть ли различие? Да, во внешнем поле магнитный $\vec{M}$ и электрический $\vec{p}$ дипольные моменты ориентируются вдоль поля, но ориентировка магнитных моментов усиливает поле, а ориентировка электрических — ослабляет внешнее поле.

3.9. Магнитное поле в веществе

3.9.1. Магнитные моменты в веществе

До сих пор мы рассматривали магнитные поля и электрические токи в вакууме. В веществе магнитное поле возбуждается не только электрическими токами, текущими по проводам, но и движениями зарядов внутри атомов и молекул. Также давно известно, что существуют постоянные магниты, у которых магнитное поле появляется за счет внутренних ресурсов, и вопрос состоит в том, какие токи внутри этих веществ создают магнитное поле.

Ампер выдвинул следующую гипотезу: в веществе циркулируют замкнутые токи. Каждый замкнутый ток представляет собой магнитный момент и создает магнитное поле вокруг себя. В отсутствие внешнего магнитного поля в обычных средах (неферромагнитных) магнитные моменты ориентированы беспорядочно, и полное поле от них равно нулю.

Под влиянием внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию. Отсюда суммарный магнитный момент образца не равен нулю, вещество — *магнетик*, намагничивается, и в нем появляется внутреннее магнитное поле $\vec{B}$.

Гипотеза Ампера — это гипотеза о *молекулярных* или *атомных токах*. Однако поясним, какова реальная физика, отвечающая появлению магнитных моментов в веществе. Атомы состоят из положительных ионов и внешних электронов. Последние вращаются вокруг атомных ядер по замкнутым орбитам (*орбитальное* движение) и тем самым имеют механические и магнитные моменты. Кроме того, электроны обладают *спином* — собственным вращательным (механическим) моментом импульса и собственным магнитным моментом. Орбитальное движение и спиновые моменты электронов описываются квантовой механикой. Исходя из классических представлений, Ампер как раз и попытался учесть их проявление с помощью гипотезы о внутренних (молекулярных) токах в веществе.

Итак, магнетизм вещества обусловлен тремя основными причинами. Перечислим их, пользуясь терминологией квантовой физики.

1. *Орбитальное движение электронов*. Состояния электронов в атомах описываются квантовыми числами (n, l, m_l, m_s). *Главное квантовое число* n определяет номер электронной оболочки атома n = 1, 2, 3, ... Механический момент орбитального движения (момент импульса) электрона L квантован и принимает дискретные значения $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, где $\hbar$ — постоянная Планка, а орбитальное квантовое число l принимает целые значения от 0 до (n – 1). Проекция механического момента на произвольную ось z также квантована и равна $L_z = m_l\hbar$. Магнитный момент, появляющийся от орбитального движения электрона, равен

$$\mathcal{M} = m_l \frac{e\hbar}{2m_0c} = m_l\mathcal{M}_B, \qquad (3.9.1)$$

где m_l — магнитное квантовое число (m_l = 0, ±1, ±2, …); e и m_0 — заряд и масса электрона; $\mathcal{M}_B$ — *магнетон Бора*, единица элементарного магнитного момента:

$$\mathcal{M}_B = \frac{e\hbar}{2m_0c} = 9.27\cdot10^{-21} \text{ эрг/Гс}. \qquad (3.9.2)$$

В зависимости от состояния электрон обладает разными значениями проекций m_l и соответственно разными магнитными моментами, кратными магнетону Бора $\mathcal{M}_B$. Часто вводят отношение магнитного момента к механическому, которое называется *гиромагнитным* (или *магнитомеханическим*) отношением:

$$\frac{\mathcal{M}}{L_z} = \frac{e}{2m_0c}. \qquad (3.9.3)$$

2. *Спин электронов — собственный механический момент* частицы. Его проекция на произвольную ось z определяется: $S_z = m_s\hbar = \pm\hbar/2$, а соответствующий (спиновый) магнитный момент равен магнетону Бора с проекцией $\pm\mathcal{M}_B$.

3. *Спин ядер*. Поскольку ядра состоят из протонов и нейтронов, обладающих собственными магнитными моментами, то ядра также обладают магнитными моментами. Однако в обычных условиях вклад ядерного магнетизма в общую картину магнитных свойств мал. Подход к рассмотрению магнитных свойств вещества, в котором пренебрегают ядерным магнетизмом, называется *адиабатическим приближением*.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что все вещества являются магнетиками, т. е. при внесении во внешнее магнитное поле сами становятся источниками дополнительного магнитного поля — *намагничиваются*. Индивидуальные магнитные свойства различных веществ определяются в первую очередь строением электронных оболочек атомов, входящих в их состав, и характером взаимодействия между атомами вещества.

В зависимости от характера взаимодействия с внешним магнитным полем (реакции на внешнее поле) все вещества подразделяют на два больших класса: *диамагнетики* и *парамагнетики*.

Диамагнетиками называют вещества, ослабляющие магнитное поле, в которое они помещены, индуцированный в веществе магнитный момент направлен против вызывающего его внешнего поля.

Парамагнетиками называют вещества, усиливающие магнитное поле, в которое они помещены, суммарный магнитный момент атомов вещества направлен вдоль ориентирующего его внешнего поля.

Отметим сразу же, что диамагнетизм присущ всем без исключения веществам — и диамагнетикам, и парамагнетикам, но в парамагнетиках чаще всего он маскируется более сильным парамагнитным эффектом. В обоих классах веществ существуют свои яркие представители, т. е. вещества, обладающие аномально большим откликом на внешнее магнитное поле. У диамагнетиков — *сверхпроводники*, среди парамагнетиков — *ферромагнетики* (или *ферримагнетики*), *антиферромагнетики*.

В заключение необходимо отметить, что, помимо вышеперечисленных, существуют и другие факторы, вносящие свой вклад в магнитные свойства вещества и, в частности, обусловленные специфическим движением электронов в конденсированных средах. Однако все они так или иначе связаны с механическим переносом заряда. Их изучение выходит за рамки нашего курса.

3.9.2. Микро- и макрополе. Вектор намагничивания

В магнетизме, как и электростатике, можно ввести в рассмотрение как *микроскопическое*, так и *макроскопическое* поле. Микроскопическое поле — это поле, возбуждаемое движущимися в веществе элементарными зарядами. Это в некотором смысле истинное поле в веществе, оно резко меняется на расстояниях атомного масштаба. Макроскопическое поле в веществе получается путем «сглаживания» микрополей, т. е. их усреднения по физически бесконечно малым объемам. Напомним, что физически малый объем — это объем, содержащий большое число атомов, но имеющий размеры, во много раз меньшие, чем те расстояния, на которых макрополе заметно меняется. Усреднение по таким объемам сглаживает все нерегулярные и быстро меняющиеся вариации микрополя на расстояниях порядка атомных, но сохраняет плавные изменения макрополя на макроскопических расстояниях. Итак, записываем индукцию магнитного поля в веществе:

$$\vec{B} = \vec{B}_{макро} = \left\langle \vec{B}_{микро} \right\rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{B}_{микро} dV \,. \qquad (3.9.4)$$

Орбитальное и спиновое движение электронов и атомных ядер эквивалентны токам, циркулирующим в атомах вещества. Эти круговые токи получили общее название *молекулярных токов*. Для вычисления макроскопического поля $\vec{B}$ молекулярные токи можно заменить макроскопиче-

скими токами, получившими название *токов намагничивания* I_m. Плотность этих токов обозначим $\vec{j}_m$.

Чтобы понять, как возникают токи намагничивания, сначала представим себе *намагниченный* цилиндр из однородного материала (см. рис. 3.9.1). У соседних молекул молекулярные токи в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и взаимно компенсируют друг друга. Некомпенсированными остаются только те молекулярные токи, которые выходят на боковую поверхность цилиндра. Эти токи и образуют *макроскопический поверхностный ток намагничивания* I_m, циркулирующий по боковой поверхности цилиндра. Ток I_m возбуждает такое же макроскопическое магнитное поле, что и молекулярные токи, вместе взятые.

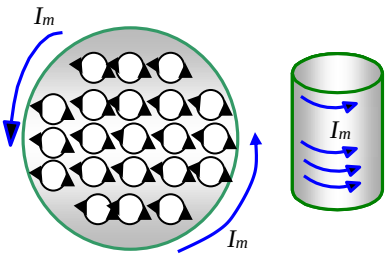


Рис. 3.9.1

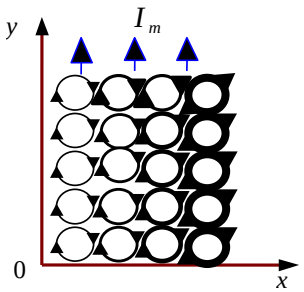


Рис. 3.9.2

Рассмотрим теперь другой случай: намагниченный образец является неоднородным. Пусть молекулярные токи расположены в плоскости $x0y$, а толщина линий на рисунке 3.9.2 соответствует силе молекулярных токов. Видно, что здесь компенсации молекулярных токов внутри образца уже нет, в результате чего возникает объемный макроскопический ток намагничивания I_m, текущий в положительном направлении оси y.

Можно сказать, что влияние среды на магнитное поле сводится к действию токов намагничивания. Таким образом, поле $\vec{B}$ в веществе возбуждается токами проводимости (ток I с плотность тока $\vec{j}$) и токами намагничивания ($I_m, \vec{j}_m$). То, что источниками для вектора $\vec{B}$ являются и токи проводимости $\vec{j}$, и токи намагничивания $\vec{j}_m$, проявляется в теореме о циркуляции вектора индукции магнитного поля, которая в интегральной и дифференциальной форме записывается:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}(I + I_m) = \frac{4\pi}{c}\int_S \left(\vec{j} + \vec{j}_m\right)d\vec{S}; \qquad (3.9.5)$$

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_m\right). \qquad (3.9.6)$$

Остается также в силе теорема Гаусса, которая выражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов и означает, что линии вектора $\vec{B}$ и при наличии вещества остаются всюду непрерывными:

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0, \quad \text{или} \quad div\vec{B} = 0. \qquad (3.9.7)$$

Если известны плотность токов проводимости $\vec{j}$ и плотность токов намагничивания $\vec{j}_m$, то можно забыть о наличии вещества и проводить вычисления по формулам, которые используются при расчете поля $\vec{B}$ в вакууме. Однако сложность такого рассмотрения состоит в том, плотность токов намагничивания обычно неизвестна, так как $\vec{j}_m$ зависит от самого магнитного поля $\vec{B}$. То есть получаем сложную взаимозависимость: магнитное поле зависит от токов намагничивания, а токи намагничивания, в свою очередь, зависят от поля в веществе.

Намагниченность среды характеризуют *вектором намагничивания* $\vec{J}$, который определяется как результирующий (средний) *магнитный момент единицы объема* вещества, создаваемый молекулярными токами. По определению средний магнитный момент единицы объема равен

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{M}_i}{\Delta V}. \qquad (3.9.8)$$

Здесь $\vec{M}_i$ — магнитный момент отдельной молекулы; ΔV — физически малый объем в окрестности данной точки. Если ввести средний магнитный момент молекулы $\vec{M}_0$, то вектор намагничивания равен

$$\vec{J} = n\vec{M}_0, \qquad (3.9.9)$$

где n — концентрация молекул. Магнитный момент элемента объема dV определяется

$$d\vec{M} = \vec{J}dV. \qquad (3.9.10)$$

Вполне очевидно, что токи намагничивания $\vec{j}_m$ связаны с намагниченностью $\vec{J}$: чем сильнее токи $\vec{j}_m$, тем больше магнитный момент единицы объема.

Идея подхода к описанию магнитного поля в веществе состоит в следующем: найти экспериментальную связь между векторами $\vec{J}$ и $\vec{B}$, а затем решать задачу о нахождении индукции магнитного поля $\vec{B}$.

3.9.3. Связь между вектором намагничивания и молекулярными токами

Вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов, которые охватываются произвольно выбранным контуром L. Натянем на замкнутый

контур L произвольную поверхность S и сосчитаем полный молекулярный ток, текущий через эту поверхность:

$$I_m = \int_S \vec{j}_m d\vec{S}.$$

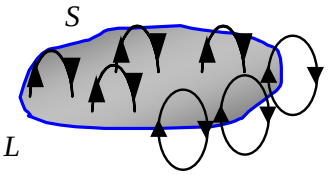


Рис. 3.9.3

Из рисунка 3.9.3 видно, что все молекулярные токи можно подразделить на следующие токи.

1. Токи, которые пересекают поверхность дважды, причем в разных направлениях, и поэтому не вносят вклада в результирующий ток намагничивания через поверхность S.

2. Токи, которые, обвиваясь вокруг контура L, пересекают поверхность S только один раз. Такие молекулярные токи и создают макроскопический ток намагничивания I_m, «пронизывающий» поверхность S.

Пусть каждый молекулярный ток равен I' и охватывает площадь S'. Тогда малый элемент dl контура L обвивают те молекулярные токи, чьи центры попадают внутрь косого цилиндра объемом (рис. 3.9.4):

$$dV = S'dl\cos\alpha,$$

где α — угол между элементом контура $d\vec{l}$ и направлением вектора $\vec{J}$ в данном месте. Все эти молекулярные токи пересекают поверхность S один раз и дают следующий вклад в ток намагничивания:

$$dI_m = I'ndV,$$

где n — концентрация молекул. Подставляя выражение для элемента объема dV, получаем

$$dI_m = I'S'ndl\cos\alpha = c\mathcal{M}_0 ndl\cos\alpha = cJdl\cos\alpha = c\vec{J}d\vec{l}. \qquad (3.9.11)$$

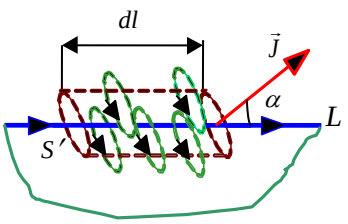


Рис. 3.9.4

Здесь учтено, что $\frac{1}{c}I'S' = \mathcal{M}_0$ — магнитный момент отдельной молекулы (молекулярного тока), а $n\mathcal{M}_0 = n\frac{I'S'}{c} = J$ — магнитный момент единицы объема вещества, т. е. вектор намагничивания.

Проинтегрировав по всему контуру, получим теорему о циркуляции для вектора намагничивания $\vec{J}$:

$$c\oint_L \vec{J}d\vec{l} = I_m;$$

$$\oint_L \vec{J}d\vec{l} = \frac{1}{c}I_m. \qquad (3.9.12)$$

Циркуляция намагниченности $\vec{J}$ *по произвольному контуру* L *равна алгебраической сумме токов намагничивания, охватываемых контуром* L, где полный ток определяется:

$$I_m = \int \vec{j}_m d\vec{S}, \qquad (3.9.13)$$

причем интегрирование проводится по произвольной поверхности S, опирающейся на контур L. Заметим, что мы пока рассматриваем стационарные токи и поля, когда они не зависят от времени (магнитостатика).

Воспользуемся (3.9.12) и теоремой Стокса: $\oint_L \vec{J}d\vec{l} = \int_S rot\vec{J}d\vec{S}$ и тогда получим

$$\int rot\vec{J}d\vec{S} = \frac{1}{c}\int \vec{j}_m d\vec{S}.$$

В силу произвольности выбранного контура и опирающейся на него поверхности получаем дифференциальную теорему о циркуляции вектора намагничивания:

$$rot\vec{J} \equiv \left[\nabla, \vec{J}\right] = \frac{1}{c}\vec{j}_m. \qquad (3.9.14)$$

Ротор намагниченности равен плотности токов намагничивания в той же точке пространства.

Если намагниченность однородна ($\vec{J} = const$), то $\vec{j}_m = 0$. Как это понять? Достаточно взглянуть на рисунок 3.9.1 в этом параграфе. Молекулярные токи внутри магнетика в местах соприкосновения текут в противоположных направлениях и компенсируют друг друга (отсюда $\vec{j}_m = 0$). Некомпенсированным остается только ток по поверхности, который и создает макрополе $\vec{J} = const$.

Если магнетик неоднородный, то ток намагничивания, вообще говоря, не полностью компенсируется соседним током, поэтому пронизывает всю поверхность и $\vec{j}_m \neq 0$. Именно поэтому его можно записать как $I_m = \int \vec{j}_m d\vec{S}$, где интегрирование распространяется на всю поверхность S, ограниченную контуром L.

Примечание 45. В системе *СИ* имеем следующую запись формул для намагниченности:

$$\oint_L \vec{J}d\vec{l} = \int_S \vec{j}_m d\vec{S}; \quad rot\vec{J} = \vec{j}_m; \quad \vec{M} = I_m\vec{S}.$$

3.9.4. Напряженность магнитного поля

Подставим в дифференциальную формулу (3.9.6) $rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_m\right)$ полученный результат для плотности тока намагничивания (намагничения) (3.9.14) $\vec{j}_m = c \cdot rot\vec{J}$. Тогда в выражении

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + c \cdot rot\vec{J}\right),$$

перенеся $c \cdot rot\vec{J}$ в левую часть уравнения, получаем

$$rot\left(\vec{B} - 4\pi\vec{J}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \qquad (3.9.15)$$

Введем вспомогательный вектор — *напряженность магнитного поля* $\vec{H}$:

$$\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi\vec{J}. \qquad (3.9.16)$$

Тогда имеем следующие интегральное и дифференциальное уравнения для напряженности магнитного поля $\vec{H}$:

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \qquad \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}I. \qquad (3.9.17)$$

После введения вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ в правой части уравнений остаются только токи проводимости ($\vec{j}, I$), токи намагничивания выпадают из уравнений. В этом и заключается смысл введения этого вспомогательного вектора. Вектор $\vec{H}$ в учении о магнетизме играет такую же вспомогательную роль, как вектор $\vec{D}$ в электростатике.

Основным физическим вектором является вектор индукции $\vec{B}$ — *силовой вектор*. Исторически он получил неудачное название — вектор индукции, хотя было бы правильнее (по смыслу) называть его вектором напряженности магнитного поля. Такая иррациональность возникла из-за того, что учение о магнетизме развивалось по аналогии с электростатикой, а об отсутствии магнитных зарядов стало известно позднее.

По определению

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{J}, \ \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{J}$$

векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ имеют одинаковую размерность в гауссовой системе единиц. Поэтому они должны иметь и одинаковую единицу измерения. Для магнитной индукции $\vec{B}$ в гауссовой системе это *гаусс*. Однако при измерении напряженности магнитного поля $\vec{H}$ её называют *эрстедом*. Это разные названия одной и той же единицы, что, естественно, неудобно. Такое положение сохраняется как дань исторической традиции.

Примечание 46. В системе СИ имеем следующие соотношения:

$$rot\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \vec{j}_m\right); \qquad rot\vec{J} = \vec{j}_m;$$

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{J}; \qquad rot\vec{H} = \vec{j}.$$

Единицы измерения полей: $\left[\vec{B}\right] =$ Тесла; $\left[\vec{H}\right] = \frac{A}{м}$.

3.9.5. Магнитные восприимчивость и проницаемость вещества

Все магнетики можно подразделить на две основные группы, используя в качестве критерия сравнительную интенсивность взаимодействия атомных магнитных моментов с внешним магнитным полем и между собой. Вещества, для которых взаимодействие между отдельными магнитными моментами (в обычных условиях) пренебрежимо мало по сравнению взаимодействием каждого из моментов с внешним магнитным полем, называют слабомагнитными — это пара- и диамагнетики. Сильномагнитными называют вещества, в которых взаимодействие между атомными магнитными моментами является доминирующим по сравнению с взаимодействием атомных моментов с внешним полем. Следует понимать, что такое подразделению весьма условно и зависит от тех внешних условий (прежде всего температуры), в которых находится материал.

Сильномагнитные вещества характеризуются весьма сложной зависимостью между векторами намагниченности $\vec{J}$ и магнитной индукции $\vec{B}$. К таким веществам относятся ферромагнетики, например железо, кобальт, никель, некоторые редкоземельные элементы, а также различные сплавы и соединения. Для них, во-первых, зависимость между векторами $\vec{J}$ и $\vec{B}$ нелинейная. А во-вторых, у таких материалов наблюдается явление гистерезиса, т. е. неоднозначная зависимость между этими величинами, обусловленная наличием у них «памяти» о своем предыдущем состоянии.

Для парамагнитных и диамагнитных сред зависимость между векторами $\vec{J}$ и $\vec{B}$ *линейная*. И, по идее, надо было бы ввести коэффициент пропорциональности между ними, как это было сделано в электростатике для связи между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$. Однако в силу опять-таки исторических причин вначале принято связывать между собой векторы намагниченности $\vec{J}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$.

Для изотропных сред записываем:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}. \qquad (3.9.18)$$

Для анизотропных сред χ — тензор, при этом вектор намагниченности $\vec{J}$ может быть не сонаправлен с вектором напряженности $\vec{H}$. Величина χ называется *магнитной восприимчивостью* (или тензором магнитной восприимчивости) и имеет следующие свойства:

1) χ не зависит от напряженности $\vec{H}$ (слабомагнитные вещества, слабые магнитные поля);

2) χ безразмерна;

3) χ — тензор для анизотропных сред;

4) χ может быть больше и меньше нуля.

Следует отметить, что χ служит коэффициентом пропорциональности и не имеет какого-либо другого физического смысла.

Для изотропных сред запишем:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{J} = (1 + 4\pi\chi)\vec{H} = \mu\vec{H}\,. \qquad (3.9.19)$$

Итак, имеем соотношение

$$\vec{B} = \mu\vec{H}\,, \qquad (3.9.20)$$

где μ — магнитная проницаемость вещества:

$$\mu = 1 + 4\pi\chi\,. \qquad (3.9.21)$$

Величины χ и μ используются в качестве классификаторов и определителей магнитных свойств веществ:

$\chi < 0,\ \mu < 1$ — диамагнетики (CO_2, N_2, H_2O, Ag и др.);

$\chi > 0,\ \mu > 1$ — парамагнетики (O_2, Al, Pt, $FeCl_3$ и др.).

Примечание 47. В системе *СИ* с учетом материальных уравнений имеем:

$$\vec{J} = \chi\vec{H}\,; \quad \vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{J} = \mu_0(1+\chi)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}\,; \quad \mu = 1 + \chi\,.$$

3.10. Граничные условия для векторов магнитного поля

Рассмотрим магнитные поля на границе двух магнетиков. Получим граничные условия для векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ исходя из теоремы о потоке вектора через замкнутую поверхность: $\oint \vec{B}d\vec{S} = 0$, и из теоремы о циркуляции вектора $\vec{H}$ по замкнутому контуру: $\oint \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}I$.

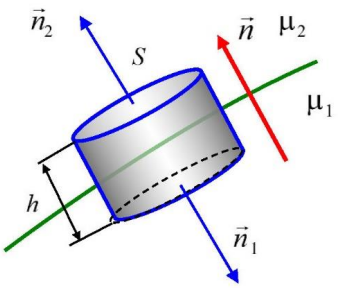


Рис. 3.10.1

Сосчитаем поток вектора $\vec{B}$ через поверхность малого цилиндра, охватывающего границу раздела двух сред:

$$B_{1n_1}S + B_{2n_2}S + \langle B_\tau \rangle S_{бок} = 0\,,$$

где S — площадь основания цилиндра, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности. Устремляя высоту цилиндра $h \to 0$ и $S_{бок} \to 0$, получаем на границе:

$$B_{1n_1} = -B_{2n_2}$$

и, учитывая, что n_1 и n_2 — противоположно направленные нормали, и вводя общую нормаль $\vec{n}$, имеем:

$$B_{1n} = B_{2n}\,. \qquad (3.10.1)$$

Итак: *нормальные составляющие вектора $\vec{B}$ непрерывны на границе раздела двух магнетиков.*

Нормальные составляющие вектора $\vec{H}$ получим, используя соотношение (3.9.20) $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$, справедливое для изотропных магнетиков. Тогда из (3.10.1) имеем

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}\,.$$

Откуда получаем соотношение для нормальных составляющих напряженности магнитного поля:

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad (3.10.2)$$

Нормальные составляющие вектора $\vec{H}$ *терпят разрыв на границе двух магнетиков*.

Предположим для общности, что вдоль поверхности раздела магнетиков течет ток проводимости I. Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$ к очень малому прямоугольному контуру, пересекающему границу двух сред, причем высота контура b пренебрежимо мала по сравнению с его длиной a (см. рис. 3.10.2):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H_{2\tau} a - H_{1\tau} a + 2 < H_n > b = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} j_N ab. \qquad (3.10.3)$$

Здесь j_N — нормальная составляющая вектора плотности тока к выбранному контуру, т. е. перпендикулярная к векторам $\vec{n}, \vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ — единичный вектор вдоль контура ($\vec{N}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости контура, как показано на рис. 3.10.2). Тогда устремляя $b \to 0$, получаем

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N, \qquad (3.10.4)$$

где $\vec{i} = \vec{j} b$ — плотность поверхностного тока, т. е. ток, текущий через единицу длины поверхности. Перейдем к векторной форме записи полученного выражения, учитывая, что $\vec{\tau} = [\vec{N}, \vec{n}]$, $H_\tau = \vec{H}\vec{\tau}$ и $i_N = \vec{i}\vec{N}$:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\vec{\tau} = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot [\vec{N}, \vec{n}] = ([\vec{n}, \vec{H}_2] - [\vec{n}, \vec{H}_1])\vec{N} = \frac{4\pi}{c} \vec{i}\vec{N}.$$

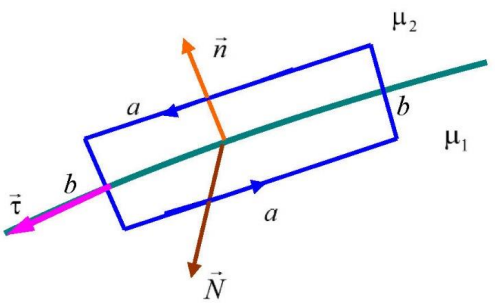


Рис. 3.10.2

Здесь мы воспользовались циклической перестановкой векторов в смешанном скалярно-векторном произведении. Из последнего равенства получаем

$$[\vec{n}, \vec{H}_2] - [\vec{n}, \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \vec{i}. \qquad (3.10.5)$$

Итак, *тангенциальная составляющая вектора $\vec{H}$ при переходе границы раздела магнетиков, вообще говоря, претерпевает скачок, связанный с наличием поверхностных токов проводимости.*

Если токов проводимости вдоль поверхности раздела нет, то тангенциальные составляющие вектора $\vec{H}$ также непрерывны:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \qquad (3.10.6)$$

Итак, если на границе раздела двух однородных магнетиков тока проводимости нет, то при переходе этой границы проекции векторов B_n и H_τ изменяются непрерывно, без скачка. Составляющие B_τ и H_n при этом претерпевают скачок.

На границе раздела двух магнетиков линии вектора $\vec{B}$ испытывают преломление (рис. 3.10.3). Найдем отношение тангенсов углов α_1 и α_2, определяющих направление вектора $\vec{B}$ по разные стороны границы раздела:

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{B_{2\tau}/B_{2n}}{B_{1\tau}/B_{1n}}. \qquad (3.10.7)$$

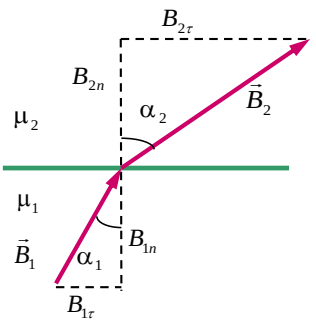


Рис. 3.10.3

Ограничимся случаем, когда на поверхности раздела тока нет, то есть

$$\frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} \quad \text{и} \quad B_{2n} = B_{1n}.$$

В этом случае закон преломления линий вектора $\vec{B}$ имеет вид

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad (3.10.8)$$

Аналогичное соотношение получаем для преломления силовых линий вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$.

Изобразим поле векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ вблизи границы раздела двух при отсутствии токов проводимости и полагая $\mu_2 > \mu_1$ (см. рис. 3.10.4). Из сравнения «густоты» линий видно, что $B_2 > B_1$, а $H_2 < H_1$. Линии вектора $\vec{B}$ не терпят разрыва при переходе границы раздела, а линии вектора $\vec{H}$ терпят в

этом случае разрыв из-за наличия на поверхностях магнетиков токов намагничивания.

На явлении преломления магнитных линий на поверхностях раздела магнетиков основана *магнитная защита*. При внесении в магнитное поле замкнутой оболочки из сильномагнитного материала линии этого поля будут концентрироваться (иначе говоря, сгущаться) преимущественно в самом материале оболочки. Внутри же полости, окруженной оболочкой, магнитное поле оказывается сильно ослабленным по сравнению с внешним полем. Таким образом, такая оболочка обладает экранирующим действием. Это свойство используют для предохранения чувствительных приборов от внешних магнитных полей.

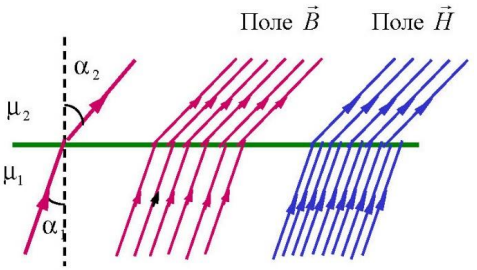


Рис. 3.10.4

Экраны из сильномагнитных материалов не позволяют свести к нулю действие внешнего магнитного поля. Полностью экранируют магнитное поле лишь сверхпроводники.

3.11. Гиромагнитные эффекты

3.11.1. Гиромагнитные отношения

Как упоминалось в п. 3.9, магнитные свойства вещества определяются магнитными моментами атомов. Магнитные моменты непосредственно связаны с механическими моментами импульса тех же атомов, поэтому намагничивание вещества сопровождается ориентировкой как магнитных, так и механических моментов атомов.

Наглядное представление о взаимосвязи магнитных и механических свойств частиц можно получить из рассмотрения орбитального движения электронов в рамках простого квантово-механического рассмотрения. В водородоподобном атоме состояние электрона задается набором четырех квантовых чисел (n, l, m_l и m_s). Здесь n — главное квантовое число; l — орбитальное квантовое число; m_l — магнитное квантовое число; m_s — спиновое (магнитное) квантовое число. Пусть e и m_0 — заряд и масса электрона соответственно, тогда магнитный момент, вызванный орбитальным движением электрона, определяется:

$$\mathcal{M} = m_l \frac{e\hbar}{2m_0 c} = m_l \mathcal{M}_B, \qquad (3.11.1)$$

где $m_l = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, а $\mathcal{M}_B = \dfrac{e\hbar}{2m_0 c} = 9{,}27 \cdot 10^{-21}\, эрг / Гс$ — магнетон Бора, элементарный магнитный момент.

Механический момент орбитального движения электрона обозначим, как и ранее, L, а его проекция равна: $L_z = m_l\hbar$. Тогда отношение

$$g_L = \frac{M}{L_z} = \frac{e}{2m_0c} \qquad (3.11.2)$$

называется *магнитомеханическим*, или *гиромагнитным*, отношением. Для орбитального движения оно выражается через мировые константы.

Нетрудно увидеть, что к такому же результату (3.11.2) приводят вычисления по полуклассической (старой квантовой) модели атома Бора. Ток, создаваемый движущимся по орбите радиусом r электроном, определяется (см. рис. 3.11.1):

$$I = -\frac{e}{T}, \qquad (3.11.3)$$

где $T = \frac{2\pi r}{v}$ — период обращения электрона по орбите; v — скорость орбитального движения. Тогда магнитный момент орбитального движения электрона записывается

$$M = \frac{1}{c}IS = -\frac{1}{c}\frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = -\frac{evr}{2c}. \qquad (3.11.4)$$

Механический момент движения электрона равен: $L = m_0vr$. Итак, получаем, что *орбитальное гиромагнитное отношение* равно

$$g_L = \frac{M}{L} = \frac{e}{2m_0c}.$$

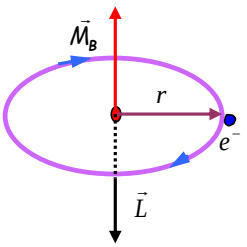


Рис. 3.11.1

Полученное отношение совпадает с квантовым определением гиромагнитного отношения (3.11.2).

Рассмотрим спиновые механический и магнитный моменты. В квантовой физике получаем, что проекция собственного момента количества движения электрона определяется: $S_z = m_S\hbar = \pm\hbar/2$, так как спиновое квантовое число $m_S = \pm 1/2$. Соответствующий (спиновый) магнитный момент равен магнетону Бора $M = \frac{e\hbar}{2m_0c}$. Отсюда получаем *спиновое гиромагнитное отношение*, которое в 2 раза больше орбитального гиромагнитного отношения:

$$g_S = \frac{e}{m_0c}. \qquad (3.11.5)$$

Этот результат подтверждается на эксперименте. Важно отметить, что в рамках классической физики, которая рассматривает электрон как вращающийся заряженный объект, получаем для спина в 2 раза меньшее отношение $g_S^{кл} = e/2m_0c$, и это свидетельствует лишь о непригодности классической модели в описания спина электрона.

В квантовой механике получаем, что момент импульса, его проекции и магнитный момент могут принимать только дискретные значения.

Полный механический и магнитный моменты любого многоэлектронного атома получаются векторным суммированием орбитальных и спиновых моментов. При сложении этих моментов магнитные орбитальные и спиновые моменты взаимодействуют между собой. Это так называемое *спин-орбитальное* взаимодействие. Могут существовать состояния атомов и молекул, где механические и магнитные моменты равны нулю, то есть они скомпенсированы. Пример таких ситуаций: в замкнутых (заполненных электронами) оболочках в атомах суммарный механический и магнитный моменты равны нулю.

Если в атоме оболочки незамкнутые, то магнитный момент атома в целом определяется суммой полного орбитального и полного спинового моментов. А поскольку g_L и g_S отличаются друг от друга, то часто возникает ситуация, когда полный механический момент не коллинеарен магнитному моменту в атоме. При этом проекции моментов на выделенную в пространстве ось становятся различными и, таким образом, определяют новые значения гиромагнитных отношений.

При этом очевидно, что для каждой частицы, атома или молекулы вещества магнитомеханическое отношение имеет вполне определенное значение. Поэтому экспериментальное исследование магнитомеханических (гиромагнитных) характеристик позволяет сделать заключение о природе носителей магнетизма в различных веществах.

3.11.2. Опыт Эйнштейна — де Гааза и эффект Барнетта

Экспериментальное исследование гиромагнитных отношений позволяет определить, чем обусловлена намагниченность и кто отвечает за ее появление — орбитальное движение или спиновые эффекты.

Идея опыта Эйнштейна — де Гааза (1915) состояла в следующем: когда происходит намагничивание образца, магнитные моменты поворачиваются (выстраиваются). Однако с ними связаны механические моменты атомов или молекул, которые также изменяют свои направления в пространстве. Эти изменения механических моментов происходят за счет внутренних сил, иначе говоря, если система замкнута, то кристаллическая решетка должна получить механический момент, обратный выстроенному магнитному моменту, так как полный момент образца сохраняется.

Исследование крутильных колебаний позволяет определить гиромагнитное отношение g для материала образца. В экспериментах для железного образца было получено значение $g = e/m_0c$, которое означает, что *маг-*

нитные свойства железа определяются спиновым магнетизмом электронов (ферромагнетизм).

Рассмотрим опыт чуть подробнее. Мысленно разобьем исследуемое вещество на две подсистемы: электронные оболочки атомов и кристаллическую решетку. Пусть магнитные свойства вещества обусловлены электронами атомных электронных оболочек. При намагничивании образца атомные магнитные моменты $\vec{M}$ поворачиваются, стремясь сориентироваться вдоль вектора индукции $\vec{B}_0$ внешнего магнитного поля. Однако с магнитными моментами атомов $\vec{M}$ связаны механические моменты количества движения электронов оболочек атомов, равные M/g, которые также изменяются. Эти изменения механических моментов происходят за счет взаимодействий между атомами, т. е. *внутренних сил*, поэтому если система замкнута, то полный момент количества движения не может измениться, а кристаллическая решетка должна получить такой же по величине, но противоположный по знаку механический момент. Следует заметить, что, в действительности, замкнутой является система «образец + намагничивающее поле в соленоиде». Однако если в качестве образца взять цилиндр, то из соответствующих расчетов известно, что электромагнитное поле имеет относительно цилиндра момент количества движения, равный нулю, и поэтому не дает вклада в суммарный импульс системы.

Магнитный момент образца равен $\vec{J} \cdot V$, где $\vec{J}$ – вектор намагничивания; V — объем образца. Тогда в результате намагничивания момент количества движения электронных оболочек в веществе увеличивается на величину:

$$\vec{L}_{эл} = \frac{\vec{J} \cdot V}{g} = \frac{V}{g}\vec{J}\,. \qquad (3.11.6)$$

Отсюда следует, что кристаллическая решетка образца должна получить такой же по величине момент импульса, но противоположного знака, т. е.

$$\vec{L}_{реш} = -\frac{V}{g}\vec{J}\,.$$

Поэтому если до намагничивания образец находился в состоянии покоя, то в результате намагничивания он должен прийти во вращение.

Если I_z – момент инерции тела, то $L_z = I_z\omega$ и угловая скорость ω вращения тела может быть найдена из уравнения

$$I_z\vec{\omega} = -\frac{V}{g}\vec{J}\,. \qquad (3.11.7)$$

Эксперимент ставился следующим образом. Небольшой железный цилиндр подвешивался на тончайшей кварцевой нити и помещался внутрь соленоида, в котором создавалось магнитное поле. Повороты цилиндра отмечались с помощью маленького зеркальца, скрепленного с ним. Оценим величину эффекта. Предположим, что цилиндр радиусом r и массой $m_{обр}$ намагничивается до насыщения. Далее, пусть каждый атом в образце

обладает магнитным моментом, равным одному магнетону Бора $\mathcal{M}_B = e\hbar/2m_e c$, тогда магнитный момент всего образца будет равен

$$VJ = N\mathcal{M}_B = \frac{m_{обр}}{A} N_A \mathcal{M}_B ,$$

где N_A — число Авогадро, а A — атомный вес. Принимая во внимание, что для цилиндра момент инерции равен $I_z = m_{обр} r^2/2$, переписываем (3.11.7):

$$\frac{1}{2} m_{обр} r^2 \omega = -\frac{m_{обр}}{gA} N_A \mathcal{M}_B ,$$

и далее получаем угловую скорость:

$$\omega = -\frac{1}{g} \frac{2N_A \mathcal{M}_B}{Ar^2} . \qquad (3.11.8)$$

Для железного ($A = 56$) цилиндра радиусом $r = 1$ мм эта формула дает значение угловой скорости, равное $\omega \approx 10^{-3}$ рад/с.

Эффект очень мал. Поэтому Эйнштейн и де Гааз, добиваясь усиления эффекта, пропускали по обмотке соленоида переменный ток. В переменном магнитном поле образец, периодически намагничиваясь и размагничиваясь, приходил в колебательное движение. Эффект усиливался, если частота изменения внешнего поля ω (частота переменного тока, изменяемая в опыте) совпадала с частотой собственных колебаний цилиндра ω_0, т. е. наблюдалось явление резонанса.

Уравнение крутильных колебаний цилиндра записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(L_{реш} + L_{эл}\right) = -f\varphi - \alpha\dot{\varphi} , \qquad (3.11.9)$$

где φ — угол отклонения цилиндра из положения равновесия; f — модуль кручения нити; α — постоянная, учитывающая сопротивление воздуха и прочие тормозящие силы, которые предполагаются пропорциональными угловой скорости (напомним, что $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$). Далее, учитывая (3.11.6), имеем:

$$\frac{dL_{реш}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{V}{g} J\right) = \frac{d}{dt}\left(I_z \omega\right) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \ddot{\varphi} ; \qquad (3.11.10)$$

$$\frac{dL_{эл}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V}{g} J\right) = \frac{V}{g}\frac{dJ}{dt} = \frac{V}{g}\dot{J} . \qquad (3.11.11)$$

Поэтому уравнение крутильных колебаний принимает вид:

$$I_z \ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + f\varphi = -\frac{V}{g}\dot{J} . \qquad (3.11.12)$$

Если теперь ввести частоту собственных колебаний, как $\omega_0^2 = f/I_z$, и коэффициент затухания, $\beta = \alpha/2I_z$, то получаем

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = -\frac{V}{gI_z}\dot{J} . \qquad (3.11.13)$$

Это уравнение вынужденных крутильных колебаний. Величина, стоящая в правой части уравнения, играет роль вынуждающей силы. Она воз-

никает в результате намагничивания и перемагничивания цилиндра и предполагается известной. Поскольку связь между намагниченностью и вызывающим её полем нелинейна (железо — ферромагнетик), то правую часть уравнения раскладывают в ряд Фурье, сохраняя в этом разложении для нахождения решения вблизи резонанса только член с основной частотой ω (см.: Сивухин Д. В. Общий курс физики. М. : Наука : Физматлит. 1996. Т. 3 : Электричество, ч. I, II. § 78).

Эффект Барнетта (1909). Существует явление, обратное магнитомеханическому. Оно заключается в том, что при вращении парамагнитные тела намагничиваются, и это явление называется *гиромагнитным*. Объяснить этот эффект можно следующим образом. При внесении в магнитное поле электронная оболочка атома приходит во вращение относительно кристаллической решетки с угловой скоростью $\vec{\Omega} = -g\vec{B}$. При наличии такого относительного движения столкновения между атомами приводят к намагничиванию среды. Поскольку движение относительное, то следует ожидать такого же намагничивания, если привести во вращение решетку с угловой скоростью $\vec{\omega}$, равной по величине, но противоположно направленной скорости $\vec{\Omega}$. Другими словами, вращение тела с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вызывает то же намагничивание, что и магнитное поле $\vec{B} = \vec{\omega}/g$. Это явление наблюдалось Барнеттом в 1909 г.

Сделаем численную оценку величины этого эффекта. Допустим, что гиромагнитное отношение связано с орбитальным движением электронов, т. е. имеем $g = -\dfrac{e}{2m_0c}$. При скорости вращения, равной 100 об/с, или угловой скорости $\omega = 2\pi \cdot 100$ рад/с для индукции магнитного поля получаем

$$B = \frac{2m_0c}{e}\omega \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ Гс}.$$

Для сравнения: магнитное поле у поверхности Земли составляет $0{,}3 \div 0{,}7$ *Гс*.

Исследования магнитомеханического и гиромагнитного явлений показали, что гиромагнитное отношение g *всегда отрицательно*. Тем самым было подтверждено, что магнетизм обусловлен движением отрицательных электрических зарядов (электронов). Численные значения величины g оказались заключенными в пределах от $e/2m_0c$ до e/m_0c. Весьма важно, что для всех исследованных ферромагнетиков (железо, никель, кобальт, ряд сплавов) гиромагнитное отношение оказалось равным $-e/m_0c$. Это показывает, что *магнетизм ферромагнетиков обусловлен только спином электронов, а не их орбитальным движением.*

Примечание 48. Альберт Эйнштейн (1879–1955), великий немецкий физик-теоретик, Нобелевская премия (1921) за открытие законов фотоэффекта;

Вандер Иоханнес де Гааз (1878–1960), нидерландский физик;

Сэмуел Джексон Барнетт (1873–1956), американский физик.

3.11.3. Опыт Штерна — Герлаха

Наглядное и непосредственное доказательство пространственного квантования магнитного момента, а также наличия у электрона собственного магнитного момента было получено немецкими физиками О. Штерном и В. Герлахом в опытах, поставленных ими в 1922 г.

В вакуумированной установке исследовалось прохождение узкого пучка атомов серебра (Ag), двигавшихся в направлении оси x, через область сильно неоднородного (вдоль оси z) магнитного поля. После прохождения этой области атомы серебра фиксировались на экране. В неоднородном магнитном поле атомы, обладающие магнитным моментом, должны отклоняться от направления их первоначального распространения. На атом с магнитным моментом $\vec{\mathcal{M}}$ в неоднородном магнитном поле $\left(\partial\vec{H}/\partial z \neq 0\right)$ действует сила, равная

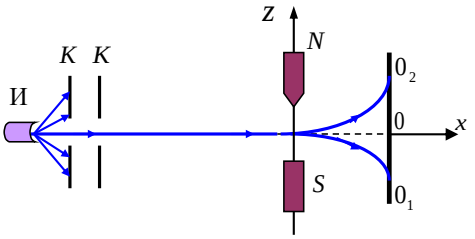


Рис. 3.11.2

$$\vec{F} = \left(\vec{\mathcal{M}}, \vec{\nabla}\right)\vec{H}\,. \qquad (3.11.14)$$

Если магнитный момент атома $\vec{\mathcal{M}}$ направлен под углом ϑ к оси z, то эта сила равна

$$F = \mathcal{M}\frac{\partial H}{\partial z}\cos\vartheta\,. \qquad (3.11.15)$$

Под влиянием этой силы атом будет отклоняться вдоль оси z на величину

$$z_\vartheta = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{M}}{M}\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_{cp} t^2\cos\vartheta\,, \qquad (3.11.16)$$

здесь M — масса атома. Время пролета в магнитном в поле t определяется из условия $t = l/v$, где l — длина магнита, v — скорость атомов вдоль оси x.

Если бы все значения углов ϑ были равновероятны, то при включении магнитного поля на экране вместо сфокусированного в точке 0 изображения получили бы широкую полосу в пределах от 0_1 до 0_2 (см. рис. 3.11.3). Пределы полосы простирались бы от максимального отклонения против оси z до максимального отклонения по оси z. Однако в опыте Штерна — Герлаха атомный пучок расщеплялся на две компоненты, симметрично расположенные относительно первоначального направления (см. рис. 3.11.4). Полученный результат означает, что атомы пучка обладают магнитным моментом $\vec{\mathcal{M}}$, проекция которого $\mathcal{M}_z$ в поле $\vec{H}$ принимает только два значения $\mathcal{M}_z$, т. е. *проекция магнитного момента квантуется* (принимает дискретные значения). Этот вы-

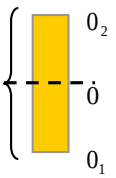


Рис. 3.11.3

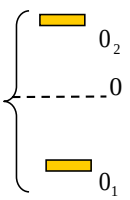


Рис. 3.11.4

вод согласуется с теоретическими представлениями о пространственном квантовании проекции магнитного момента атома на направление внешнего магнитного поля $\vec{H}$: $M_z = mM_B$ (при $m = \pm 1$).

Однако если $m = \pm 1$, то мы имеем дело, по крайней мере, с орбитальным квантовым числом l = 1. И помимо атомов с проекциями $m = \pm 1$ должны быть атомы с проекцией $m = 0$, для которых магнитная сила была бы равна нулю и которые бы не отклонялись от отметки ноль на экране.

В опыте Штерна — Герлаха использовались атомы серебра, в основном состоянии которых во внешней электронной оболочке находится один электрон в *s*-состоянии. Электрон в *s*-состоянии не обладает орбитальным и магнитным моментами (орбитальное квантовое число l = 0). То, что атомы серебра испытывают отклонение в магнитном поле, означает, что магнитный момент атома может быть связан только с существованием собственного магнитного момента электрона. Опыт Штерна — Герлаха и другие, более ранние эксперименты привели Уленбека и Гаудсмита (1925) к гипотезе существования у электрона собственного механического момента — *спина*. Поскольку проекция спина электрона равна $S_z = \pm \hbar/2$ и имеем только два значения магнитного момента $M_{\text{B}} = \pm \dfrac{e\hbar}{2m_0 c}$, то в своем опыте Штерн и Герлах получили именно две расщепленные полоски.

Примечание 49. Отто Штерн (O. Stern) (1888–1969), немецкий физик, Нобелевская премия (1943) за развитие молекулярно-лучевого метода и открытие магнитного момента протона;

Вальтер Герлах (W. Gerlach) (1889–1979), немецкий физик;

Джордж Юджин Уленбек (1900–1988), американский физик-теоретик;

Сэмюел Абрахам Гаудсмит (1902–1979), американский физик-теоретик.

3.12. Диамагнетизм

3.12.1. Ларморовская прецессия

Как уже отмечалось в § 3.9 (п. 3.9.1), диамагнетизм присущ всем веществам, но практически проявляется лишь у тех веществ, атомы которых в отсутствие внешнего магнитного поля не обладают магнитным моментом. Проясним, что происходит с этими атомами при включении магнитного поля.

Рассмотрим движение электрона в атоме с позиций классической физики. Частица массой m, движущаяся по круговой орбите радиусом $\vec{r}$ со скоростью $\vec{v}$, обладает механическим моментом количества движения:

$$\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}].$$

Вращение электрона вокруг ядра создает круговой ток (рис. 3.12.1). Поэтому орбитальное движение электрона можно охарактеризовать магнитным моментом $\vec{M}$. Во внешнем магнитном поле на него действует момент силы:

$$\vec{M} = [\vec{M}, \vec{B}] = \frac{I}{c}[\vec{S}, \vec{B}], \qquad (3.12.1)$$

который стремится развернуть орбитальный магнитный момент электрона в направлении магнитного поля $\vec{B}$.

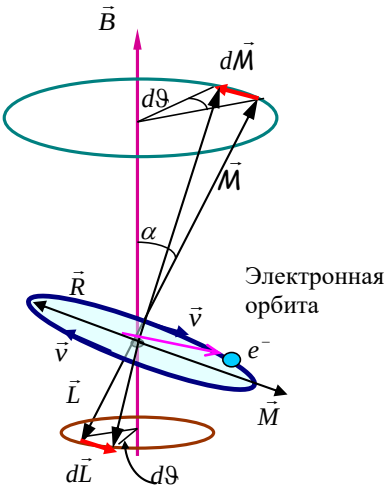


Рис. 3.12.1

Механический момент импульса $\vec{L}$, обусловленный орбитальным движением электрона, направлен в сторону, противоположную магнитному моменту $\vec{M}$ (так как заряд электрона $e^- < 0$), и может изменяться под действием силы Лоренца, действующей на электрон со стороны магнитного поля.

Найдем изменение момента импульса электрона $d\vec{L}$ (см. рис. 3.12.1). Механический момент количества движения электрона связан с моментом сил $\vec{M}$, действующим на электрон в магнитном поле, уравнением моментов:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \qquad (3.12.2)$$

Следовательно, изменение момента импульса электрона $d\vec{L} = \vec{M}dt$ и очевидно, что $d\vec{L} \| \vec{M}$. Изменение момента импульса орбитального движения электрона можно связать с углом поворота $d\vartheta$ плоскости $(\vec{B}, \vec{M})$ или $(\vec{B}, \vec{L})$ вокруг направления магнитного поля $\vec{B}$. Угол $d\vartheta$ называется *углом прецессии.* Так как вектор момента силы $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости $(\vec{B}, \vec{M})$, или $(\vec{B}, \vec{L})$, то и $d\vec{L}$ также перпендикулярен этой плоскости.

На рисунке 3.12.2 векторы $\vec{B}$, $\vec{L}$ и $\vec{M}$ лежат в плоскости листа, а векторы момента силы $\vec{M}$ и приращения момента импульса $d\vec{L}$ перпендикулярны ей и направлены из плоскости страницы на читателя. Модуль вектора приращения момента импульса $d\vec{L}$ равен

$$\left|d\vec{L}\right| = \left|\vec{M}\right| dt = \left|\left[\vec{M},\vec{B}\right]\right| dt = M \cdot B \sin\alpha \cdot dt\,. \quad (3.12.3)$$

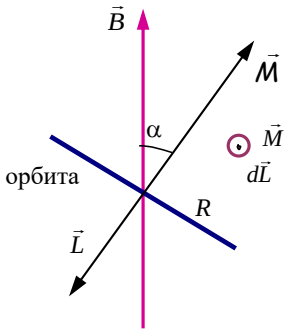


Рис. 3.12.2

Тогда приращение угла прецессии определяется отношением длины дуги к радиусу (рис. 3.12.1):

$$d\vartheta = \frac{\left|d\vec{L}\right|}{\left|\vec{L}\right| \sin\alpha} = \frac{M \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot dt}{L \cdot \sin\alpha} = \frac{M \cdot B}{L} dt\,, \quad (3.12.4)$$

а угловая скорость прецессии соответственно равна

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{M \cdot B}{L} = \frac{e}{2mc} B\,, \qquad (3.12.5)$$

так как $\frac{M}{L} = \frac{e}{2mc}$ – гиромагнитное отношение для орбитального движения электрона (см. § 3.11). Итак, орбита электрона прецессирует с постоянной угловой скоростью (частотой) — частотой *ларморовской прецессии*:

$$\omega_L = eB/2mc\,.$$

Частота прецессии ω_L одинакова для всех электронов и не зависит от радиуса орбиты и наклона орбиты к вектору индукции внешнего магнитного поля $\vec{B}$. Ларморовская частота ω_L много меньше частоты ω орбитального движения электрона $\omega_L << \omega$ даже в очень сильных магнитных полях (рекордное значение постоянного магнтного поля на эксперименте $B \sim 36$ Тс = 360 000 Гс, импульсного поля — ~ $2.8 \cdot 10^3$ Тс).

Теорема Дж. Лармора: *при наличии внешнего постоянного магнитного поля внутреннее движение электронов атома не изменяется, но атом в целом получает дополнительное вращение с угловой скоростью* ω_L.

$$\vec{\omega}_L = \frac{e}{2mc} \vec{B}\,. \qquad (3.12.6)$$

Понятно, что вектор угловой скорости ларморовского вращения электронов $\vec{\omega}_L$ совпадает по направлению с вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и не зависит от направления скорости движения электрона по орбите (!). Таким образом, все орбиты электронов в атоме испытывают одинаковую по величине и направлению прецессию. Так как заряд электрона отрицательный ($e^- < 0$), то магнитный момент M', связанный с этим вращением, направлен против поля $\vec{B}$ и может быть представлен как

$$M' = \frac{1}{c} I'S = \frac{e\omega_L}{c2\pi} \pi < r^2 >= \frac{e\omega_L}{2c} < r^2 >; \qquad (3.12.7)$$

$$I' = \frac{e}{T} = \frac{e\omega_L}{2\pi}\,,$$

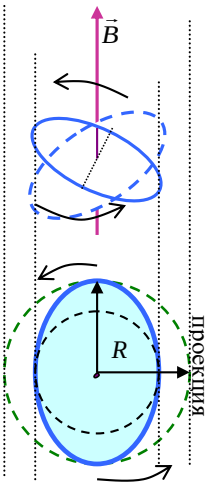


Рис. 3.12.3

где T — период прецессии; здесь мы ввели также средний квадрат радиуса проекции орбиты на плоскость, перпендикулярную направлению поля (см. рис. 3.12.3). Все орбиты электронов в принципе разные и находятся под некоторым углом к внешнему полю, а вклад каждой орбиты определяется ее проекцией на плоскость, перпендикулярную направлению магнитного поля. На рисунке 3.12.3 показано, что эти проекции имеют вид эллипсов, которые с угловой скоростью $\vec{\omega}_L$ вращаются вокруг направления $\vec{B}$. В результате создается намагничивание среды $\vec{J}$, направленное против вектора вызывающего его магнитного поля $\vec{B}$. Это явление называют *диамагнетизмом*.

Примечание 50. Джозеф Лармор (1857–1942), английский физик.

3.12.2. Диамагнитная восприимчивость и проницаемость

Рассчитаем диамагнитные восприимчивость и проницаемость вещества. Момент импульса электрона, обусловленный прецессией, равен $L_L = mr^2\omega_L$, тогда соответствующий магнитный момент можно получить, используя гиромагнитное отношение:

$$\vec{M} = -\frac{er^2}{2c}\vec{\omega}_L = -\frac{e^2r^2}{4mc^2}\vec{B}. \qquad (3.12.8)$$

Чтобы найти наведенный магнитный момент атома, надо просуммировать вклад всех его электронов. Средний квадрат радиуса проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную полю $\vec{B}$, определяющий магнитный момент ларморовской прецессии, равен $\langle r^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle$. Квадрат расстояния электрона до ядра атома R^2 определяется выражением $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Полагая, что электроны в атоме распределены сферически симметрично, можем записать

$$\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle = \frac{1}{3}\langle R^2\rangle. \qquad (3.12.9)$$

Если в атоме Z электронов, то его средний магнитный момент, обусловленный ларморовской прецессией в магнитном поле, равен

$$M = -\frac{Ze^2\left(< x^2 > + < y^2 >\right)}{4mc^2}B \approx -\frac{Ze^2}{6mc^2} < R^2 > H \ , \qquad (3.12.10)$$

где

$$< r^2 > = < x^2 > + < y^2 > = \tfrac{2}{3} < R^2 >. \qquad (3.12.11)$$

Замена индукции магнитного поля B на его напряженность H произведена в связи с тем, что для диамагнетиков разница между этими величинами пренебрежимо мала $B \approx H$. Тогда, если n — число атомов в единице

объема, вектор намагничивания, т. е. магнитный момент единицы объема, равен

$$\vec{J} = -\frac{nZe^2}{6mc^2} < R^2 > \vec{H}\,. \qquad (3.12.12)$$

Из выражения $\vec{J} = \chi\vec{H}$ находим магнитную восприимчивость диамагнетика:

$$\chi = -\frac{nZe^2}{6mc^2} < R^2 >. \qquad (3.12.13)$$

Видно из (3.12.13), что магнитная восприимчивость диамагнетиков зависит только от типа атома и концентрации.

Примечание 51. В системе СИ магнитная восприимчивость диамагнетиков равна

$$\chi = -\frac{nZe^2}{6m}\mu_0 < R^2 >.$$

Магнитная проницаемость материала определяется:

$$\mu = 1 - 4\pi\frac{nZe^2}{6mc^2} < R^2 >. \qquad (3.12.14)$$

То есть получаем, что для диамагнетизма магнитная восприимчивость меньше нуля: $\chi < 0$, и отсюда следует, что магнитная проницаемость меньше единицы: $\mu < 1$.

Энергия теплового движения слишком мала, чтобы изменить внутреннее движение в атоме. Поэтому восприимчивость и проницаемость диамагнетиков не должны зависеть от температуры. Этот вывод следует из соотношений (3.12.13)–(3.12.14), что находится в согласии с опытом.

С ларморовским вращением связана дополнительная кинетическая энергия атома. Магнитные силы не могут сообщить атому ларморовское вращение, так как они перпендикулярны скорости электрона и поэтому работу не производят. Поэтому магнитные силы могут только поддерживать, но не создавать ларморовское вращение. Это движение возникает во время включения магнитного поля и является одним из проявлений электромагнитной индукции.

Величина диамагнитного эффекта мала $\chi \sim -10^{-6}$, так как пропорциональна $< R^2 > \sim 10^{-16}\ см^2$. Например, магнитные восприимчивости водорода и воды при нормальных условиях равны соответственно:

$$\chi = -6 \cdot 10^{-8} \quad для\ H_2;$$

$$\chi = -9 \cdot 10^{-6} \quad для\ H_2O.$$

В заключение параграфа отметим, что *диамагнетизм есть универсальное явление, присущее всем средам*. Однако в тех случаях, когда атомы обладают собственными магнитными моментами, диамагнитный эффект перекрывается значительно более сильным парамагнитным эффектом.

3.13. Парамагнетизм

3.13.1. Магнитная восприимчивость

Вещества, у которых магнитная восприимчивость невелика, но больше нуля: $\chi > 0$, а магнитная проницаемость больше единицы: $\mu = 1 + 4\pi\chi > 1$, называются *парамагнетиками*. Явление *парамагнетизма* проявляется у веществ, атомы которых обладают собственным магнитным моментом в отсутствие магнитного поля.

В этом параграфе мы будем рассматривать лишь слабомагнитные или не обладающие атомным магнитным порядком вещества, т. е. такие, в которых взаимодействием между магнитными моментами отдельных атомов можно пренебречь, и анализировать только взаимодействие атомных магнитных моментов с внешним полем.

В отсутствие внешнего поля в пространстве нет выделенных направлений, магнитные моменты отдельных атомов ориентированы беспорядочно, поэтому суммарный магнитный момент парамагнетика равен нулю $\sum \vec{M}_a = 0$.

Во внешнем магнитном поле магнитные моменты атомов $\vec{M}_a$ ориентируются преимущественно по полю $\vec{B}$, так как минимум энергии (устойчивое состояние) достигается при совпадении направлений векторов $\vec{M}_a$ и $\vec{B}$. Это следует из выражения для энергии взаимодействия магнитного дипольного момента $\vec{M}_a$ с внешним магнитным полем $\vec{B}$:

$$W = -\left(\vec{M}, \vec{B}\right) = -MB\cos\vartheta .$$

Таким образом, вещество намагничивается в направлении вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ ($\vec{J} \| \vec{B}$), т. е. магнитное поле увеличивается, что и составляет суть явления парамагнетизма:

$$\vec{B} = (1 + 4\pi\chi)\vec{H} ;$$

$$\vec{J} = \chi\vec{H} .$$

Полуклассическая *теория парамагнетизма* была разработана П. Ланжевеном в 1905 г. Поскольку намагниченность парамагнетика обусловлена ориентацией дипольных магнитных моментов во внешнем поле, введем функцию распределения $f(\vec{l})$ (плотность вероятности) для описания распределения осей диполей по направлениям в пространстве. Величина

$$dn = nf(\vec{l})d\Omega$$

определяет среднее число диполей, оси которых лежат в пределах телесного угла $d\Omega$, в единице объема вещества (рис. 3.13.1). Единичный вектор $\vec{l}$ ука-

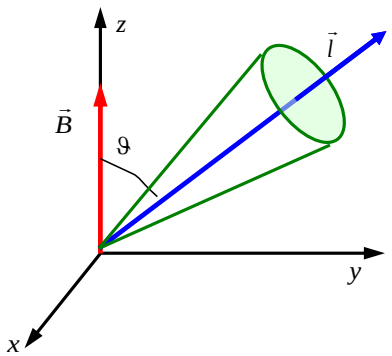


Рис. 3.13.1

зывает направление оси элементарного телесного угла $d\Omega$. В отсутствие внешнего магнитного поля все направления дипольных моментов равновероятны, т. е. $f(\vec{l})$ имеет одинаковые значения по всем направлениям.

При наличии внешнего магнитного поля в состоянии термодинамического равновесия пространственная ориентация магнитных моментов должна подчиняться распределению Больцмана, т. е.

$$f(\vec{l}) = C\,exp\left(-\frac{W}{kT}\right) = C\,exp\left(\frac{\vec{M}_a\vec{B}}{kT}\right). \qquad (3.13.1)$$

Если выполняется условие

$$\frac{M_a B}{kT} << 1, \qquad (3.13.2)$$

то функцию $f(\vec{l})$ можно разложить в ряд. Для того чтобы понять, в каких случаях это можно сделать, сделаем численные оценки. Положим магнитный момент атома равным магнетону Бора $M_a = M_в \cong 9\cdot 10^{-21}\,эрг/Гс$; внешнее магнитное поле — $B = 10^4\,Гс\,(=1\,Тл)$; температуру — $T = 300\,\text{К}$; $k = 1{,}38\cdot 10^{-16}$ эрг/К. Тогда в числителе получаем величину $(M_a\cdot B)\cong 9\cdot 10^{-17}\,эрг$; в знаменателе — $kT \approx 4\cdot 10^{-14}\,эрг$ и условие (3.13.2) хорошо выполняется.

Другими словами, для не слишком низких температур T и не слишком больших магнитных полей B имеем $\frac{M_a B}{kT} << 1$. Поэтому разложим функцию $f(\vec{l})$ в степенной ряд и ограничимся первыми двумя членами разложения. Предполагая, что поле $\vec{B}$ направлено вдоль оси z, получаем

$$f(\vec{l}) \cong C\left(1+\frac{\vec{M}_a\vec{B}}{kT}\right) = C\left(1+\frac{M_a B\cos\vartheta}{kT}\right). \qquad (3.13.3)$$

Постоянная C определяется из условия нормировки

$$\int f(\vec{l})\,d\Omega = 1. \qquad (3.13.4)$$

Здесь предполагается, что интегрирование производится по всем направлениям в пространстве:

$$C\int d\Omega + C\frac{M_a B}{kT}\int \cos\vartheta\,d\Omega = C4\pi = 1, \quad \text{т. е. получаем}$$

$$C = \frac{1}{4\pi}. \qquad (3.13.5)$$

Интеграл $\int \cos\vartheta\,d\Omega$ обращается в нуль, так как $\cos\vartheta$ с равной вероятностью может иметь одинаковые по модулю положительные и отрицательные значения.

По определению намагниченности $\vec{J} = n\langle\vec{M}_i\rangle$, где $\langle\vec{M}_i\rangle$ — средний магнитный момент частицы (атома). Очевидно, что вектор намагниченности среды $\vec{J}$ будет направлен вдоль $\vec{B}$, т. е. направлен по оси z. Если магнитный момент атома $\vec{M}_a$ заключен в элементарном телесном угле $d\Omega$,

т. е. направлен вдоль вектора $\vec{l}$, то его вклад в намагниченность равен $\mathcal{M}_a \cos\vartheta$. Тогда, интегрируя по всем направлениям ($\Omega = 4\pi$), получаем

$$\vec{J} = n\left\langle \vec{\mathcal{M}}_i \right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \frac{n}{4\pi}\mathcal{M}_a \int \left(1 + \frac{\mathcal{M}_a B}{kT} Cos\vartheta\right) Cos\vartheta d\Omega = \frac{n}{4\pi}\mathcal{M}_a \left(\int Cos\vartheta d\Omega + \frac{\mathcal{M}_a B}{kT}\int Cos^2\vartheta d\Omega\right) = \quad (3.13.6)$$

$$= \frac{n}{4\pi}\mathcal{M}_a \left(0 + \frac{\mathcal{M}_a B}{kT}\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{n\mathcal{M}_a^2}{3kT} B.$$

Таким образом, намагниченность вещества равна

$$\vec{J} = \frac{n\mathcal{M}_a^2}{3kT}\vec{B}. \quad (3.13.7)$$

Используя соотношения $\vec{J} = \chi\vec{H}$ и $\vec{B} = \mu\vec{H} = (1 + 4\pi\chi)\vec{H}$, получаем следующее уравнение для определения магнитной восприимчивости:

$$\frac{\chi}{1 + 4\pi\chi} = \frac{n\mathcal{M}_a^2}{3kT}. \quad (3.13.8)$$

Можно учесть малость магнитной восприимчивости χ по сравнению с единицей ($\chi \sim 10^{-7} \div 10^{-4}$; $4\pi\chi << 1$), тогда получаем для *парамагнитной восприимчивости* следующее выражение:

$$\chi = \frac{n\mathcal{M}_a^2}{3kT}. \quad (3.13.9)$$

Итак, зависимость магнитной восприимчивости парамагнетика от температуры имеет вид

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (3.13.10)$$

и носит название *закона Кюри*, где введена *постоянная Кюри*:

$$C = \frac{n\mathcal{M}_a^2}{3k}.$$

Эта зависимость магнитной восприимчивости от температуры была обнаружена экспериментально П. Кюри еще до разработки соответствующей теории в 1896 г.

Закон Кюри хорошо описывает парамагнетизм газов, паров щелочных металлов, разбавленных жидких растворов парамагнитных солей и некоторых парамагнитных солей в кристаллическом состоянии. Для большинства твердых тел температурная зависимость магнитной восприимчивости подчиняется закону Кюри — Вейсса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}, \quad (3.13.11)$$

где постоянная T_C — температура Кюри, которая также может быть получена из (3.13.8), если не пренебрегать магнитной восприимчивостью в знаменателе:

$$T_C = 4\pi C.$$

Температура Кюри определяется взаимодействием магнитных моментов атомов между собой и с внутрикристаллическим полем и, таким образом, определяется свойствами вещества.

Примечание 52. Поль Ланжевен (1872–1946), французский физик;
Пьер Кюри (1859–1906), французский физик, Нобелевская премия (1903) за исследования радиоактивности и открытие радия;
Пьер Эрнест Вейсс (1865–1940), французский физик.

3.13.2. Намагничивание в сильных полях (или при малых температурах *T*)

Обобщение результатов на случай сильных магнитных полей или низких температур, когда условие $\frac{\mathcal{M}_a B}{kT} << 1$ не выполняется, было также выполнено П. Ланжевеном. Чтобы найти намагниченность при низких температурах, необходимо учесть, что магнитный момент атома квантуется. Поэтому мы будем считать, что магнитный момент атома может принимать значения, кратные магнетону Бора $\mathcal{M}_a = m\mathcal{M}_B$ (см. п. 3.9, формулы (3.9.1)–(3.9.2), $\mathcal{M}_B = e\hbar/2m_0c \sim 0.9\cdot 10^{-20}$ эрг/Гс), и соответственно рассматривать ориентации, допускаемые правилами квантования.

Для упрощения вычислений примем, что магнитный момент атома определяется только спиновым моментом и равен одному магнетону Бора: $\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_B$. Тогда в магнитном поле возможны только две ориентации магнитного момента: вдоль и против поля (см. опыт Штерна — Герлаха, п. (3.11.3)). При параллельной ориентации проекция магнитного момента атома на направление магнитного поля равна $(+\mathcal{M}_B)$, в случае антипараллельной ориентации — $(-\mathcal{M}_B)$. Этим состояниям соответствуют следующие энергии взаимодействия момента с внешним полем:

$$W_{\uparrow\uparrow} = -\mathcal{M}_B B \quad \text{и} \quad W_{\uparrow\downarrow} = +\mathcal{M}_B B. \tag{3.13.12}$$

Согласно распределению Больцмана числа атомов в единице объема, сориентированных по полю и против поля, будут соответственно равны:

$$n_{\uparrow\uparrow} = Ce^{x} \quad \text{и} \quad n_{\uparrow\downarrow} = Ce^{-x},$$

где $x = \mathcal{M}_B B/kT$. Нормировочная постоянная C определяется из условия $n_{\uparrow\uparrow} + n_{\uparrow\downarrow} = n$, где n — полная концентрация атомов. Это дает возможность определить C:

$$C\left(e^{x} + e^{-x}\right) = n;$$

$$C = \frac{n}{e^{x} + e^{-x}}. \tag{3.13.13}$$

Тогда намагничивание образца равно

$$J = \left(n_{\uparrow\uparrow} - n_{\uparrow\downarrow}\right)\mathcal{M}_B = n\mathcal{M}_B \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = n\mathcal{M}_B th\, x, \tag{3.13.14}$$

где $th\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ — гиперболический тангенс.

Намагниченность образца принято описывать функцией Ланжевена $L(x)$. В рассмотренном нами случае функция Ланжевена обозначается $L_{1/2}(x)$ и равна

$$L_{1/2}(x) = th\,x. \quad (3.13.15)$$

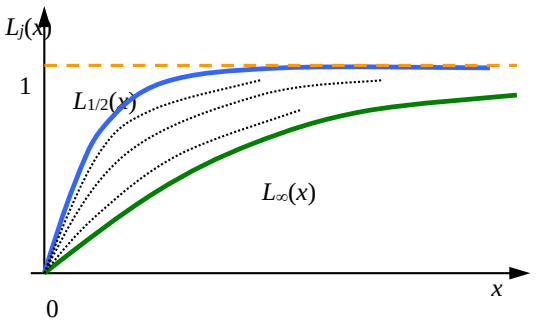


Рис. 3.13.2

Индекс $1/2$ соответствует спиновому механическому моменту атома, который в единицах $\hbar$ равен $1/2$. Примерная зависимость функции Ланжевена изображена на рисунке 3.13.2.

Если магнитный момент атома больше одного магнетона Бора, то расчет проводится по той же схеме. При этом увеличивается только число возможных ориентаций и значения проекций магнитных моментов атомов на направление магнитного поля. Во всех случаях результирующая намагниченность записывается в виде

$$J = n\mu_a L(x),$$

где $L(x)$ — функция Ланжевена. Для веществ, атомы которых обладают полным механическим моментом j, измеренным в единицах $\hbar$, функцию Ланжевена обозначают $L_j(x)$. При различных значениях j функция $L_j(x)$ изменяется, но общий характер зависимости сохраняется (см. рис. 3.13.2). В классическом пределе, когда допускаются любые ориентации магнитных моментов атомов (нет квантования), функция Ланжевена обозначается $L_\infty(x)$ и равна

$$L_\infty(x) = cth\,x - \frac{1}{x}, \quad (3.13.16)$$

где $cth\,x$ — гиперболический котангенс. При малых значениях переменной x, разлагая функции Ланжевена (3.13.15)–(3.13.16) в ряд ($x = \mu_a B/kT << 1$), получаем:

$$L_{1/2}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \ldots, \qquad L_\infty(x) = \frac{1}{3}x + \ldots$$

Тогда для намагниченности при $j = 1/2$ имеем

а) с учетом квантования: $J = n\mu_a \dfrac{\mu_a B}{kT} = \dfrac{n\mu_a^2}{kT}B$, (3.13.17)

б) без учета квантования $J = \dfrac{n\mu_a^2}{3kT}B$, т. е. втрое меньше. (3.13.18)

Последний результат, как и следовало ожидать, совпадает с полученным при классическом рассмотрении задачи (см. формулу (3.13.9)). Квантовый результат для $j = 1/2$ отличается от классического результата в 3 раза.

Тепловое движение атомов вещества недостаточно интенсивно, чтобы изменить сами магнитные моменты $\vec{M}_a$, которые определяются внутренним строением атома, а может определять только их ориентацию относительно магнитного поля. Поэтому, как следует из полученного результата, магнитная восприимчивость парамагнетиков должна меняться обратно пропорционально абсолютной температуре, что согласуется с опытным законом Кюри.

В сильных полях $(x >> 1)$ обе функции $L_{1/2}(x)$ и $L_{\infty}(x)$ асимптотически стремятся к единице, как это видно также из рисунка 3.13.2. Этому соответствует состояние *насыщения намагничивания* $J = nM_a$, когда все магнитные моменты атомов выстраиваются параллельно магнитному полю.

Поясним в нескольких словах механизм возникновения намагниченности. В магнитном поле атом как целое совершает регулярную прецессию с ларморовской частотой вокруг направления магнитного поля (рис. 3.13.3). При таком движении угол между направлениями магнитного момента $\vec{M}_a$ и поля $\vec{B}$ и, следовательно, проекция вектора $\vec{M}_a$ на направление магнитного поля остаются неизменными. Поэтому прецессия сама по себе не может привести к намагничиванию парамагнетика. *Намагничивание* (для орбитального движения — изменение наклона плоскости орбиты относительно направления магнитного поля) *возникает в результате взаимодействий атомов между собой*.

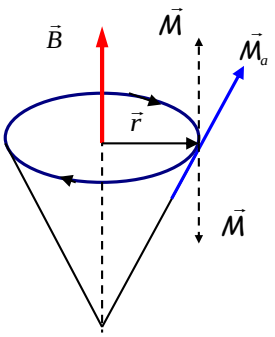


Рис. 3.13.3

Если атом получает толчок в направлении прецессионного вращения, то соответствующий момент сил вызовет дополнительную прецессию вокруг оси, перпендикулярной магнитному полю. Это приведет к увеличению угла между векторами $\vec{M}_a$ и $\vec{B}$. Толчок, полученный атомом в противоположном направлении, уменьшит этот угол. Взаимодействия первого типа будут размагничивать парамагнетик, а второго — намагничивать. В целом эффект намагничивания будет преобладающим, так как толчки, получаемые навстречу движению, будут в среднем сильнее толчков, получаемых «вдогонку».

Таким образом, намагничивание веществ создается и устанавливается в результате столкновений атомов между собой. Магнитное поле $\vec{B}$ только задает направление в пространстве и поддерживает намагничивание парамагнетика, но не создает его.

Парамагнетизм, создаваемый ориентацией во внешнем поле магнитных моментов атомов, не является единственным вкладом, определяющим парамагнитные свойства веществ и, прежде всего, твердых тел.

Дополнительный вклад в магнитные свойства материалов могут вносить эффекты, связанные, например, с влиянием кристаллического поля решетки на движение электронов в атоме (парамагнетизм Ван-Флека), а также обусловленные спиновыми магнитными моментами электронов проводимости (парамагнетизм В. Паули). В отличие от «ориентационного» парамагнетизма, эти составляющие магнитной восприимчивости в широких пределах не зависят от температуры.

3.14. Ферромагнетизм

Ферромагнетизм — магнитоупорядоченное состояние вещества, при котором все магнитные моменты атомных носителей магнетизма в пределах пространственных областей, называемых *доменами*, параллельны. Сами ферромагнитные вещества обладают при этом самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью.

3.14.1. Свойства ферромагнетиков

Ферромагнетиками называются вещества, обладающие атомным магнитным порядком в отсутствие внешнего поля. Другими словами, ферромагнитным называется такое состояние вещества, при котором энергия взаимодействия между атомными магнитными моментами значительно превышает энергию взаимодействия магнитных моментов отдельных атомов с внешним магнитным полем. Именно эти вещества обнаруживаются в природе в виде постоянных магнитов.

Ферромагнитное состояние вещества реализуется ниже определенной температуры, называемой температурой Кюри. При более высоких температурах эти вещества, как правило, переходят в парамагнитное состояние, в котором температурная зависимость их магнитной восприимчивости подчиняется закону Кюри — Вейсса (см. формулу (3.13.11)).

Среди чистых химических элементов ферромагнитными свойствами обладают переходные металлы группы железа: железо Fe, кобальт Co, никель Ni (3*d*-металлы) и редкоземельные металлы: гадолиний Gd, тербий Tb, диспрозий Dy, гольмий Ho, эрбий Er, тулий Tm (4*f*-элементы). Кроме того, ферромагнетиками являются большое количество сплавов этих и некоторых других металлов.

Характерной особенностью ферромагнетиков является *сложная нелинейная зависимость между намагниченностью* $\vec{J}$ *и напряженностью магнитного поля* $\vec{H}$ или между векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$. Типичные зависимости

$J(H)$ и $B(H)$ изображены на рисунке 3.14.1. Впервые эту зависимость систематически исследовал для железа А. Г. Столетов.

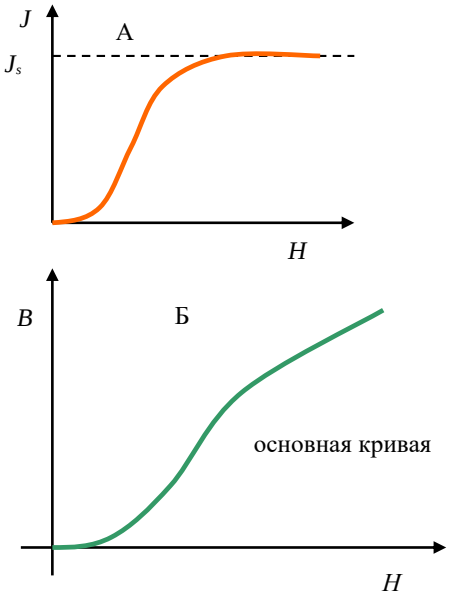


Рис. 3.14.1

Если тело изначально не намагничено, то по мере возрастания $\vec{H}$ намагниченность $\vec{J}$ сначала быстро растет, а затем становится практически постоянной: $\vec{J} = \vec{J}_S$ — *состояние насыщения*, т. е. кривая $J = J(H)$ переходит в горизонтальную прямую (кривая А на рис. 3.14.1).

Магнитная индукция в образце

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{J} \qquad (3.14.1)$$

также возрастает с ростом поля $\vec{H}$. В состоянии насыщения получаем

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{J}_S = \vec{H} + const\,, \qquad (3.14.2)$$

т. е. кривая $B = B(H)$ переходит в прямую, наклоненную к обеим осям под углом 45° (если H и B отложены в одинаковых масштабах, кривая Б на рис. 3.14.1). Для ферромагнетиков можно по-прежнему написать соотношения:

$$\vec{J} = \chi\vec{H} \quad \text{и} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}\,. \qquad (3.14.3)$$

Однако теперь магнитные восприимчивость χ и проницаемость μ следует рассматривать не как определенные постоянные величины, а как функции напряженности магнитного поля H. Эти функции χ и μ сначала возрастают с увеличением поля, проходят через максимум при достижении в материале намагниченности насыщения, а затем стремятся в сильных полях к нулю $(\chi \to 0)$ и единице $(\mu \to 1)$ соответственно.

Примерная зависимость проницаемости магнитного поля μ в ферромагнетиках изображена на рисунке 3.14.2. Определение χ и μ с помощью ранее приведенных соотношений лишено смысла. Поэтому для ферромагнетиков величины χ и μ определяются соотношениями — дифференциальными восприимчивостями и проницаемостями:

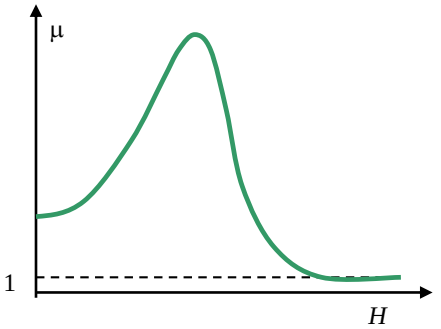


Рис. 3.14.2

$$\chi = \frac{dJ}{dH}, \quad \mu = \frac{dB}{dH}. \qquad (3.14.4)$$

Значения проницаемости μ в максимуме для большинства ферромагнетиков достигают сотен и тысяч единиц (чистое железо — 5000), а для некоторых специальных сплавов приближаются к миллиону (супермаллой — 800 000). Следует заметить, что понятие магнитной проницаемости применяют только к основной кривой намагничивания (кривая, которая начинается из нуля $0A_1A$ на рис. 3.14.3).

<u>Второй характерной особенностью</u> ферромагнетиков является наличие *магнитного гистерезиса*, т. е. связь между величинами J и H или B и H является неоднозначной и определяется предшествующей историей намагничивания ферромагнетика.

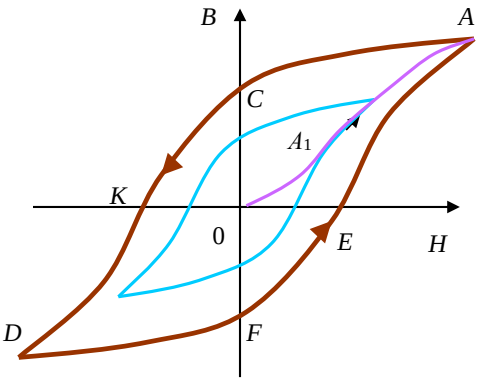


Рис. 3.14.3

Пусть имеем первоначально не намагниченный ферромагнетик. Будем его намагничивать, увеличивая поле H от нуля до значения H_1, при котором наступает насыщение (точка A на рис. 3.14.3). Затем начнем уменьшать магнитное поле, изменяя его величину от значения $+H_1$ до противоположного по знаку значения $-H_1$. Как показывает опыт, кривая намагничивания пойдет не по начальному пути $0A_1A$, а выше, например по пути $ACKD$. Если теперь изменять напряженность поля в обратном направлении: от $-H_1$ до значения $+H_1$, то кривая намагничивания пройдет ниже $0A_1A$ — по пути $DFEA$ (рис. 3.14.3).

Полученная замкнутая кривая называется *петлей гистерезиса*. Если в точках A и D материал достигает насыщения, то петля гистерезиса носит название *максимальной*, или *предельной*. Когда в крайних точках петли насыщения нет, то получается петля меньшего размера, как бы вписанная в

предельную. Кривая $0A_1A$ называется *основной кривой намагничивания*. Из рисунка видно, что при $H = 0$ индукция B не обращается в нуль. Величина индукции B, численно равная отрезку $0C$ на оси ординат, называется *остаточной индукцией*, а соответствующая ей величина $J = \frac{B}{4\pi}$ — *остаточной намагниченностью*. С наличием остаточного намагничивания связано существование постоянных магнитов в природе.

Для того чтобы размагнитить материал, надо довести кривую намагничивания до точки K, т. е. приложить к образцу магнитное поле H_c, численно равное длине отрезка $0K$ на оси абсцисс и имеющее направление, противоположное полю, вызвавшему намагничивание. Величина H_c называется *коэрцитивной силой*. Значения остаточного намагничивания и коэрцитивной силы для разных ферромагнетиков меняются в широких пределах. По величине коэрцитивной силы ферромагнетики делятся на магнитно-мягкие (материалы для трансформаторов, электромоторов, генераторов и т. д.) и магнитно-жесткие (постоянные магниты).

Третьей характерной особенностью ферромагнетиков является наличие определенной температуры, называемой *точкой* (*температурой*) *Кюри* T_c, при переходе через которую вещество претерпевает фазовый переход второго рода. В результате получаем, что ферромагнитные свойства вещества реализуются только ниже определенной температуры $T < T_c$. При переходе через точку Кюри вещество теряет эти свойства и при температурах $T > T_c$ находится, как правило, в парамагнитном состоянии. В окрестности точки Кюри парамагнитная восприимчивость образца подчиняется закону Кюри — Вейсса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}, \tag{3.14.5}$$

где C — постоянная, зависящая от свойств конкретного вещества.

3.14.2. Природа ферромагнетизма

Первая количественная теория ферромагнетизма была разработана П. Вейссом в 1907 г. Эта теория носит полуфеноменологический характер. Чтобы учесть силы взаимодействия, которые ориентируют магнитные моменты атомов ферромагнетика, Вейсс наряду с обычным макроскопическим полем в веществе ввел эффективное молекулярное поле. Последнее, согласно предположению Вейсса, пропорционально намагниченности ферромагнетика:

$$H_{эфф} = AJ_S, \tag{3.14.6}$$

где A — постоянная молекулярного поля $(A > 0)$; J_S — намагниченность насыщения. Энергия магнитного взаимодействия в этом случае квадратично зависит от J_S:

$$W = -J_S H_{эфф} / 2 = -AJ_S^2 / 2 < 0. \tag{3.14.7}$$

Отсюда следует, что ферромагнетик будет самопроизвольно намагничен и в отсутствие внешнего поля, так как благодаря гипотетическому взаимодействию, введенному Вейссом, состояние спонтанного намагничивания энергетически выгодно.

Теория молекулярного поля дает хорошее согласие с опытом при высоких температурах ($T \sim T_c$). Однако простые оценки показывают, что постоянная молекулярного поля имеет величину порядка 10^3–10^4, т. е. внутренние поля, необходимые для объяснения ферромагнетизма, в тысячи и десятки тысяч раз превышают магнитные поля, которые могут создать ориентированные магнитные моменты атомов в веществе. Поэтому ферромагнетизм не может быть объяснен магнитным взаимодействием атомов. Это доказал прямой опыт, поставленный Я. Г. Дорфманом в 1927 г.

Кратко рассмотрим опыт Дорфмана. Между полюсами сильного электромагнита параллельно магнитному полю помещалась никелевая фольга толщиной ~ 20 мк. Через фольгу перпендикулярно её поверхности (и полю $\vec{H}$) пропускался пучок быстрых электронов от радиоактивного источника (β-излучение). После прохождения через фольгу след пучка регистрировался на фотопластинке. Измерения проводились как при включенном, так и при выключенном магнитном поле электромагнита. При постановке опыта предполагалось, что если никелевая фольга будет намагничена до насыщения параллельно её поверхности, то молекулярное поле $\vec{H}_{мол}$ будет ориентировано во всем образце параллельно внешнему полю. Если это поле магнитной природы, то пучок электронов после прохождения через фольгу должен отклоняться под действием суммарного поля $\vec{H} + \vec{H}_{мол}$. Ожидаемое отклонение составило бы ~ 10 мм. Обнаруженное на опыте смещение пучка $\sim 0{,}3$ мм и соответствовало полю в образце $\sim 10^4$ Гс. На основании этого опытного результата был сделан вывод о немагнитной природе молекулярного поля.

Объяснение свойств ферромагнетиков при низких температурах и физической природы молекулярного поля Вейсса смогла дать только квантовая физика. Это было сделано в 1927–1928 гг. в работах Я. И. Френкеля и В. Гейзенберга. Кратко рассмотрим суть идеи, не привлекая математического аппарата квантовой механики. В отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнитный образец можно рассматривать как совокупность большого числа малых (но макроскопических $\sim 1 \div 10 мкм$) пространственных областей, каждая из которых намагничена до насыщения (идея Вейсса). Эти области получили название *доменов*. При этом векторы намагниченности отдельных доменов $\vec{J}_{Si}$ направлены так, что суммарный магнитный момент всего образца равен нулю (учитывая объем домена V_i):

$$\vec{M} = \sum_i \vec{J}_{Si} V_i = 0 .$$

В монокристаллических ферромагнетиках существуют оси легкого намагничивания (главные оси симметрии кристалла), вдоль (против) кото-

рых направлены векторы самопроизвольной намагниченности $\vec{J}_S$ ферромагнитных доменов.

«Распад» ферромагнетика на домены происходит потому, что этот процесс энергетически выгоден. Он является следствием конкуренции двух видов взаимодействий: *обменного*, имеющего существенно квантово-механическую природу, и *магнитного* — диполь-дипольного взаимодействия магнитных моментов. Минимум суммарной энергии этих взаимодействий определяет устойчивую конфигурацию внутренней структуры магнетика. Обменное взаимодействие — короткодействующее (радиус действия ~ размеров атомов). Оно стремится установить магнитные моменты атомов параллельно и отвечает за однородную намагниченность в доменах. Минимум энергии обменного взаимодействия электронов достигается при намагничивании всего ферромагнетика в определенном направлении. Однако такому состоянию магнетика соответствует значительная энергия создаваемого им магнитного поля. Диполь-дипольное взаимодействие не может конкурировать с обменным взаимодействием в пределах домена. Однако, являясь дальнодействующим, оно ориентирует антипараллельно векторы намагниченности соседних доменов. Тем самым магнитное поле, возбуждаемое ферромагнетиком, ослабляется, и уменьшается соответствующая ему энергия.

Благодаря короткодействующему характеру обменных сил энергия обменного взаимодействия остается неизменной для всех электронов, за исключением электронов на границах доменов. Энергия этих электронов возрастает из-за различной ориентации электронных спинов атомов, принадлежащих соседним доменам. Энергия обменного взаимодействия атомов, расположенных на границах доменов, пропорциональна полной площади поверхностей, вдоль которых граничат домены, и носит название *поверхностной энергии*. По мере увеличения числа доменов поверхностная, а с ней и полная энергия обменного взаимодействия возрастает, но убывает энергия магнитного поля ферромагнетика. Образование доменов прекращается, когда сумма обменной и магнитной энергий достигает минимума. Этим условием определяется и размер доменов. При некоторых критически малых размерах ферромагнитных образцов образование в них нескольких доменов может стать энергетически невыгодным. Тогда такие мелкие ферромагнитные частицы при $T < T_c$ оказываются однородно намагниченными (однодоменные частицы).

Доменную структуру вещества можно наблюдать экспериментально методом порошковых фигур и при пропускании поляризованного света через ферромагнитные пленки.

Намагничивание ферромагнетика состоит в переориентации векторов намагниченности доменов в направлении приложенного поля и включает в себя *смещение*, *вращение* и *парапроцесс*.

Процесс *смещения* в многодоменном ферромагнетике заключается в перемещении границ между доменами: объем доменов, векторы $\vec{J}_S$ кото-

рых составляют наименьший угол с направлением напряженности магнитного поля $\vec{H}$, при этом увеличиваются за счет соседних доменов с энергетически менее выгодной ориентацией вектора намагниченности $\vec{J}_S$ относительно поля. При своем смещении границы доменов могут менять форму, размеры и собственную энергию. Эти факторы в одних случаях способствуют, а в других препятствуют процессу смещения. Обычно задержка смещения (и соответственно намагничивания) происходит при встрече границы домена с какими-либо неоднородностями структуры ферромагнетика. Для продолжения смещения необходимо вновь изменять магнитное поле $\vec{H}$ (либо температуру или давление). Такой рост доменов, происходящий в слабых полях, имеет обратимый характер.

Процесс *вращения* состоит в повороте векторов $\vec{J}_S$ в направлении поля $\vec{H}$. Причиной возможной задержки или ускорения процесса вращения является магнитная анизотропия ферромагнетика (первоначально векторы доменов направлены вдоль осей легкого намагничивания, в общем случае не совпадающих с направлением вектора $\vec{H}$). При полном совпадении вектора намагниченности $\vec{J}_S$ с направлением поля $\vec{H}$ достигается так называемое техническое магнитное насыщение, равное величине намагниченности насыщения $\vec{J}_S$ ферромагнетика при данной температуре.

Парапроцесс обусловлен ориентацией в поле элементарных носителей магнетизма (орбитальных и спиновых магнитных моментов), остававшихся неупорядоченными вследствие дезорганизующего действия теплового движения. Парапроцесс в большинстве случаев дает очень малый прирост намагниченности, поэтому намагничивание ферромагнетика определяется в основном процессами смещения и вращения.

Магнитную восприимчивость ферромагнетика можно приближенно представить в виде суммы:

$$\chi = \chi_{смещ} + \chi_{вращ}. \qquad (3.14.8)$$

Анализ кривых намагничивания $J(H)$ показывает, что в слабых полях $\chi_{смещ} >> \chi_{вращ}$. В сильных полях после крутого подъема кривой $J(H)$ имеем $\chi_{вращ} >> \chi_{смещ}$.

На рисунке 3.14.4 приведена кривая намагничивания полностью размагниченного ферромагнетика $(J = 0)$ в медленно и монотонно возрастающем поле H (основная кривая намагничивания).

На этой кривой можно выделить следующие характерные области, в которых преобладают

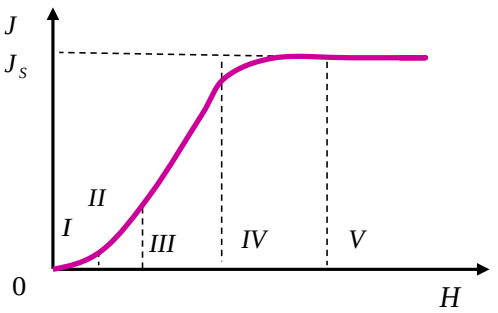


Рис. 3.14.4

разные механизмы намагничивания.

I — область начального, или обратимого, намагничивания. Процессы упругого смещения границ доменов, $J \sim H$.

II — область Рэлея. Процессы упругого (обратимого, $J \sim H$) и неупругого (необратимого, $J \sim H^2$) смещения границ.

III — это область наибольших проницаемостей. Необратимое смещение междоменных границ. Скачкообразное намагничивание.

IV — область приближения к насыщению. Основную роль играют процессы вращения.

V — область парапроцесса.

При намагничивании ферромагнетиков изменяются их размеры и форма. Это явление называется *магнитострикцией*. Наблюдается также и обратный эффект, т. е. кривые намагничивания и петли гистерезиса зависят от внешних механических напряжений.

Опыт показывает, что при перемагничивании ферромагнетик нагревается. При этом в единице объема ферромагнетика выделяется теплота, численно равная площади петли гистерезиса:

$$Q = \oint HdB. \qquad (3.14.9)$$

3.14.3. Другие формы магнитного упорядочивания

Антиферромагнетизм. В зависимости от свойств кристалла обменные силы могут вызывать не только параллельную, но и антипараллельную ориентацию электронных спинов соседних атомов. В простейшем случае магнитную структуру антаферромагнетика можно представить как систему вставленных друг в друга пространственных решеток магнитных ионов — магнитных подрешеток, в узлах каждой из которых находятся магнитные моменты, параллельные друг другу. Каждая из подрешеток состоит из атомов одного сорта. Суммарные магнитные моменты подрешеток компенсируются, поэтому в отсутствие внешнего поля результирующий магнитный момент антиферромагнетика равен нулю.

Под действием внешнего поля антиферромагнетики подобно парамагнетикам приобретают слабую намагниченность. Для магнитной восприимчивости χ антиферромагнетиков типичны значения 10^{-4}–10^{-6}. Примеры таких веществ: MnO, MnS, MnF_2, FeF_2, $FeCl_2$, Cr_2O_3 и др.

В антиферромагнетике обменные силы отвечают за создание антиферромагнитного порядка и стремятся установить каждую пару соседних магнитных моментов строго антипараллельно. Ориентацию магнитных моментов в кристалле (относительно кристаллографических осей) определяют силы магнитной анизотропии. По аналогии с ферромагнетиком направление магнитных моментов в антиферромагнетике называют осью легкого намагничивания. Переход из антиферромагнитного состояния в парамагнитное происходит при температуре Нееля T_N и представляет собой фазовый переход II рода.

Если величина намагничивания обеих подрешеток неодинакова, то возникает нескомпенсированный антиферромагнетизм, называемый *ферримагнетизмом*. В этом случае вещество в отсутствие внешнего поля обладает отличным от нуля магнитным моментом, величина которого может быть довольно значительна (сравнима с ферромагнитным).

Эти типы магнетиков далеко не исчерпывают перечень веществ, обладающих атомным магнитным порядком. Однако их дальнейшее рассмотрение и изучение выходит за рамки нашего курса общей физики.

Дополнение 1. *Обменное взаимодействие* имеет электростатическую природу и эффективно проявляется в тех случаях, когда «перекрываются» волновые функции отдельных частиц системы, т. е. существуют области пространства, в которых с заметной вероятностью может находиться частица в различных состояниях движения. Для фермионов обменное взаимодействие является следствием принципа Паули, препятствующего сближению тождественных частиц с одинаковым направлением спинов, и эффективно проявляется как отталкивание их друг от друга на расстояниях порядка или меньше волны де Бройля.

Примечание 53. Александр Григорьевич Столетов (1839–1896), русский физик;

Пьер Эрнест Вейсс (1865–1940), французский физик;

Яков Григорьевич Дорфман (1899–1974), советский физик, окончил ЛПИ в 1925 г., работал в ФТИ им. А. Ф. Иоффе с 1921 по 1931 г.;

Яков Ильич Френкель (1894–1952), советский физик-теоретик, зав. кафедрой теоретической физики ЛПИ и работал в ФТИ;

Вернер Карл Гейзенберг (1901–1976), немецкий физик-теоретик, Нобелевская премия (1932) за создание квантовой механики — матричная форма;

Генрих Георг Баркгаузен (1881–1956) немецкий физик;

Луи Неель (1904–2000), французский физик, Нобелевская премия (1970) за работы по магнетизму.

3.15. Электропроводность в магнитном поле

3.15.1. Классический эффект Холла (1879)

Когда металлическая пластинка, вдоль которой течет постоянный ток, помещена в магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости пластинки, то на боковых гранях, параллельных приложенному полю и току, возникает разность потенциалов

$$U_H = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

Это *классический эффект Холла*.

Рассмотрим подробнее этот эффект, геометрия которого представлена на рисунке 3.15.1. Постоянное магнитное поле направлено вдоль оси *z*, движение зарядов происходит вдоль оси *x*. В выбранной системе координат компоненты векторов скорости носителей тока (или вектора плотности тока) и индукции приложенного магнитного поля определяются: $\vec{v}\left(v_x, 0, 0\right)$ и $\vec{B}\left(0, 0, B_z\right)$, т. е. имеем

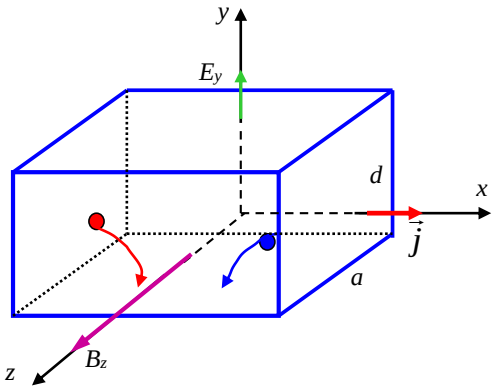


Рис. 3.15.1

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x$$
$$\vec{B} = B_z \vec{e}_z \qquad (3.15.1)$$

Сила Лоренца

$$\vec{F} = \frac{q}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$$

смещает заряды к грани, перпендикулярной оси y (рис. 3.15.1). Действие этой силы эквивалентно действию эффективного электрического поля $\vec{E}$:

$$q\vec{E} = \frac{q}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right]. \qquad (3.15.2)$$

Поэтому заряды будут смещаться до тех пор, пока они не накопятся на гранях, перпендикулярных оси y, в количестве, достаточном для того, чтобы создать такое же электрическое поле, препятствующее смещению зарядов:

$$\vec{E}\left(0, E_y, 0\right). \qquad (3.15.3)$$

Отметим при этом, что положительные и отрицательные заряды смещаются в одну сторону. На рисунке 3.15.2 показано направление тока $\vec{j}$ (на рис. слева направо) и соответствующее направление движения положительного и отрицательного зарядов (при этом индукция магнитного поля $\vec{B}$ направлена перпендикулярно плоскости рисунка и на нас).

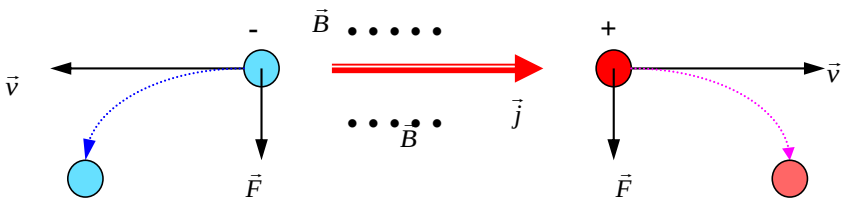


Рис. 3.15.2

Итак, возникает электрическое поле, направленное по оси y и равное по величине:

$$E_y = \pm\frac{1}{c} v_x B_z. \qquad (3.15.4)$$

Знак «плюс» в (3.15.4) относится к положительным носителям тока, знак «минус» — к отрицательным. Скорость движения зарядов находим из плотности тока $j_x = qnv_x$:

$$v_x = \frac{j_x}{qn}, \qquad (3.15.5)$$

где n — концентрация носителей. Таким образом, электрическое поле Холла равно

$$E_y = \frac{j_x B_z}{cnq}. \qquad (3.15.6)$$

Коэффициент или *постоянная Холла* определяются следующим образом:

$$R = \frac{E_y}{B_z j_x} = \frac{1}{cnq}. \qquad (3.15.7)$$

Разность потенциалов на обкладках по оси y (в силу того, что электрическое поле однородное) называется *холловской разностью потенциалов*:

$$U_H = E_y d = R j_x B_z d = \frac{j_x B_z d}{cnq}. \qquad (3.15.8)$$

В этом и заключается эффект Холла. Эксперимент Холла позволяет определить знак носителей заряда. Смена знака носителей заряда ведет к смене направления E_y и соответственно к смене знака зарядов на стенках образца. На практике постоянную Холла получают из следующего соотношения:

$$R = \frac{E_y \cdot ad}{Bj \cdot ad} = \frac{U_H \cdot a}{B \cdot I}, \qquad (3.15.9)$$

где a — ширина образца. Итак, измеряя постоянную Холла, можно найти знак и концентрацию носителей заряда. Было подтверждено, что в металлах носителями являются электроны. В полупроводниках проводимость может обеспечиваться как отрицательными, так и положительными носителями заряда — *дырками*.

Вводят понятие *подвижности* носителей тока (см. §3.2 формулу (3.2.9)):

$$\mu = \frac{v}{E}, \qquad (3.15.10)$$

где v — скорость носителей, а E — электрическое поле вдоль направления тока (в отличие от E_y). Тогда можно записать соотношение, связывающее постоянную Холла, проводимость и подвижность:

$$\frac{j}{E} = \sigma = nq\frac{v}{E} = nq\mu;$$
$$R\sigma = \frac{\mu}{c}. \qquad (3.15.11)$$

Эффект Холла широко используется в опытах для определения знака заряда носителей тока.

3.15.2. Двумерный ток. МДП структуры

Устремим толщину образца к нулю: $a \to 0$ (рис. 3.15.1), получая при этом плоскую двумерную структуру, по такой тонкой пластинке течет двумерный ток. Введем при этом линейную плотность тока $\vec{i}$ (полный ток

$I = id$) как ток, текущий через единицу длины (см) тонкой пластинки. При этом холловская разность потенциалов, следуя (3.15.8), равна

$$U_H = -\frac{di}{nqc}B = -\frac{IB}{nqc}. \qquad (3.15.12)$$

Концентрация носителей n в плоскости пластинки определяется:

$$n = \frac{dN}{dS} = \frac{dN}{dxdy}. \qquad (3.15.13)$$

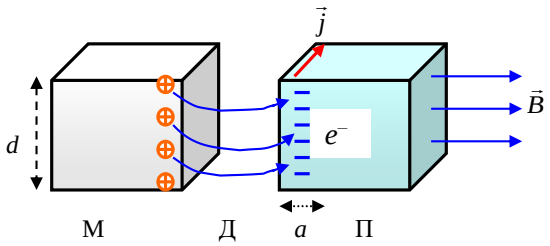


Рис. 3.15.3

Случай двумерного тока реализован в 1970-е гг. На рисунке 3.15.3 изображена структура, где последовательно помещены (слева направо) М — металл и П — полупроводник, а между ними тонкий слой Д — диэлектрика. Это так называемые *МДП структуры*. Ток $\vec{j}$ ($\vec{i}$) течет в плоскости x, y вдоль границы полупроводника в слое толщиной a (рис. 3.15.3, см. также рис. 3.15.4).

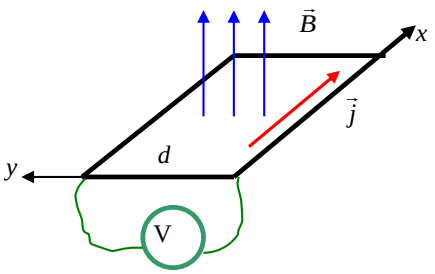


Рис. 3.15.4

Диэлектрик обычно представляет собой очень тонкую пленку окисла на поверхности полупроводника. Электроны, перескочившие через диэлектрическую пленку в полупроводник посредством диффузии, задерживаются на поверхности полупроводника полем, возникающим в металле положительным зарядом. Толщина слоя a ~ 10 ангстрем. Прикладываем внешнее электрическое поле параллельно границе раздела, так что ток идет вдоль границы, и также прикладываем внешнее магнитное поле перпендикулярно поверхности (рис. 3.15.4). Таким образом получаем эффект Холла практически на плоской поверхности. Холловская разность потенциалов равна ($I = id$, $q = e$):

$$U_H = U_y = \frac{I_x B}{nec}. \qquad (3.15.14)$$

Откуда холловское сопротивление равно

$$r_H = \rho_{xy} = \frac{U_y}{I_x} = \frac{B}{nec}. \qquad (3.15.15)$$

Заметим, что это не совсем обычное сопротивление, так как обычное сопротивление определяется $R = \rho_{xx} = U_x / I_x$, а здесь имеем отношение холловской разности потенциалов (по оси y) к току вдоль оси x. Холловское сопротивление (двумерный случай) не зависит от размеров образца:

$$r_H = \frac{U_y}{I_x} = \frac{E_y d}{i_x d} = \frac{E_y}{i_x} = \rho_{xy}, \qquad (3.15.16)$$

т. е. полное сопротивление равно удельному сопротивлению (напомним дифференциальный закон Ома $\vec{E} = \rho \vec{j}$). Можно также показать для двумерного случая, что обычное сопротивление также не зависит от размеров образца, в отличие от трехмерного случая.

Проводимость Холла (на самом деле в теории она вводится чуть сложнее) в нашем случае равна

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{I_x}{U_y} = \frac{nec}{B}. \qquad (3.15.17)$$

Классические зависимости холловского сопротивления и проводимости (3.15.17) от величины магнитной индукции B и концентрации носителей n представлены на рисунках 3.15.5 и 3.15.6.

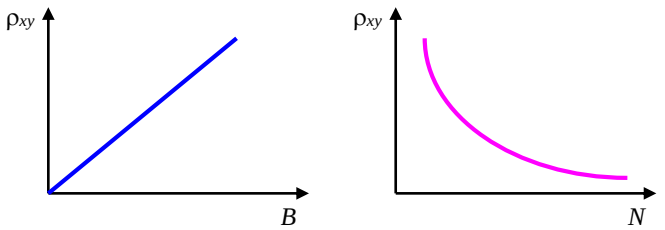


Рис. 3.15.5

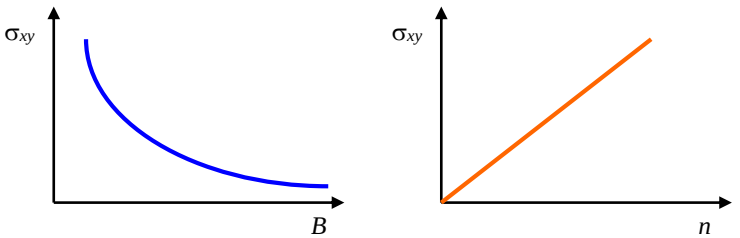


Рис. 3.15.6

3.15.3. Квантовый эффект Холла

Измерения проводимости двумерного тока при сверхнизких температурах ($T \leq 5$ К) показали, что холловская проводимость σ_{xy} меняется ступенчато с ростом магнитного поля B и концентрации n носителей, в данном случае электронов (см. рис. 3.15.7). Скачок проводимости определяет-

ся фундаментальными константами — элементарным зарядом e и постоянной Планка $\hbar = h/2\pi$. Этот скачок имеет смысл *кванта проводимости*:

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{2\pi\hbar} = \frac{e^2}{h}. \qquad (3.15.18)$$

На рисунке 3.15.7 представлены экспериментально полученные ступенчатые зависимости холловской проводимости с изменением индукции B и концентрации n носителей, причем проводимость меняется по формуле

$$\sigma_{xy} = N\frac{e^2}{h}, \qquad N = 1,2,3,... \qquad (3.15.19)$$

Точность определения «ступенек» и их соответствие кратным значениям e^2/h на эксперименте весьма велика, порядка 7–9 значащих цифр. Чем ниже температура, тем ярче выражены ступеньки. Итак, эксперимент показал, что сопротивление от «ступеньки» определяется фундаментальным соотношением:

$$r_{step} = \frac{1}{\sigma_0} = \frac{h}{e^2} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} = 25812.80\,\text{Ом}. \qquad (3.15.20)$$

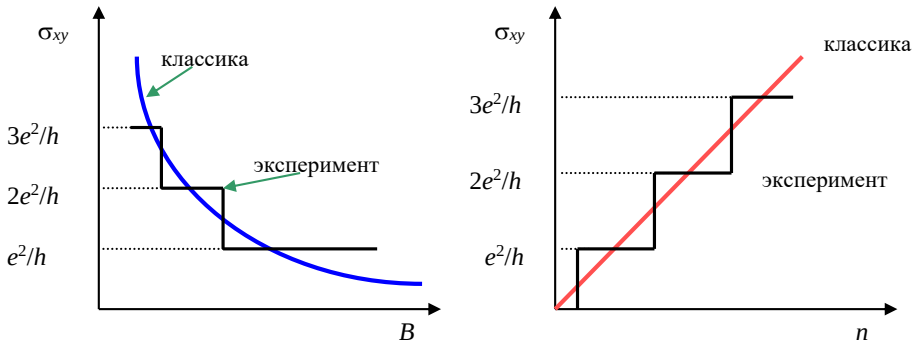


Рис. 3.15.7

Из (3.15.20) следует важный вывод: от материала образца ничего не зависит. Сопротивление зависит только от фундаментальных констант. То есть мы получаем *эталон сопротивления* — международный стандарт сопротивления — r_{step}. Впервые это было обнаружено немецким физиком Клаусом фон Клитцингом, который за открытие квантового эффекта Холла получил Нобелевскую премию в 1985 г.

Приведем качественные соображения для пояснения движения электронов в плоскости. Уравнение движения электрона в магнитном поле имеет вид (см. также п. 3.4):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right]. \qquad (3.15.21)$$

Поскольку сила всегда направлена перпендикулярно к вектору скорости, то энергия сохраняется, а электрон движется по окружности. В самом деле, умножим уравнение (3.15.21) скалярно на вектор скорости $\vec{v}$:

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{c}\vec{v}\left[\vec{v},\vec{B}\right] = 0\,.$$

Правая часть уравнения равна нулю, а левую представим в виде

$$\frac{m}{2}\frac{d\vec{v}^{\,2}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0\,;$$

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = const\,, \qquad (3.15.22)$$

где ω — угловая скорость движения электрона по окружности. Подставляя $\vec{v} = \left[\vec{\omega},\vec{r}\right]$ в (3.15.21), имеем (см. рис. 3.15.8):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega},\vec{r}\right] = \left[\vec{\omega},\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \left[\vec{\omega},\vec{v}\right] = -\frac{e}{mc}\left[\vec{v},\vec{B}\right] = \frac{e}{mc}\left[\vec{B},\vec{v}\right].$$

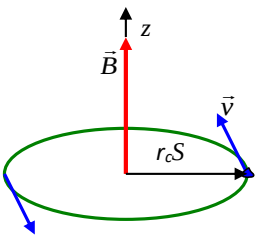


Рис. 3.15.8

Из сравнения этих соотношений получаем циклотронную частоту и циклотронный радиус:

$$\vec{\omega} = \frac{e\vec{B}}{mc}\,; \qquad r_c = \frac{mc}{eB}v\,. \qquad (3.15.23)$$

Координаты электрона $x(t)$ и $y(t)$ как функции времени на плоскости (x, y) (см. рис. 3.15.4) испытывают гармонические колебания с частотой ω, энергия которых в соответствии с квантовой механикой *квантуется*:

$$W_{кол} = W_{вращ} = \left(k + \tfrac{1}{2}\right)\cdot\hbar\omega\,, \qquad (3.15.24)$$

где k = 0, 1, 2, 3, ... Расстояние между уровнями энергии при $\Delta k = 1$ определяется

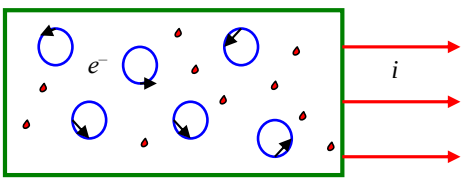
$$\Delta W = \hbar\omega = \frac{m}{2}\omega^2 r_c^2\,.$$

Откуда получаем циклотронный радиус:

$$r_c^2 = \frac{2\hbar}{m\omega} = \frac{2\hbar c}{eB}\,, \qquad (3.15.25)$$

который, как видно, не зависит от массы частицы (и это важно!).

Вернемся к двумерному эффекту Холла. Если тока нет, то электрон кружится на месте. Если ток есть, то «крутящийся» электрон движется поступательно (рис. 3.15.9). Радиус «кружка» определяется формулой (3.15.25). С математической точки зрения эффект Холла можно представить как дрейф вращающегося электрона вдоль приложенного напряжения.



B, (направлено на нас)

Рис. 3.15.9

Сколько можно «уложить кружков», если учесть невозможность их пересечения (по принципу Паули для ферми частиц)? Площадь кружка, учитывая (3.15.25), равна

$$\pi r_c^2 = \frac{2\pi\hbar c}{eB} = \frac{1}{n_e},$$

где n_e — концентрация электронов при условии, что «кружки» заполняют всю плоскость:

$$n_e = \frac{eB}{2\pi\hbar c}. \qquad (3.15.26)$$

Холловская проводимость равна

$$\sigma_{xy} = \frac{n_e ec}{B} = \frac{eBec}{2\pi\hbar cB} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} = \frac{e^2}{h}. \qquad (3.15.27)$$

Оказывается, и это важно, что в двумерном случае площадь «кружка» πr_c^2 есть фазовый объем и эти «кружки» не могут накладываться друг на друга, поскольку только одна ферми-частица может находиться в этом элементе фазового объема. Но над плоскостью электронов можно заполнить еще одну плоскость электронов (плоскость или уровень Ландау) — выше по энергии. Это происходит до тех пор, пока уровни «влезают» в толщину слоя a ~ 10 Å.

Пусть у нас заполнено N плоскостей, тогда холловская проводимость равна

$$\sigma_{xy} = N\frac{e^2}{h}. \qquad (3.15.28)$$

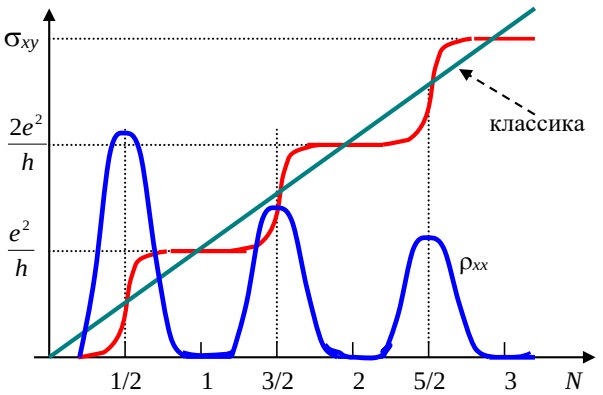


Рис. 3.15.10

Когда уровень Ландау заполнен и до момента заполнения следующего наблюдаем плато в проводимости (см. рис. 3.15.10). Когда уровни Ландау заполняются и при этом появляются дополнительные носители, то эта ситуация соответствует моментам перехода с одного плато на уровень другого плато.

Интересен тот факт, что если рассмотреть обычное омическое сопротивление ρ_{xx} (синяя кривая на рис. 3.15.10), то оно равно нулю, когда холловская проводимость соответствует заполненному уровню Ландау (т. е. соответствует (3.15.28)). В момент перестройки σ_{xy} омическое сопротивление отлично от нуля $\rho_{xx} \neq 0$.

Приложение 3. *Квант магнитного потока.*

Из квантования орбиты по правилу квантования Бора находим скорость электрона:

$$p \cdot 2\pi R = 2\pi k\hbar \quad \text{и} \quad v = \frac{k\hbar}{mR},$$

где $k = 1, 2, 3\ldots$

Тогда радиус орбиты электрона, исходя из (3.15.23), равен

$$R^2 = \frac{cmv}{eB} = k\frac{c\hbar}{eB}$$

Сосчитаем поток магнитной индукции через орбиту электрона:

$$\Phi = \pi R^2 \cdot B = k\frac{\pi chB}{2\pi eB} = k\frac{ch}{2e}.$$

При $k = 1$ получаем квант магнитного потока:

$$\Phi_0 = \frac{ch}{2e} = 2 \cdot 10^{-7}\ Гс \cdot см^2.$$

Квант магнитного потока, зависящий только от мировых констант, является наименьшим возможным значением магнитного потока.

Примечание 54. Эдвин Герберт Холл (1855–1938), американский физик;

Клаус фон Клитцинг (1943 г. р.), немецкий физик, Нобелевская премия по физике (1985) за открытие квантового эффекта Холла.

3.16. Сверхпроводимость

3.16.1. Основные особенности сверхпроводящего состояния

Явление открыто в 1911 г. Г. Камерлингом-Оннесом. При температуре несколько кельвинов (температура жидкого He $T = 4{,}12$ К) сопротивление ряда металлов и сплавов скачком обращается в нуль (см. рис. 3.16.1). Эта температура — критическая температура $T_{кр}$, ниже которой наблюдается сверхпроводящее состояние. Приведем примеры температур перехода в сверхпроводящее состояние для нескольких элементов:

Элемент	**$T_{кр}$, К**
Ti	0,49
Sn	3,7
Pb	7,2

До 1985 г. максимальная критическая температура $T_{кр} \sim 20$ К была у сплава Nb_3Ge.

Экспериментально сверхпроводимость можно наблюдать следующими способами.

А. В общей электрической схеме включено звено из сверхпроводника, которое охлаждается, и при $T \sim T_{кр}$ наблюдается падение напряжения на

нем практически до нуля: $\Delta U = 0$. Сопротивление уменьшается не менее чем в 10^{14} раз.

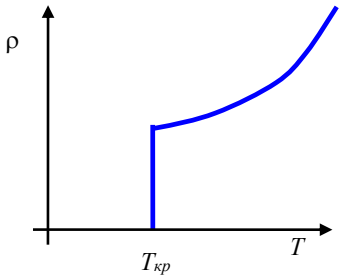


Рис. 3.16.1

Б. Кольцо из сверхпроводника находится в поперечном магнитном поле, в кольце индуцировался ток при $T < T_{кр}$ путем включения магнитного поля. Экспериментально проверялось, что ток практически не затухал в течение 2,5 лет. В то время как для нормального состояния время затухания тока мало (менее 1 с). Удельное сопротивление $\rho_{сверхпр} < 4 \cdot 10^{-23}$ Ом·см (в 10^{17} раз меньше, чем у меди Cu).

Основные экспериментальные факты.

1. Нет сопротивления электрическому току при температуре меньше $T_{кр}$.

2. *Критический ток*. При увеличении тока через сверхпроводник сверхпроводящее состояние нарушается при некотором значении тока $I_{кр}$. Критический ток $I_{кр}$ зависит от температуры, примерная зависимость критического тока от температуры изображена на рисунке 3.16.2.

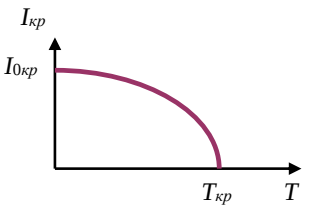


Рис. 3.16.2

3. В магнитном поле проявляется *эффект Мейсснера* (1933 г., совместно с Оксенфельдом). В сверхпроводящем состоянии магнитное поле сверхпроводника равно нулю ($\vec{B} = \vec{H} = 0$). То есть при $T < T_{кр}$ магнитное поле полностью или частично вытесняется из сверхпроводника (см. рис. 3.16.3). При полном вытеснении магнитного поля в сверхпроводнике наблюдается интересный эффект, состоящий в том, что сверхпроводник в поле тяготения Земли не падает, а при включении постоянного магнитного поля зависает, ничем не поддерживаемый («гроб Магомета»). Это происходит за счет сильного взаимодействия собственных магнитных моментов с внешним магнитным полем.

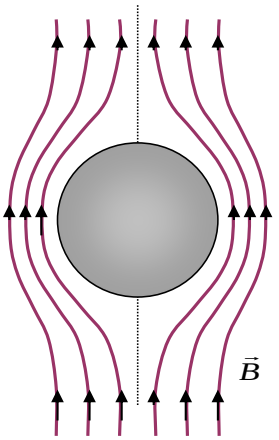


Рис. 3.16.3

Полный эффект Мейсснера наблюдается у чистых металлов (за исключением Nb, V и Tc), когда магнитное поле не проникает внутрь их объема. Это *сверхпроводники 1-го рода*. Частичный эффект Мейсснера — когда нет полного выталкивания магнитного поля (наблюдается у сплавов). Это *сверхпроводники 2-го рода*. Итак, сверхпроводник 1-го рода — идеальный диамагнетик ($\mu = 0$). У них нет объемного тока, весь ток течет по поверхности (в некотором узком, но конечном по толщине слое).

4. *Критическое поле*. При некотором значении магнитного поля $B_{кр}$ сверхпроводимость разрушается. Значение критического поля $B_{кр}$ зависит от материала и температуры, как примерно показано на рисунке 3.16.4. Чем ниже температура проводника при $T < T_{кр}$, тем большие по величине магнитные поля нужно приложить для разрушение сверхпроводящего состояния.

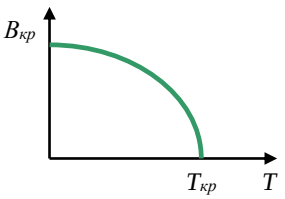


Рис. 3.16.4

Примечание 55. Гейке Камерлинг-Оннес (1853–1926), голландский физик, Нобелевская премия (1913);

Вальтер Фриц Мейсснер (1882–1974), немецкий физик.

3.16.2. Уравнение Лондонов

В 1935 г. Ф. и Г. Лондоны осуществили попытку построить электродинамику сверхпроводников. Цель их попытки состояла в следующем: не вникая в механизм образования сверхпроводимости, оформить в матема-

тическом виде основные экспериментальные факты, а именно отсутствие сопротивления, эффект Мейсснера.

Движение электрона без трения (без сопротивления) описывается уравнением Ньютона:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}\,. \qquad (3.16.1)$$

Поскольку плотность тока: $\vec{j} = en_s\vec{v}$, где n_s — концентрация электронов в сверхпроводнике, уравнение движения можно переписать:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{j}}{e^2 n_s}\right) = \vec{E}\,. \qquad (3.16.2)$$

Вводя обозначение

$$\Lambda \equiv \frac{m}{e^2 n_s}, \qquad (3.16.3)$$

получаем уравнение движения в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\Lambda\vec{j}\right) = \vec{E}\,. \qquad (3.16.4)$$

Так как движение электронов в металле происходит с малой скоростью, то полная производная по времени примерно равна частной производной $\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla$. Полная производная означает любое изменение по времени в данном элементе объема, который движется вместе с электронами, а частная означает изменение в данной части неподвижного пространства. Заменим полную производную на частную и тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda\vec{j}\right) = \vec{E}\,. \qquad (3.16.5)$$

Подействовав оператором *rot* на обе части уравнения и вспоминая уравнение Максвелла $rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[rot\left(\Lambda\vec{j}\right) + \frac{1}{c}\vec{B}\right] = 0\,. \qquad (3.16.6)$$

Таким образом, получаем, что величина в скобках сохраняется, этот вывод следует из уравнения Максвелла. Однако согласно этому уравнению при охлаждении сверхпроводника (при прохождении $T < T_{кр}$) магнитное поле в сверхпроводнике должно «замораживаться», что противоречит эффекту Мейсснера. Следовательно, необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках равнялось нулю. Итак, получаем

$$rot\left(\Lambda\vec{j}\right) + \frac{\vec{B}}{c} = 0\,. \qquad (3.16.7)$$

Уравнения (3.16.4) и (3.16.7) составляют основу теории Лондонов.

Рассмотрим массивный полубесконечный сверхпроводник во внешнем магнитном поле, силовые линии которого параллельны поверхности

сверхпроводника. Согласно уравнению Максвелла для статического поля имеем

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Подействуем на последнее уравнение оператором ротора:

$$rot\, rot\vec{B} \equiv grad\, div\vec{B} - \Delta\vec{B} = \frac{4\pi}{c} rot\vec{j}.$$

Поскольку $div\vec{B} = 0$, то получаем

$$\Delta\vec{B} + \frac{4\pi}{c} rot\vec{j} = 0. \qquad (3.16.8)$$

Из (3.16.7) выражаем $rot\,\vec{j} = -\frac{\vec{B}}{c\Lambda}$ и получаем далее:

$$\Delta\vec{B} - \frac{4\pi}{c^2\Lambda}\vec{B} = 0;$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{\vec{B}}{\delta^2} = 0, \qquad (3.16.9)$$

где ввели величину

$$\delta = \left(\frac{c^2\Lambda}{4\pi}\right)^{1/2} = \left(\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}\right)^{1/2}. \qquad (3.16.10)$$

Параметр δ имеет размерность длины и называется *лондоновской глубиной проникновения*.

Если сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$ (см. рис. 3.16.5) и поле имеет только компоненту B_z, то из уравнения (3.16.10) получаем решение

$$B = B_0\, exp\left(-\frac{x}{\delta}\right). \qquad (3.16.11)$$

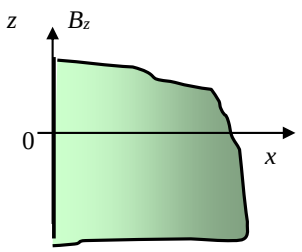


Рис. 3.16.5

Можно оценить глубину проникновения магнитного поля δ при $n_s = n_e$, т. е. когда концентрация проводящих электронов совпадает с полной концентрацией электронов. Это, очевидно, будет справедливо при $T \to 0$, поскольку n_s зависит от температуры. При этом получаем, что лондоновская глубина проникновения имеет величину порядка 10^{-5}–10^{-6} см. Таким обра-

зом, из лондоновской электродинамики следует, что магнитное поле проникает в сверхпроводник только на малую глубину δ.

Согласно (3.16.7) токи также проникают примерно на ту же глубину:

$$-\frac{\partial j_x}{\partial y}+\frac{\partial j_y}{\partial x}=-\frac{B_z}{c\Lambda}; \qquad (3.16.12)$$

$$j_y=-(c\Lambda)^{-1}\int B_z dx. \qquad (3.16.13)$$

Учитывая (3.16.11) и вычисляя интеграл, получаем следующую зависимость плотности тока от x (глубины проникновения в сверхпроводнике):

$$j_y=(c\Lambda\delta)^{-1}B_0\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right). \qquad (3.16.14)$$

Уравнения Лондонов можно выразить через векторный потенциал. Подставляя $\vec{B}=rot\vec{A}$ и $\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ в уравнение (3.16.4), получаем:

$$rot\left(\Lambda\vec{j}+\frac{\vec{A}}{c}\right)=0; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda\vec{j}+\frac{\vec{A}}{c}\right)=0. \qquad (3.16.15)$$

Откуда имеем

$$\vec{j}=-(c\Lambda)^{-1}\vec{A}=-\left(\frac{n_s e^2}{mc}\right)\vec{A} \qquad (3.16.16)$$

при дополнительном условии — условие Лоренца: $div\vec{A}=0$, т. е. имеем снова два уравнения. Поскольку векторный потенциал определен с точностью до градиента скалярной функции f, то в более общей форме уравнение (3.16.16) можно переписать:

$$\vec{j}=-n_s\left(\frac{e^2}{mc}\right)\left(\vec{A}+gradf\right). \qquad (3.16.17)$$

Примечание 56. Фриц Лондон (1900–1954), английский физик-теоретик. Гейнц Лондон (1907–1970), английский физик.

3.16.3. Объяснение сверхпроводимости

В 1957 г. появилась микроскопическая теория сверхпроводимости Бардина, Купера, Шриффера (теория БКШ). Теория основана на принципах квантовой физики и достаточно сложна для воспроизведения в общем курсе физики. Здесь обсудим качественно основные идеи теории.

Как известно, в микромире имеются две статистики, определяющие поведение частиц: *статистика Ферми — Дирака* и *статистика Бозе — Эйнштейна*. Частицы, подчиняющиеся статистике Ферми — Дирака, называются *фермионами* и имеют полуцелый спин. Частицы, подчиняющиеся статистике Бозе — Эйнштейна, называются *бозонами* и имеют целочисленный спин.

Напомним кратко, что такое *фермионы* и их основные свойства.

1. Спин частиц $\Rightarrow$ $S=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},...$ Примеры частиц-фермионов: электроны (e), протоны (p), нейтроны (n), гипероны и др.

2. Для фермионов выполняется принцип Паули: в одном состоянии не может находиться больше одной частицы. Фермионы — это частицы-индивидуалисты.

3. Для фермионов имеет место распределение Ферми — Дирака по энергиям

$$f(E)=\frac{1}{exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)+1},$$

где E_F — энергия Ферми. Распределение Ферми — Дирака изображено на рисунке 3.16.6.

4. Типичный пример системы Ферми: электронный газ в металле. При температуре абсолютного нуля $T = 0$ электроны занимают низшие уровни энергии до максимального, называемого уровнем Ферми E_F. Энергия Ферми для бесконечной системы совпадает с работой выхода λ. На каждом уровне энергии находятся по два электрона, которые отличаются спинами (рис. 3.16.7). Если энергия зависит от спина, то на каждом уровне энергии находится по одному электрону из-за принципа Паули. Электроны, как и все фермионы, — индивидуалисты. При температуре, отличной от нуля, часть электронов переходит на более высокие уровни (рис. 3.16.6).

Для бесконечной системы фермионов между основным и возбужденными состояниями нет энергетической щели. Поэтому даже при очень маленькой температуре (отличной от нуля) энергии тепловых колебаний достаточно для возбуждения и девозбуждения электронов у поверхности Ферми. Они участвуют в проводимости, рассеиваются и обмениваются энергией с решеткой, что и вызывает сопротивление току.

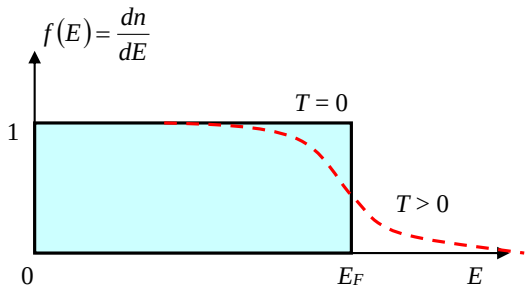


Рис. 3.16.6

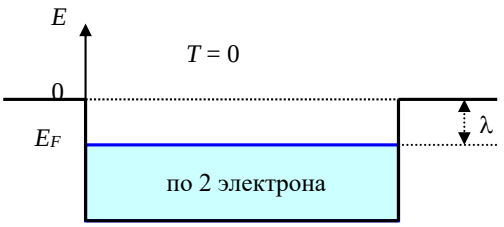


Рис. 3.16.7

Рассмотрим систему *бозонов*.

1. Спин частиц $\Rightarrow$ $S = 0, 1, 2, ...$ Примеры бозе-частиц: фотоны, фононы, π-мезоны, глюоны, гравитоны и др.

2. Для бозонов не выполняется принцип Паули, бозоны — это частицы-коллективисты, все могут находиться в одном и том же состоянии.

3. Распределение Бозе — Эйнштейна по энергиям имеет вид

$$f(E) = \frac{1}{exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right)-1},$$

где μ — химический потенциал, который определяется как дополнительная энергия системы при добавке одной дополнительной частицы (или разность полных энергий системы с $N + 1$ и N частицами).

4. При температуре абсолютного нуля $T = 0$ все частицы находятся на одном низшем уровне энергии — уровне Бозе. Размещение частиц на низшем уровне называется *Бозе-конденсацией*. При этом для системы бозонов отметим важный факт: для бозонов имеется энергетическая щель между основным состоянием и первым возбужденным состоянием. Движение на низшем уровне может сохраняться без изменения, если сил взаимодействия не хватает для возбуждения бозонов, т. е. перевода их на ближайший от основного уровень энергии.

Последнее утверждение оказывается очень важным для объяснения сверхпроводимости, поскольку именно наличие энергетической щели могло бы привести к току без сопротивления — сверхпроводимости и сверхтекучести, когда температурных колебаний недостаточно для возбуждения носителей тока (т. е. для проявления сопротивления).

Отдельные электроны, как фермионы, не конденсируются и не могут организовать сверхтекучую жидкость.

Однако оказалось, что электроны проводимости в металлах при низких температурах объединяются в пары — так называемые *куперовские пары*. Пару образуют два электрона с противоположными спинами, так что вместе они образуют составную частицу с зарядом $2e$, являющуюся бозоном, так как ее спин равен нулю. Без вмешательства «третьих» тел такие пары не образуются из-за кулоновского отталкивания между электронами.

Куперовские пары образуются за счет взаимодействия между электронами через кристаллическую решетку. Электрон движется в металле и поляризует решетку из положительных ионов, и этот комплекс (фактически возбуждение фонона — кванта колебаний решетки) притягивает к себе второй электрон. К притяжению приводит обмен фононами между электронами, причем при низких температурах оно превышает кулоновское отталкивание. Это взаимодействие наиболее сильное для электронов с противоположными спинами и импульсами (наглядно это достаточно трудно представить). Электроны не слипаются, а находятся на значительном рас-

стоянии друг от друга, которое на 4 порядка выше межатомного расстояния в кристаллической решетке ~ 10^{-4} см.

При температуре $T < T_{кр}$ не все электроны образуют куперовские пары: та часть электронов, которая образует пары, составляет «сверхпроводящую жидкость», другая часть электронов — нормальную жидкость. Таким образом, «спаренные» электроны создают бозонную жидкость при низких температурах и обеспечивают явление сверхпроводимости.

Примечание 57. *Высокотемпературные сверхпроводники* (ВТСП). Найдены в 1980-е гг. керамические соединения висмута Bi и таллия Tl с достаточно высокими критическими температурами. Основные звенья ВТСП — CuO. Например:

$$Tl_2Ca_{n-1}Ba_2Cu_nO_{2n+4} - T_{кр} = 123\ К;$$
$$Bi_2Ca_{n-1}Sr_2Cu_nO_{2n+4} - T_{кр} = 110\ К.$$

Примечание 58. Джон Бардин (1908–1991), американский физик, две Нобелевские премии по физике: за транзистор (1956) и за основополагающую теорию обычных сверхпроводников (1972);

Леон Нил Купер (1930–2024), американский физик, Нобелевская премия по физике (1972) за создание теории сверхпроводимости;

Джон Роберт Шриффер (1931–2019), американский физик, Нобелевская премия (1972) за создание теории сверхпроводимости;

Энрико Ферми (1901–1954), итальянский физик, Нобелевская премия по физике (1938) за доказательство существования новых радиоактивных элементов, полученных при облучении нейтронами;

Поль Морис Дирак (1902–1984), английский физик, Нобелевская премия по физике (1933, совместно с Эрвином Шрёдингером);

Шатьендранат Бозе (1894–1974), индийский физик;

Исаак Константинович Кикоин (1908–1984), советский физик, окончил Политехнический институт в 1930 г., работал в ФТИ (1927–1936). Еще в 1941–1944 гг. эксперименты И. К. Кикоина показали, что носители заряда в сверхпроводниках не имеют собственного магнитного момента, т. е. не обладают спином.

ГЛАВА 4.
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ И УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

4.1. Движущиеся проводники в магнитном поле

4.1.1. Работа магнитного поля при перемещении контура с током

На элементы контура с током, находящегося во внешнем магнитном поле, действуют силы Ампера. Поэтому при перемещении контура или его элементов эти силы будут совершать работу. Определим эту работу.

А. Вначале рассмотрим частный случай: движение перемычки с током в поперечном магнитном поле (рис. 4.1.1).

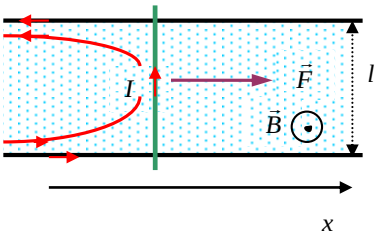


Рис. 4.1.1

Пусть контур с подвижной перемычкой длиной l находится в однородном магнитном поле $\vec{B} = const$, перпендикулярном плоскости контура (на рис. 4.1.1 вектор индукции $\vec{B}$ направлен из плоскости рисунка на нас). В контуре и по перемычке течет постоянный электрический ток I = const. Рассмотрим движение перемычки в поперечном магнитном поле $\vec{B}$. Сила Ампера, действующая на перемычку с током, направлена вдоль оси x (рис. 4.1.1 и 4.1.2) и согласно формулам (3.4.14) и (3.4.15) равна

$$\vec{F} = \int \frac{I}{c}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right];$$

$$F = \frac{I}{c} Bl. \qquad (4.1.1).$$

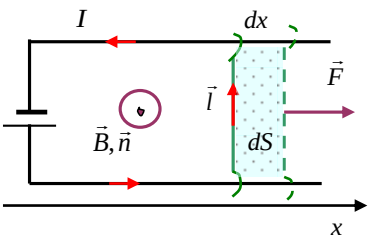


Рис. 4.1.2

При перемещении перемычки на расстояние dx сила Ампера совершает работу:

$$\delta A = Fdx = \frac{I}{c}Bldx = \frac{I}{c}BdS\,, \qquad (4.1.2)$$

где dS — приращение площади контура (см. рис. 4.1.2). Выберем нормаль $\vec{n}$ к плоскости контура так, чтобы она образовывала правовинтовую систему с направлением тока I. Тогда $d\vec{S} = dS\vec{n}$, и вводя поток вектора магнитной индукции:

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = BdS\,,$$

получаем, что работа, совершаемая магнитным полем, равна изменению магнитного потока, умноженному на ток:

$$\delta A = \frac{I}{c}d\Phi\,. \qquad (4.1.3)$$

Для конечного перемещения перемычки имеем

$$A = \frac{I}{c}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right), \qquad (4.1.4)$$

где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки через замкнутый контур в начальном и конечном положениях перемычки.

Этот результат легко распространяется на случай произвольного направления магнитного поля $\vec{B}$. Представим вектор $\vec{B}$ в виде суммы векторов $\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_l + \vec{B}_x$, где компоненты вектора магнитной индукции $\vec{B}_l$ и $\vec{B}_x$ направлены вдоль перемычки и направления перемещения соответственно. Составляющая магнитной индукции $\vec{B}_l$ параллельна току и поэтому не дает вклада в силу Ампера. Составляющая $\vec{B}_x$ определяет компоненту вектора силы Ампера, перпендикулярную перемещению, которая не совершает работы. Таким образом, работа по перемещению перемычки определяется только перпендикулярной составляющей вектора магнитной индукции $\vec{B}_n$, и мы снова получаем формулу (4.1.3), описывающую элементарную работу силы Ампера:

$$\delta A = \frac{I}{c}d\Phi\,.$$

Б. Рассмотрим общий случай перемещения контура с током в магнитном поле (см. рис. 4.1.3). Пусть произвольной формы контур с током совершает в неоднородном постоянном магнитном поле некоторое перемещение, в процессе которого контур может деформироваться. Мысленно разобьем такой контур на бесконечно малые элементы тока $Id\vec{l}$ и рассмотрим их бесконечно малые перемещения $d\vec{r}$. Магнитное поле, в котором перемещается каждый элемент контура $d\vec{l}$, можно считать однородным на протяжении малого перемещения $d\vec{r}$. Работа силы Ампера по перемещению каждого элемента тока равна

$$\delta^2 A = d\vec{r}d\vec{F} = \frac{I}{c}d^2\Phi,$$

где под элементом потока $d^2\Phi$ следует понимать вклад в приращение магнитного потока через весь контур от перемещения элемента контура $d\vec{l}$ на $d\vec{r}$. В самом деле, это видно из нижеследующего вывода. Сложив элементарные работы для всех элементов контура, снова получаем

$$\delta A = d\vec{r}\vec{F} = d\vec{r}\left(\frac{I}{c}\oint\left[d\vec{l},\vec{B}\right]\right) = \frac{I}{c}\oint d\vec{r}\left[d\vec{l},\vec{B}\right] = \frac{I}{c}\oint \vec{B}\left[d\vec{r},d\vec{l}\right] = \frac{I}{c}\oint \vec{B}d\vec{S} = \frac{I}{c}\oint d^2\Phi = \frac{I}{c}d\Phi, \quad (4.1.5)$$

где $d\Phi$ — полное изменение магнитного потока, пронизывающего контур, при перемещении контура на $d\vec{l}$; dS — элемент площади, пересекаемой контуром при этом перемещении.

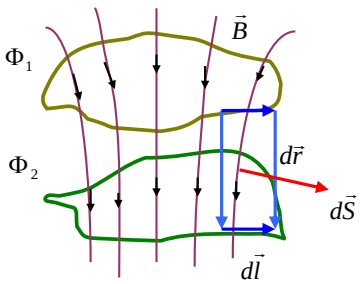


Рис. 4.1.3

Чтобы найти работу силы Ампера при перемещении контура с током во внешнем магнитном поле от начального 1 до конечного положения 2, следует проинтегрировать полученное выражение:

$$A = \frac{1}{c}\int_1^2 Id\Phi. \quad (4.1.6)$$

Если при этом перемещении ток поддерживать постоянным $I = const$, то работа сил Ампера равна

$$A = \frac{I}{c}(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (4.1.7)$$

где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки через контур в начальном и конечном положениях контура.

Таким образом, *работа сил Ампера равна произведению силы тока на приращение магнитного потока через контур*. Полученное выражение дает не только величину, но и знак совершаемой работы. Если поток магнитного поля через контур увеличивается, то силы Ампера совершают положительную работу.

4.1.2. Индукция токов

В замкнутом проводнике, движущемся в магнитном поле, возникает *индукционный ток*. Индукция токов открыта М. Фарадеем в 1831 г., и это

открытие является одним из *самых фундаментальных открытий* в электродинамике. Природа индукционного тока — сила Лоренца.

Пусть прямой участок проводника движется в магнитном поле индукции $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}$ (рис. 4.1.4). Полная скорость электронов проводимости складывается из скорости теплового движения $\vec{v}_t$ и скорости направленного движения проводника $\vec{v}$:

$$\vec{v}_{tot} = \vec{v} + \vec{v}_t . \qquad (4.1.8)$$

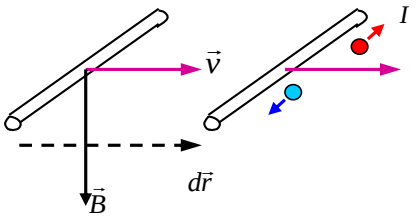


Рис. 4.1.4

Часть силы Лоренца, связанная с тепловой скоростью движения электронов

$$\vec{F}_1 = \frac{e}{c}\left[\vec{v}_t, \vec{B}\right],$$

только искривляет траекторию движения электрона. А часть силы, связанная со скоростью направленного движения

$$\vec{F}_2 = \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right],$$

заставляет заряды смещаться вдоль проводника (рис. 4.1.4). За счет последней силы и возникает индукционный ток.

Если проводник не замкнут, то возникает разность потенциалов на его концах. Ток идет до тех пор, пока возникающая в проводнике напряженность электрического поля не скомпенсирует силу Лоренца:

$$\vec{F} = e\vec{E}_i = -\frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right];$$

$$\vec{E}_i = -\frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right]. \qquad (4.1.9)$$

Здесь сила Лоренца играет роль сторонней силы с соответствующей напряженностью электрического поля $\vec{E}_i$. Знак «минус» в (4.1.9) показывает, что напряженность индукционного поля направлена против смещающей положительные заряды силы.

Если проводник замкнут (на рис. 4.1.5 магнитное поле направлено перпендикулярно рисунку от читателя), то в проводнике течет индукционный ток *I*. Магнитная сила $\vec{F}$ играет роль сторонней силы, заставляющей двигаться заряды. В замкнутом контуре возникает *электродвижущая сила* E (иначе, ЭДС) — работа по перенесению единичного заряда по замкну-

тому контуру. ЭДС, создаваемая полем $\vec{E}_i$, называется *электродвижущей силой индукции* $\mathcal{E}_i$:

$$\mathcal{E}_i = \frac{A}{q}. \qquad (4.1.10)$$

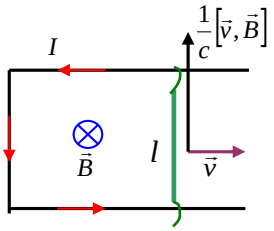


Рис. 4.1.5

Работа по замкнутому контуру, отнесенная к единичному заряду $\mathcal{E}_i$, равна циркуляции вектора напряженности электрического поля по этому контуру:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_i d\vec{l} = -\frac{1}{c}\oint_L \left[\vec{v},\vec{B}\right] d\vec{l} = -\frac{1}{c}\oint_L \vec{B}\left[d\vec{l},\vec{v}\right]. \qquad (4.1.11)$$

Скорость перемещения элемента контура определяется $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, а вектор элемента площадки равен

$$d^2\vec{S} = \left[d\vec{l}, d\vec{r}\right].$$

При этом направление вектора $d^2\vec{S}$ определяется направлением обхода контура по правилу буравчика (на рис. 4.1.5 вектор $d^2\vec{S}$ направлен от читателя). Таким образом, получаем *закон электромагнитной индукции*:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\oint \vec{B}\left[d\vec{l}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\oint \vec{B}\left[d\vec{l}, d\vec{r}\right]}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{\oint \vec{B} d^2\vec{S}}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt};$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (4.1.12)$$

Выше мы рассматривали движение одного элемента контура $d\vec{l}$ или $\vec{l}$. Если изменяются все участки замкнутого провода, то закон (4.1.12) также справедлив для контура в целом, где $\frac{d\Phi}{dt}$ — скорость изменения потока через весь контур. Так, если для малого кусочка провода $d\vec{l}$ имеем

$$d\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Delta\Phi}{dt}, \qquad (4.1.13)$$

то, суммируя по всему контуру с током, получаем

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\oint \frac{d(\Delta\Phi)}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\oint \Delta\Phi = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (4.1.14)$$

Закон электромагнитной индукции (4.1.12)–(4.1.14) справедлив при произвольных движениях и любых деформациях замкнутого контура.

Итак, возбуждение ЭДС индукции при движении контура в постоянном магнитном поле объясняется действием магнитной составляющей силы Лоренца, которая возникает при перемещении проводника и пропорциональна произведению $\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$. Величина ЭДС индукции зависит от скорости изменения магнитного потока, проходящего через контур. Однако Фарадей обобщил это утверждение и показал, что ЭДС индукции возникает даже в неподвижном контуре.

Примечание 59. Майкл Фарадей (1791–1867), выдающийся английский физик.

Примечание 60. В системе СИ формулы для работы сил Ампера (4.1.3) и (4.1.7) записываются: $\delta A = Id\Phi$ и $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$, а для ЭДС индукции (4.1.14) в виде: $\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$.

4.2. Закон электромагнитной индукции

4.2.1. Закон Фарадея

Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает *электродвижущая сила* (ЭДС) *индукции* $\mathcal{E}_i$. Напомним, что ЭДС — работа по перенесению единичного заряда по замкнутому контуру. Самым замечательным фактом является то, что значение ЭДС $\mathcal{E}_i$ совершенно не зависит от того, каким образом осуществляется изменение магнитного потока Φ, и определяется лишь скоростью его изменения, т. е. величиной $d\Phi/dt$. Изменение знака производной $d\Phi/dt$ приводит к изменению знака ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$. К этому выводу Фарадей пришел из своих экспериментальных измерений, в которых он использовал проводящую рамку, замкнутую на гальванометр G, и магнитное поле катушки с током. В реальности Фарадей заменил гальванометр, который имел слишком большое сопротивление и инерционность, на маленькую катушку с магнитной стрелкой.

В результате своих опытов он обнаружил, что индукционный ток можно вызвать двумя различными способами (экспериментами).

<u>1-й способ</u>: перемещение проводящей рамки в магнитном поле неподвижной катушки.

<u>2-й способ</u>: изменение магнитного поля $\vec{B}$, создаваемого катушкой, за счет ее движения или вследствие изменения силы тока I в ней (или того и другого вместе). Рамка при этом остается неподвижной.

В обоих этих случаях гальванометр G будет показывать наличие индукционного тока в рамке за счет индуцируемой ЭДС:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (4.2.1)$$

По внешнему виду (4.2.1) есть то же самое, что и формула (4.1.12), полученная в предыдущем параграфе, однако их содержание различное. Природа ЭДС из (4.1.12) — сила Лоренца, действующая на движущийся заряд в магнитном поле, и соответствует первому эксперименту как упомянуто выше. Во втором эксперименте силы Лоренца нет, так как проводник неподвижен. Поэтому Фарадей сформулировал новый закон.

Закон Фарадея: *всякое изменяющееся магнитное поле порождает в замкнутом проводнике ЭДС, т. е. электрическое поле.* Таким образом, электрическое поле порождается не только зарядами, но изменяющимся магнитным полем.

Направление индукционного тока и соответственно знак ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ определяются правилом Ленца (1831): *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей*. Другими словами, индукционный ток создает магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающему ЭДС индукции. Правило Ленца выражает важное физическое свойство — стремление системы противодействовать изменению ее состояния. Это свойство называют *электромагнитной инерцией*.

Рассмотрим следующий пример: замкнутый проводящий контур и изменяющееся магнитное поле. Пусть магнитное поле, направленное, как показано на рисунке 4.2.1, возрастает, т. е. возрастает магнитный поток через контур. Появляющийся в контуре индукционный ток направлен таким образом, чтобы его собственное магнитное поле (загнутые стрелки на рис. 4.2.1) ослабляло внешнее поле $\vec{B}$.

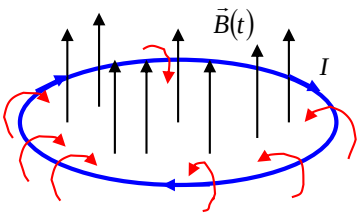


Рис. 4.2.1

Суть явления электромагнитной индукции состоит в сохранении магнитного потока, проходящего через контур. Всякое изменение потока вызывает противодействие его изменению. Это свойство имеет как паразитное влияние, особенно при включении высоких напряжений в цепи с катушками индуктивности, так и полезное применение в электротехнике. Например, используется в генераторах переменного тока, в устройствах с изменением напряжения переменного тока.

4.2.2. Формулировка Максвелла

Итак, существуют две причины возникновения индукционного тока и ЭДС индукции:

а) магнитное поле постоянно, контур изменяется;

б) контур постоянен, магнитное поле меняется.

Наблюдаемое на опыте (б) возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что и в этом случае в контуре появляются сторонние силы, которые теперь связаны с изменяющимся во времени магнитным полем. Какова же их природа? Ответ на этот вопрос был дан Дж. Максвеллом. Поскольку проводник покоится, то скорость упорядоченного движения электрических зарядов $\vec{v} = 0$ и, следовательно, магнитная сила, пропорциональная $\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$, также равна нулю и уже не может привести заряды в движение. Однако кроме магнитной силы на электрический заряд может действовать только сила со стороны электрического поля, равная $q\vec{E}$. Поэтому остается заключить, что *индукционный ток обусловлен электрическим полем* $\vec{E}$*, возникающим при изменении во времени внешнего магнитного поля.* Именно это электрическое поле и ответственно за появление ЭДС индукции в неподвижном контуре.

Согласно Максвеллу, всякое *изменяющееся во времени магнитное поле порождает в окружающем пространстве электрическое поле*. Возникновение электрического поля не связано с наличием проводящего контура, который лишь позволяет обнаружить существование этого поля по возникновению в нем индукционного тока. Появление электрического поля можно обнаружить и по другим его действиям. Например, по поляризации диэлектрика, пробою конденсатора, ускорению и торможению заряженных частиц и т. п.

Формулировка закона электромагнитной индукции, данная Максвеллом, является более общей, чем формулировка Фарадея. Она принадлежит к числу наиболее важных обобщений электродинамики.

Д. Максвелл: *всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле*.

Отличие от формулировки М. Фарадея состоит в том, что никаких проводников не нужно для обнаружения электрического поля. Математическая формулировка закона электромагнитной индукции в понимании Максвелла звучит следующим образом: *циркуляция вектора напряженности* $\vec{E}$ *этого поля по любому неподвижному замкнутому контуру* L *определяется выражением*

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}, \qquad (4.2.2)$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий выбранный замкнутый контур L. Поток вектора индукции магнитного поля вычисляется через поверхность, опирающуюся на контур L. Уравнение (4.2.2) входит в систему интегральных уравнений Максвелла.

Далее, мы введем частную производную по времени, считая, что выбранный контур в пространстве не меняется. Меняя порядок дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности и используя теорему Стокса $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}d\vec{S}$, получаем:

$$\int_S rot\vec{E}d\vec{S} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S}. \qquad (4.2.3)$$

Учитывая, что последнее соотношение справедливо для любой произвольной поверхности S, получаем закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме:

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (4.2.4)$$

Это одно из уравнений системы дифференциальных уравнений Максвелла.

Тот факт, что циркуляция электрического поля, возбуждаемого переменным во времени магнитным полем, отлична от нуля $rot\vec{E} \neq 0$, означает, что рассматриваемое электрическое поле *не потенциальное*. Оно, как и магнитное поле, является *вихревым*, его силовые линии — замкнуты.

В общем случае электрическое поле $\vec{E}$ представляет собой векторную сумму двух полей: потенциального (поля статических электрических зарядов, циркуляция которого равна нулю) и вихревого (поля, обусловленного изменяющимся во времени магнитным полем). В основе рассмотренных явлений, объясняющих закон электромагнитной индукции, не просматривается общего принципа, позволяющего установить общность их физической природы. Поэтому эти явления следует рассматривать как независимые, а закон электромагнитной индукции — как результат их совместного действия. Тем более удивительным оказывается тот факт, что ЭДС индукции в контуре всегда равна скорости изменения магнитного потока, проходящего через контур. В тех случаях, когда меняется и магнитное поле $\vec{B}$, и расположение или конфигурация контура в поле, ЭДС индукции следует рассчитывать по формуле (4.2.1):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt},$$

а закон электромагнитной индукции можно представить в виде

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c}\oint_L \left[\vec{v},\vec{B}\right]d\vec{l}. \qquad (4.2.5)$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, представляет собой полную производную по времени от магнитного потока: $-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$. Первое слагаемое связано с изменением магнитного поля во времени, второе — с движением контура.

Можно сказать, что во всех случаях индукционный ток вызывается полной силой Лоренца:

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right]\right). \qquad (4.2.6)$$

Какая часть индукционного тока вызывается электрической составляющей, а какая магнитной составляющей силы Лоренца, зависит от *выбора системы отсчета*. Итак, все эти явления говорят о том, что мы имеем дело с *единым электромагнитным полем*.

Необходимый комментарий. Из самого определения работы следует, что сила, действующая в магнитном поле на электрический заряд и перпендикулярная его скорости, не может совершать работы. Однако при движении проводника с током, увлекающего за собой заряды, сила Ампера все же совершает работу. Наглядным подтверждением этого служат электромоторы.

Это противоречие исчезает, если принять во внимание, что движение проводника в магнитном поле неизбежно сопровождается явлением электромагнитной индукции. Поэтому наряду с силой Ампера работу над электрическими зарядами совершает и возникающая в проводнике электродвижущая сила индукции. Таким образом, полная работа сил магнитного поля складывается из механической работы, обусловленной силой Ампера, и работы ЭДС, индуцируемой при движении проводника. Обе работы равны по модулю и противоположны по знаку, поэтому их сумма равна нулю. Действительно, работа силы Ампера при элементарном перемещении проводника с током в магнитном поле равна $\delta A_A = Id\Phi/c$, за это же время ЭДС индукции совершает работу

$$\delta A_i = \mathcal{E}_i I dt = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} I dt = -\frac{1}{c} I d\Phi .$$

Тогда полная работа равна нулю: $\delta A_A + \delta A_i = 0$. Силы Ампера совершают работу не за счет энергии внешнего магнитного поля, которое может оставаться постоянным, а за счет источника ЭДС, поддерживающего ток в контуре.

Примечание 61. В системе СИ запись уравнения (4.2.4) имеет вид: $rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Примечание 62. Эмилий Христианович Ленц (1804–1865), русский физик; Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879), великий английский физик.

4.3. Взаимная индукция и самоиндукция

4.3.1. Взаимная индукция

Введем понятие потенциальной функции тока во внешнем магнитном поле. Работа магнитного поля пропорциональна изменению магнитного потока (см. п. 4.1):

$$\delta A = \frac{I}{c}\delta\Phi . \qquad (4.3.1)$$

Если запишем, что $\delta A = -(dU)_I$, то физически это означает, что механическая работа сил магнитного поля равна убыли функции U, которая играет роль *потенциальной или силовой функции* тока в магнитном поле. Подстрочный индекс I означает, что приращение потенциальной функции следует определять при постоянной силе тока. Сама силовая функция равна

$$dU = -\delta A = -\frac{I}{c} d\Phi, \qquad U = -\frac{I}{c}\Phi. \tag{4.3.2}$$

Потенциальную функцию U не следует отождествлять с потенциальной энергией магнитного поля, поскольку, как нам известно, изменение энергии магнитного поля нельзя определить только по механической работе сил магнитного поля при перемещении проводника. Тем не менее введение такой функции, безусловно, удобно и полезно. В частности, легко убедиться, что устойчивое равновесие контура постоянного тока в магнитном поле соответствует минимуму потенциальной функции U или соответственно максимуму магнитного потока Φ.

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда изменяется магнитный поток через контур. При этом совершенно не важно, чем вызвано это изменение потока. Если в некотором контуре течет изменяющийся во времени ток, то магнитное поле этого тока также будет изменяться.

Пусть контуры 1 и 2 расположены достаточно близко друг к другу (рис. 4.3.1). Между контурами существует магнитная связь, наличие которой проявляется в том, что при всяком изменении тока в одном из контуров в другом контуре изменяется пронизывающий его магнитный поток и возникает ЭДС индукции. Это явление называют *взаимной индукцией*.

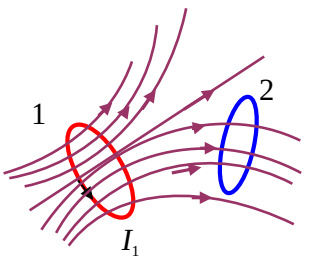


Рис. 4.3.1

Рассмотрим взаимодействие двух замкнутых токов I_1 и I_2 (рис. 4.3.2). Пусть $\vec{B}_1$, $\vec{A}_1$ и $\vec{B}_2$, $\vec{A}_2$ — векторы индукции и векторные потенциалы магнитных полей, создаваемых токами I_1 и I_2, текущими в контурах 1 и 2 соответственно. Тогда магнитный поток поля $\vec{B}_1$ тока I_1 через контур 2 определяется:

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = \int_{S_2} rot\vec{A}_1 d\vec{S}_2 = \oint_{L_2} \vec{A}_1 d\vec{l}_2 , \qquad (4.3.3)$$

где S_2 — поверхность, опирающаяся на контур 2, длиной L_2; $d\vec{l}_2$ — элемент этого контура. Вспомним, что вектор-потенциал линейного тока равен (см. п. 3.7, формула (3.7.16)):

$$\vec{A}_1 = \frac{I_1}{c} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1}{R},$$

где $d\vec{l}_1$ — элемент первого контура, а R — расстояние от рассматриваемого элемента контура до точки наблюдения (см. также рис. 3.2). Тогда для магнитного потока через второй контур имеем

$$\Phi_{12} = \oint_{L_2} \vec{A}_1 d\vec{l}_2 = \oint_{L_2} \left[\frac{I_1}{c} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1}{R} \right] d\vec{l}_2 = \frac{I_1}{c} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}, \qquad (4.3.4)$$

где интегрирование идет по обоим контурам; $R = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ — относительное расстояние между двумя элементами с током. Совершенно аналогично получаем магнитный поток, создаваемый током контура 2 через контур 1:

$$\Phi_{21} = \frac{I_2}{c} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}. \qquad (4.3.5)$$

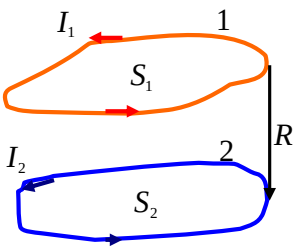


Рис. 4.3.2

Перепишем полученные выражения в виде:

$$\Phi_{12} = \frac{I_1}{c} L_{12}, \quad \Phi_{21} = \frac{I_2}{c} L_{21}, \qquad (4.3.6)$$

где L_{12} и L_{21} — *коэффициенты взаимной индукции*. Из полученных нами выражений следует, что они равны:

$$L_{21} = L_{12} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}. \qquad (4.3.7)$$

Если токи I_1 и I_2 нельзя считать линейными, т. е. поле одного из токов заметно меняется на протяжении сечения другого тока, то следует

перейти к объемным токам. Для объемных элементов тока $Id\vec{l} = \vec{j}dV$ получаем

$$L_{21} = L_{12} = \frac{1}{I_1 I_2}\iint\limits_{V_1 V_2} \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{R}, \qquad (4.3.8)$$

где V_1 и V_2 — полные объемы контуров с токами.

То замечательное свойство взаимной индукции контуров, что (в отсутствие ферромагнетиков) коэффициенты взаимной индукции одинаковы: $L_{21} = L_{12}$, называют *теоремой взаимности*. Благодаря этой теореме можно не делать различия между коэффициентами L_{12} и L_{21}, а говорить просто о взаимной индуктивности контуров.

Используя данное выше определение, можем записать потенциальную функцию тока I_2 в поле тока I_1 через коэффициенты взаимной индукции:

$$U_{12} = -\frac{I_2}{c}\Phi_{12} = -\frac{1}{c^2}L_{12}I_1 I_2. \qquad (4.3.9)$$

Таким же образом выражается потенциальная функция тока I_1 в поле тока I_2:

$$U_{21} = -\frac{I_1}{c}\Phi_{21} = -\frac{1}{c^2}L_{21}I_1 I_2. \qquad (4.3.10)$$

Величина $U_{12} = U_{21}$ играет роль *взаимной потенциальной энергии токов* I_1 и I_2 в том смысле, что механическая работа сил взаимодействия этих токов при перемещении одного из них или обоих одновременно равна убыли потенциальной функции U_{12}.

Если много взаимодействующих контуров, то взаимная потенциальная энергия равна сумме

$$U = -\frac{1}{2c^2}\sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j. \qquad (4.3.11)$$

Коэффициенты взаимной индукции (взаимные индуктивности) являются величинами алгебраическими. При перемене направления одного из токов и сохранении направления другого знак коэффициента взаимной индукции изменяется на обратный. Взаимная индукция лежит в основе действия трансформаторов.

4.3.2. Самоиндукция

Электрический ток в любом контуре создает магнитный поток $\Phi = \int \vec{B}d\vec{S}$, пронизывающий этот контур. Рассмотрим единичный контур с током I, величина которого может меняться во времени (рис. 4.3.3). Изменение тока I в контуре влечет за собой изменение магнитного потока Φ через контур, а при изменении потока в контуре возникает ЭДС индукции. Это явление носит название *явление самоиндукции*.

Так же как и при рассмотрении взаимной индукции, формально запишем магнитный поток:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S rot\vec{A} d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{l}_1 = \frac{I_1}{c} \oint_L \oint_L \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_1{}'}{R}. \qquad (4.3.12)$$

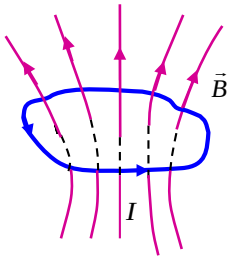


Рис. 4.3.3

Здесь $d\vec{l}_1, d\vec{l}_1{}'$ — элементы рассматриваемого контура L, а R — расстояние между этими элементами.

Однако, рассматривая взаимодействие смежных элементов тока контура, мы уже не можем считать этот ток линейным, поэтому перейдем к объемным токам:

$$\vec{A} = \frac{I_1}{c} \oint_L \frac{d\vec{l}_1}{R} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}_1 dV}{R}; \qquad (4.3.13)$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S rot\vec{A} d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{l} = \frac{1}{c} \oint_L \int_V \frac{\vec{j}_1 dV}{R} d\vec{l}_1 = \frac{1}{cI_1} \int_V \int_V \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_1' dV dV'}{R} = \frac{1}{c} I_1 L_{11}, \qquad (4.3.14)$$

где ввели коэффициент

$$L_{11} = \frac{1}{I_1^2} \int_V \int_V \frac{\vec{j}_1 \vec{j}_1' dV dV'}{R}. \qquad (4.3.15)$$

Итак, опуская значки, получаем выражение для магнитного потока:

$$\Phi = \frac{1}{c} I_1 L_{11} = \frac{1}{c} LI. \qquad (4.3.16)$$

Здесь введенный коэффициент L — *индуктивность* рассматриваемого контура. Коэффициент L зависит от размеров и формы контура и от магнитных свойств среды, в которой находится контур. Если в пространстве нет ферромагнетиков, то индуктивность L не зависит от силы тока в контуре.

Потенциальная функция U_{11} сил взаимодействия элементов одного и того же тока I_1 равна

$$U_{11} = -\frac{1}{2c^2} \int_V \int_V \frac{\vec{j}\vec{j}' dV dV'}{R} = -\frac{1}{2c^2} L_{11} I_1^2. \qquad (4.3.17)$$

Множитель $1/2$ появляется в связи с тем, чтобы взаимодействие каждой пары элементов тока $\vec{j}_1 dV$ и $\vec{j}_1' dV'$ в приведенном интеграле не учитывалось дважды; R — расстояние между элементами объема dV и dV'.

Изменение силы тока в контуре вызывает изменение магнитного потока в нем и приводит к возникновению в контуре *ЭДС самоиндукции*. ЭДС самоиндукции, следуя общему правилу, равна

$$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial (LI)}{\partial t}. \qquad (4.3.18)$$

Если $L = const$, то получаем

$$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c^2} L \frac{\partial I}{\partial t}. \qquad (4.3.19)$$

<u>Правило Ленца</u>. *ЭДС самоиндукции всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока, которое ее вызывает*.

ЭДС самоиндукции стремится сохранить ток неизменным: она противодействует току, когда он увеличивается, и поддерживает ток, когда он уменьшается, т. е. здесь ток проявляет «инерционные» свойства. Эффекты индукции стремятся сохранить постоянным магнитный поток через контур точно так же, как механическая инерция стремится сохранить неизменной скорость тела.

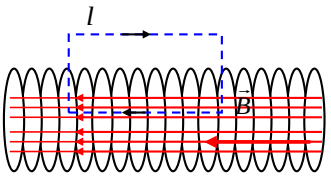


Рис. 4.3.4

<u>Рассмотрим пример</u>. Рассчитаем индуктивность длинного соленоида. Выберем контур, как показано на рисунке 4.3.4. По теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$ можем записать (см. п. 3.6, формула (3.6.13) и рис. 3.6.8):

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = Hl = \frac{4\pi}{c} IN = \frac{4\pi}{c} Inl, \qquad (4.3.20)$$

где I — ток через соленоид; N и n — число и плотность витков соленоида соответственно; l — длина выбранного контура интегрирования. Если μ — магнитная проницаемость материала, заполняющего объем соленоида, то $B = \mu H$ и тогда магнитная индукция внутри соленоида равна

$$B = \frac{4\pi\mu}{c} In.$$

Магнитный поток, пронизывающий соленоид, равен

$$\Phi = BSnl = \frac{4\pi\mu}{c} InSnl = \frac{4\pi\mu}{c} n^2 IV. \qquad (4.3.21)$$

Здесь V — объем соленоида. С другой стороны, $\Phi = \frac{1}{c} LI$. Приравнивая потоки, получаем индуктивность длинного соленоида:

$$L = 4\pi\mu n^2 V. \qquad (4.3.22)$$

Важно отметить, что индуктивность пропорциональна объему и квадрату плотности витков соленоида.

4.3.3. Еще о потенциальной энергии и единицах измерения

Возвращаясь к случаю системы двух токов, заметим, что общая потенциальная энергия U этой системы равна сумме их взаимных энергий $U_{12}(=U_{21})$ и собственных потенциальных энергий U_{11} и U_{22} каждого из них:

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2\right). \qquad (4.3.23)$$

Учитывая, что $L_{12} = L_{21}$, можно записать

$$U = -\frac{1}{2c^2}\left(L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_2I_1 + L_{22}I_2^2\right) = -\frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik}I_iI_k. \qquad (4.3.24)$$

Последнее выражение применимо к системе произвольного числа токов (контуров), если производить суммирование по всем возможным парам индексов i и k $(i,k = 1,2,...,n)$.

Примечание 63. В системе СИ взаимная и собственная потенциальные энергии токов записываются соответственно как: $U_{12} = -L_{12}I_1I_2$ и $U_{11} = -\frac{1}{2}L_{11}I_1^2$.

В *гауссовой системе единиц индуктивность* измеряется в сантиметрах: $[L] =$ см. При этом 1 см — это индуктивность такого витка, в котором ток силой 1 ед.$CGSM$ (1 ед. тока $CGSM$ = $1/c$ ед.$CGSE$) создает магнитный поток 1 Максвелл (Мкс). В самом деле, из закона Био — Савара:

$$d\vec{B} = \frac{I}{c}\frac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3},$$

имеем следующую размерность для индукции магнитного поля (см. п. 3.5.4):

$$[B] = 1Гс = \frac{[I][l]}{[l^2][c]} = \frac{CGSE_I \cdot c}{см \cdot см} = \frac{CGSE_q}{см^2}.$$

Отсюда для единицы потока магнитной индукции $\Phi = \int \vec{B}d\vec{S}$ получаем

$$[\Phi] = [B][l^2] = CGSE_q = 1Мкс.$$

Из формулы $\Phi = \frac{1}{c}LI$ (4.3.16) имеем для потока

$$[\Phi] = 1Мкс = \left[\frac{IL}{c}\right] = \frac{CGSE_q}{см}[L] = CGSE_q.$$

Из последнего получается, что индуктивность в системе Гаусса измеряется в сантиметрах:

$$[L] = см. \qquad (4.3.25)$$

В *системе СИ* соотношения для потока и ЭДС самоиндукции имеют вид:

$$\Phi = LI; \qquad \mathcal{E}_S = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -L\frac{\partial I}{\partial t}; \qquad (4.3.26)$$

$$\mathcal{E}(Вольт) = -\frac{d\Phi(Вебер)}{dt}.$$

Вебер — такая единица магнитного потока, при изменении которого на 1 Вб за 1 с в контуре возбуждается ЭДС в 1 В:

$$[\Phi] = 1Вб = 1В \cdot 1с .$$

Индуктивность измеряется в единицах Генри: [L] = 1 Генри = 1 Гн. 1 Гн — это индуктивность такого витка, в котором ток силой 1 А создает магнитный поток 1 Вб:

$$1Гн = \frac{1Вб}{1А} .$$

Найдем связь между единицами потока в гауссовой и СИ системах. Связь между Вб и Мкс единицами можно получить из следующего *численного* равенства, вспоминая, что единица потенциала в СИ в 300 раз меньше единиц потенциала в гауссовой системе единиц: $1В = 300 CGSE_V$:

$$\mathcal{E}(Вольт) = -\frac{d\Phi(Вебер)}{dt} = 300 \cdot \mathcal{E}(CGSE_V) = -\frac{300}{c}\frac{d\Phi(Мкс)}{dt} \approx -10^{-8}\frac{d\Phi(Мкс)}{dt} . \quad (4.3.27)$$

Из (4.3.27) следует соотношение между единицами потока вектора индукции магнитного поля:

$$1Вб = 10^8 Мкс .$$

Тогда можно получить соотношение единиц индуктивности:

$$1Гн = \frac{1Вб}{1А} = \frac{10^8 Мкс}{\frac{1}{10} CGSM_I} = 10^9 см . \quad (4.3.28)$$

В системе *СИ* индуктивность длинного соленоида записывается

$$L = \mu\mu_0 n^2 V ,$$

где n — число витков на единицу длины. Отсюда получаем размерность для постоянной магнитной величины:

$$[\mu_0] = \frac{Гн}{м} ,$$

которая упоминалась выше в п. 3.5 при записи закона Био — Савара.

4.4. Энергия магнитного поля

4.4.1. Об энергии взаимодействующих токов

Ранее мы показали, что при изменении любого потока через контур с током магнитное поле совершает работу

$$dA = \frac{I}{c} d\Phi . \quad (4.4.1)$$

Это соотношение было получено при деформации или движении контура с током. Можно получить, *что эта же работа совершается сторонними силами* (ЭДС источника) *при появлении тока и магнитного потока в контуре*, т. е. энергия передается магнитному полю.

Найдем работу, совершаемую источником ЭДС для увеличения тока от нуля до значения I, и тем самым получим энергию магнитного поля, связанного с этим током. Наращиваем ток в контуре каким-либо образом, при этом возрастает и магнитный поток Ф. Возникнет ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \qquad (4.4.2)$$

Тогда элементарная работа, которую должен совершить внешний источник ЭДС против ЭДС самоиндукции, чтобы увеличить ток, определяется (опять напомним, что ЭДС равна работе по перетаскиванию единицы заряда по замкнутому контуру):

$$dA = -\mathcal{E}_S dq = -\mathcal{E}_S I dt. \qquad (4.4.3)$$

Подставляя (4.4.2), получаем формулу (4.4.1), что и требовалось доказать.

На что идет эта работа? Рассмотрим, что изменилось после изменения тока в контуре:

1) стало выделяться тепло (на это идет работа внешней ЭДС в стационарном режиме);

2) появилось магнитное поле контура (его появлению «сопротивлялось» ЭДС самоиндукции). Здесь в переходном режиме работа ЭДС самоиндукции идет на увеличение энергии магнитного поля:

$$dW = \frac{I}{c} d\Phi. \qquad (4.4.4)$$

Итак, если имеем один контур, который обладает индуктивностью L, то запасенная энергия магнитного поля контура равна

$$W = \frac{L}{c^2}\int I dI = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{I\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}. \qquad (4.4.5)$$

На случай N витков имеем потенциальную энергию токов, взаимодействующих по закону Ампера (см. (4.3.11)):

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k, \qquad (4.4.6)$$

где L_{ik} при $i = k$ индуктивность i-го контура, при $i \neq k$ взаимная индуктивность i-го и k-го контуров. Эти формулы выражают магнитную энергию через токи I и магнитные потоки. Это потенциальная энергия токов, взаимодействующих по закону Ампера. Более подробное рассмотрение этого вопроса см. в Дополнениях 2 и 3 в конце курса лекций.

4.4.2. Энергия магнитного поля соленоида

Энергию магнитного взаимодействия можно выразить через напряженность и индукцию магнитного поля. Для начала разберем пример длинного соленоида. Запишем энергию соленоида с током по общей фор-

муле (4.4.4). Напряженность магнитного поля длинного соленоида была определена ранее (см. п. 3.6, а также формулу (4.3.20) в п. 4.3):

$$H = \frac{4\pi}{c} nI \,. \tag{4.4.7}$$

Тогда изменение энергии в соленоиде, учитывая, что приращение магнитного потока через виток определяется $d\Phi = SdB$, равно:

$$dW = \frac{I}{c} d\Phi \cdot N = \frac{cH}{4\pi nc} d\Phi \cdot nl = \frac{HSl \cdot dB}{4\pi} = \frac{V}{4\pi} HdB \,;$$

$$dW = \frac{V}{4\pi}\left(\vec{H}, d\vec{B}\right). \tag{4.4.8}$$

Здесь V — объем соленоида. Тогда дифференциал объемной плотности магнитной энергии:

$$dw = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{4\pi} \vec{H} d\vec{B} \,. \tag{4.4.9}$$

Таким образом, *плотность энергии магнитного поля* записывается через интеграл:

$$w = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} d\vec{B} \,. \tag{4.4.10}$$

В частности, если магнитная среда изотропна и магнитная проницаемость постоянна, имеем $\vec{B} = \mu\vec{H}$, то плотность энергии имеет вид

$$w = \frac{1}{4\pi} \int \mu H dH = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\vec{H}\vec{B}}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu} \,. \tag{4.4.11}$$

Полная энергия магнитного поля определяется интегрированием по всему пространству, где имеется магнитное поле:

$$W = \int_V w dV \,. \tag{4.4.12}$$

Итак, получили, что магнитная энергия локализована в пространстве с объемной плотностью w. Это представление теории поля, аналогичное тому, какое получали ранее в электростатике (см. п. 2.6).

4.4.3. Энергия магнитного поля

Можно показать в общем случае справедливость формул (4.4.9)–(4.4.12) для энергии магнитного поля

$$dw = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}, d\vec{B}\right), \quad w = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} d\vec{B}, \quad W = \int w dV \,. \tag{4.4.13}$$

Ограничимся одним неподвижным витком, тогда

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad d\Phi = \int_S d\vec{B} d\vec{S} \,,$$

где интегрирование ведется по произвольной поверхности, натянутой на контур с током. Приращение энергии равно:

$$dW = \frac{I}{c} d\Phi = \frac{I}{c} \int_S d\vec{B} d\vec{S} .$$

Введем векторный потенциал: $\vec{B} = rot\vec{A}$, который определяется распределением объемных токов:

$$\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_q) dV_q}{r_{aq}} ,$$

где $r_{aq} = |\vec{r}_a - \vec{r}_q|$. Тогда приращение магнитной индукции можно записать $d\vec{B} = d(rot\vec{A}) = rot(d\vec{A})$, поскольку дифференциал берется по внутренним переменным (r_q), а ротор — по внешним (r_a). Таким образом, для приращения энергии получаем

$$dW = \frac{I}{c} \int_S rot(d\vec{A}) d\vec{S} = \frac{I}{c} \oint_L d\vec{A} d\vec{l} . \qquad (4.4.14)$$

Здесь воспользовались теоремой Стокса, а интегрирование проводится по контуру с током. Заменим линейный элемент тока на объемный элемент, а интегрирование по объему распространим на все пространство (это можно сделать, так как там, где плотность токов равна нулю, вклад в интеграл также равен нулю):

$$dW = \frac{1}{c} \int_V (d\vec{A}, \vec{j}) dV . \qquad (4.4.15)$$

Воспользуемся $rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$, тогда

$$dW = \frac{1}{4\pi} \int_V (d\vec{A}, rot\vec{H}) dV . \qquad (4.4.16)$$

Из векторного анализа известно следующее соотношение:

$$\vec{A} rot\vec{H} = \vec{H} rot\vec{A} + div[\vec{H}, \vec{A}] = \vec{H}\vec{B} + div[\vec{H}, \vec{A}]. \qquad (4.4.17)$$

Подставляя полученное выражение в интеграл (4.4.16) и используя теорему Гаусса, получаем:

$$dW = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} rot(d\vec{A}) dV - \frac{1}{4\pi} \int div[d\vec{A}, \vec{H}] dV = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} d\vec{B} dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S [d\vec{A}, \vec{H}] d\vec{S} . \qquad (4.4.18)$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$rot(d\vec{A}) = d(rot\vec{A}) = d\vec{B}$$

опять же из-за того, что дифференциал и производные берутся по разным переменным (r_q) и (r_a), а также теоремой Гаусса для второго интеграла.

Интегрирование в (4.4.18) распространено на все пространство, охватывающее все взаимодействующие токи и поле этих токов. В качестве поверхности интегрирования для второго интеграла можно взять бесконечно удаленную поверхность. Если все токи текут в конечной области пространства, то магнитное поле будет убывать на бесконечности достаточно

быстро, а рассматриваемый интеграл обратится в нуль. Тогда приращение энергии поля равно

$$dW = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}d\vec{B}dV\,. \qquad (4.4.19)$$

Или, иначе:

$$W = \int\limits_V wdV\,, \qquad (4.4.20)$$

где ввели плотность энергии магнитного поля:

$$w = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}d\vec{B}\,. \qquad (4.4.21)$$

Эти же соотношения и энергия двух взаимодействующих токов получены в Дополнениях к этому параграфу в конце курса лекций.

Приложение 4. Сравним формулы, обсуждаемые в этом параграфе, в системе СИ и в системе единиц Гаусса:

	Система единиц СИ	**Система единиц Гаусса**
Элементарная работа	$\delta A = Id\Phi$	$dA = \frac{I}{c}d\Phi$
ЭДС самоиндукции	$\mathcal{E}_S = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$	$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$
Энергия магнитного поля	$W = \frac{1}{2}\int \vec{H}\vec{B}dV$	$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV$
Плотность энергии магнитного поля	$w = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}$	$w = \frac{\vec{H}\vec{B}}{8\pi}, \quad w = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}d\vec{B}$
Плотность энергии в изотропной среде	$w = \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}$	$w = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu}$
Собственная энергия тока	$W_{11} == \frac{1}{2}L_{11}I_1^2$	$W_{11} = -\frac{1}{2c^2}L_{11}I_1^2$
Взаимная энергия токов	$W_{12} = L_{12}I_1I_2$	$W_{12} = U_{12} = -\frac{1}{c^2}L_{12}I_1I_2$

4.5. Ток смещения

4.5.1. Противоречие с законом сохранения заряда

Уравнение непрерывности, выражающее фундаментальный закон — *закон сохранения электрического заряда*, имеет вид (см. формулу (3.1.13) в п. 3.1):

$$div\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\,, \qquad (4.5.1)$$

где ρ — плотность электрического заряда; $\vec{j}$ — плотность тока. Для стационарных, т. е. независящих от времени, токов имеем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad div\vec{j} = 0\,. \qquad (4.5.2)$$

Иначе, для стационарных токов все линии плотности тока $\vec{j}$ оказываются замкнутыми — у них нет источников.

Если обратимся к переменным токам и переменным (т. е. к изменяющимся во времени) электромагнитным полям, то возникает противоречие между законом сохранения заряда (4.5.1) и с одним из уравнений системы уравнений Максвелла. Выясняется, что уравнение непрерывности оказывается несовместимым с уравнением магнитного поля стационарных токов:

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \qquad (4.5.3)$$

Действительно, согласно последнему уравнению плотность тока пропорциональна вихрю (ротору) вектора $\vec{H}$, но дивергенция вихря всегда тождественно равна нулю, т. е.

$$div\vec{j} = \frac{c}{4\pi} div\, rot\vec{H} \equiv 0. \qquad (4.5.4)$$

Получаем, что дивергенция вектора плотности тока всегда должна быть равной нулю. Таким образом, возникает очевидное противоречие, поскольку дивергенция плотности тока не равна нулю из закона сохранения заряда (4.5.1), когда в нестационарных процессах плотность заряда может изменяться во времени.

Иначе эту проблему можно проиллюстрировать на примере разряда предварительно заряженного плоского конденсатора через некоторое внешнее сопротивление (рис. 4.5.1). Ток проводимости терпит разрыв на обкладках конденсатора.

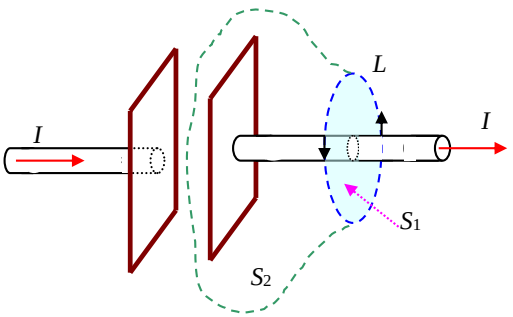


Рис. 4.5.1

В самом деле, рассмотрим поверхности S_1 и S_2, опирающиеся на один и тот же контур L, который охватывает провод с током (рис. 4.5.1). Очевидно, что поверхность S_1 пересекает провод и через нее течет ток $I = \int \vec{j} d\vec{S}$.

Поверхность S_2 проходит в области между обкладками конденсатора, и поэтому через нее ток не течет. Тогда, записывая уравнение Максвелла в интегральной форме, а именно циркуляцию вектора $\vec{H}$ по замкнутому контуру L, имеем в правой части два противоположных результата для двух выбранных поверхностей

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \begin{cases} \int_{S_1} rot\vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_{S_1} \vec{j} d\vec{S} \neq 0 \\ \int_{S_2} rot\vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_{S_2} \vec{j} d\vec{S} = 0 \end{cases}. \qquad (4.5.5)$$

Поэтому получается, что циркуляция вектора $\vec{H}$ будет зависеть от выбора поверхности, чего явно не должно быть и что не происходило в случае постоянных токов. Сомневаться в законе сохранения заряда трудно, это *фундаментальный закон*, и он проверен экспериментально с большой точностью. Вопрос состоит в том, как выйти из этого противоречия.

4.5.2. Ток смещения

Максвелл предположил, что уравнение $rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ справедливо только для стационарных токов, когда плотность зарядов ρ постоянна и $div\vec{j} = 0$. Для переменных электрических токов картина, по-видимому, должна быть иной. Максвелл ввел дополнительное слагаемое — *ток смещения*. Приведем рассуждение, приводящее к необходимости введения этого тока для разрешения противоречия между уравнениями для магнитного поля и законом сохранения заряда.

Из электростатики имеем, что источником вектора индукции являются сторонние заряды:

$$div\vec{D} = 4\pi\rho .$$

Если распределение зарядов может изменяться во времени, то можно записать

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\vec{D}\right) = \frac{1}{4\pi}div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right). \qquad (4.5.6)$$

Основываясь на справедливости уравнения непрерывности, найдем поправку, позволяющую устранить указанное выше противоречие. Запишем уравнение, определяющее закон сохранения заряда, и подставим результат (4.5.6):

$$div\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = div\vec{j} + \frac{1}{4\pi}div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = div\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = div\left(\vec{j} + \vec{j}_{CM}\right) = div\vec{j}_n = 0, \qquad (4.5.7)$$

где введены обозначения

$$\vec{j}_{CM} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \text{ (; и .).} \qquad (4.5.8)$$
$$\vec{j}_n = \vec{j} + \vec{j}_{CM}$$

Иными словами, предполагается, что наряду с токами проводимости $\vec{j}$, представляющими собой движение электрических зарядов по проводам, существуют еще и токи $\vec{j}_{CM}$ иного рода, которые Максвелл назвал *токами смещения*. Сумму тока проводимости и тока смещения $\vec{j}_n = \vec{j} + \vec{j}_{CM}$ называют *полным током*.

Согласно уравнению

$$div\vec{j}_n = div\left(\vec{j} + \vec{j}_{CM}\right) = 0 \qquad (4.5.9)$$

линии *полного тока всегда являются непрерывными и замкнутыми*, в отличие от линий тока проводимости. Токи проводимости, если они не за-

мкнуты, замыкаются токами смещения. При этом выражение для ротора (вихря) вектора $\vec{H}$ принимает вид

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_n = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_{CM}\right),$$

то есть

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right). \qquad (4.5.10)$$

Применяя дивергенцию к обеим частям (4.5.10), получаем ноль в обеих частях, тем самым снимаем противоречие. Полученный результат — это не вывод, а лишь устранение противоречия. Доказательством существования токов смещения служит опыт.

Другими словами, в магнитном отношении токи смещения эквивалентны токам проводимости, они также *возбуждают магнитное поле по тем же законам, что и токи проводимости*. И эксперимент подтверждает этот факт, что ток смещения создает такое же магнитное поле, что и ток проводимости. Очевидно, что ток проводимости, ток смещения и полный ток измеряются в одних и тех же единицах.

Однако на этом аналогия между двумя компонентами полного тока исчерпывается. Самое существенное отличие заключается в том, что токи проводимости соответствуют движению электрических зарядов, тогда как «чистый» ток смещения — ток смещения в вакууме — соответствует лишь изменению напряженности электрического поля и никаким движением электрических зарядов или любых других частиц вещества не сопровождается. *Токи смещения не переносят заряд или массу*.

В вакууме имеем:

$$\vec{D} = \vec{E} \qquad \text{и} \qquad \vec{j}_{CM} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \qquad (4.5.11)$$

При наличии диэлектрика получаем

$$\vec{j}_{CM} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + 4\pi\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right). \qquad (4.5.12)$$

В последнем случае ток смещения складывается из «чистого» тока смещения, не связанного с движением зарядов, и тока поляризации $4\pi\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$, обусловленного движением (смещением) связанных зарядов.

Токи смещения, в отличие от токов проводимости, не сопровождаются выделением джоулева тепла. Для вакуума это утверждение очевидно, в диэлектриках же токи смещения сопровождаются тепловыми эффектами, что особенно заметно для высокочастотных процессов. Однако этот процесс подчиняется совершенно иным закономерностям, чем выделение джоулева тепла в проводниках.

Открытие рассмотренного в этом параграфе явления — порождения переменным электрическим полем магнитного — вполне аналогично открытию явления электромагнитной индукции и явилось решающим шагом, сделанным Максвеллом к построению теории электромагнитного поля.

Итак, ток смещения появляется там, где существует переменное электрическое поле (заряды не переносятся). Отсюда следует фундаментальный вывод: *переменное электрическое поле порождает магнитное поле*. В заключение отметим, что *открытие Максвеллом тока смещения — открытия первостепенной важности* — чисто теоретическое открытие.

Примечание 64. В системе СИ получаем $\vec{j}_{см} = \frac{\partial D}{\partial t}$, $rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

4.6. Система уравнений Максвелла

4.6.1. Система уравнений Максвелла

До сих пор мы рассматривали отдельные части созданной Максвеллом единой теории электрических и магнитных явлений. Теперь полученные результаты могут быть сведены в *полную систему уравнений электромагнитного поля*. Если эта система действительно полна и верна, то из нее должны однозначно следовать все свойства поля — как уже изученные, так и новые, предсказываемые теорией.

Система дифференциальных уравнений классической электродинамики носит название *системы уравнений Максвелла*, который впервые сформулировал эти уравнения в 1860-х гг. и раскрыл их физический смысл. Заметим, что общепринятая ныне формулировка уравнений электродинамики принадлежит Г. Герцу.

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

$$\begin{aligned} rot\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (a), \qquad div\vec{D} = 4\pi\rho \quad (б), \\ rot\vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \quad (в), \qquad div\vec{B} = 0 \quad (г) \end{aligned} \quad (.) \qquad (4.6.1)$$

Верхняя пара уравнений (4.6.1а, б) указывает на то, что есть две причины возникновения электрического поля.

Во-первых, его источником являются электрические заряды (закон Кулона), как сторонние, так и связанные:

$$div\vec{D} = 4\pi\rho, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad div\vec{P} = -\rho', \text{ т. е. } div\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho'). \qquad (4.6.2)$$

Во-вторых, электрическое поле $\vec{E}$ появляется всегда, когда меняется во времени магнитное поле (закон электромагнитной индукции — уравнение (4.6.1а)).

Вторая пара уравнений (4.6.1в, г) показывает, что магнитное поле возбуждается как движущимися зарядами (электрические токи), так и переменными электрическими полями. Однако магнитных зарядов нет — о чем говорит уравнение (4.6.1г). Напомним связь между векторами магнитного поля в веществе:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{J}, \quad rot\vec{J} = \frac{1}{c}\vec{j}_m,$$

$$\text{т. е.} \quad rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_m + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right), \qquad (4.6.3)$$

где $\vec{j}_m$ — плотность тока намагничивания; $\partial\vec{P}/\partial t$ — плотность тока поляризации. Первые три тока, входящие в это выражение, связаны с движением электрических зарядов, последний ток — с изменяющимся во времени электрическим полем.

Система уравнений Максвелла в интегральной форме.

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S} \quad \text{(а)}, \qquad \oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi\int_V \rho dV, \quad \text{(б)}$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S} \quad \text{(в)}, \qquad \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \quad \text{(г)} \qquad (4.6.4)$$

Содержание этих уравнений заключается в следующем.

А. Циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру, т. е. работа по перенесению единичного заряда, с точностью до коэффициента $1/c$ равна со знаком «минус» производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром. Под электрическим вектором $\vec{E}$ понимается как вихревое электрическое поле, так и электростатическое поле, циркуляция которого равна нулю. Это *закон электромагнитной индукции*.

Б. Поток вектора $\vec{D}$ через любую замкнутую поверхность с точностью до коэффициента 4π равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью. Это *закон Кулона*.

В. Циркуляция вектора $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру с точностью до коэффициента $4\pi/c$ равна полному току (сумма токов проводимости и смещения) через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром. Вихревое *магнитное поле возбуждается движущимися зарядами и переменным электрическим полем*.

Г. Поток вектора $\vec{B}$ через произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю. Это свидетельство отсутствия *магнитных зарядов*.

Уравнения Максвелла, записанные в дифференциальной форме, предполагают, что входящие в них величины, а также постоянные, характеризующие среду, в пространстве и времени изменяются непрерывно и всюду конечны. Однако существуют поверхности разрыва, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно. Поэтому, чтобы система уравнений была полной, т. е. давала возможность определить характеристику поля по начальным условиям, эту систему дифференциальных уравнений необходимо дополнить *граничными условиями*, которым должны удовлетворять векторы электромагнитного поля на границе раздела сред:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \qquad E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \qquad \left[\vec{n}, \vec{H}_2\right] - \left[\vec{n}, \vec{H}_1\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}, \tag{4.6.5}$$

где σ — поверхностная плотность сторонних зарядов; $\vec{i}$ — поверхностная плотность тока проводимости на границе раздела сред.

Уравнения Максвелла в интегральной форме справедливы и в тех случаях, когда существуют поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, т. е. в уравнениях, записанных в интегральной форме, автоматически учтены граничные условия.

Однако если электрическое и магнитное поля стационарны, т. е. не зависят от времени ($\vec{E} = const$ и $\vec{B} = const$), то система уравнений Максвелла распадается на две группы *независимых* уравнений, что позволяет рассматривать электрическое и магнитное поля как независимые друг от друга субстанции, например в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0; \qquad \oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi\int_V \rho dV; \tag{4.6.6}$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}d\vec{S}; \qquad \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \tag{4.6.7}$$

Эта возможность и была использована нами, когда вначале курса электромагнетизма мы отдельно могли изучать законы электростатики и магнитостатики.

Когда электрическое и магнитное поля меняются во времени, тогда из уравнений Максвелла следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые друг от друга физические величины или характеристики: изменение во времени одной из них приводит к появлению другой. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, составляющая *единое электромагнитное поле*.

Уравнения поля линейны, что обеспечивает принцип суперпозиции. В число фундаментальных уравнений не включено уравнение непрерывности — закон сохранения заряда, так как последний уже включен в систему уравнений Максвелла (получается из уравнений (б) и (в) в (4.6.1) и (4.6.4)).

Всего получили 8 уравнений (2 векторных и 2 скалярных), но при этом имеем 16 переменных: $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{j}$ и ρ.

Наиболее общая постановка задачи в электромагнетизме — определение всех полей в пространстве и во времени при первоначально заданных значениях $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Часто постановка задачи в электродинамике выглядит следующим образом: необходимо найти электрические и магнитные поля при заданном распределении зарядов ρ (сторонних) и токов $\vec{j}$ (проводимости). Таким образом, надо найти 12 переменных величин при 8 уравнениях. Видно, что число определяемых переменных больше числа уравнений. Означает ли это, что система не доопределена? Чтобы разрешить подобные задачи необходимо включить связь между векторами $\vec{E}, D, \vec{B}, \vec{H}$.

4.6.2. Материальные уравнения

Систему уравнений Максвелла необходимо дополнить соотношениями, в которые входят величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Эти соотношения называются *материальными уравнениями.* Вообще говоря, эти уравнения достаточно сложны и не обладают той общностью и фундаментальностью, которые присущи уравнениям Максвелла. Материальные уравнения наиболее просты в случае достаточно слабых и сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени электромагнитных полей. Если при этом среда изотропна и не содержит сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, то материальные уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}, \tag{4.6.8}$$

где ε, μ, σ — диэлектрическая и магнитная проницаемости и электропроводность среды соответственно. Вычисление этих величин — трудная задача, поэтому обычно эти постоянные определяются феноменологически. Поле $\vec{E}$ включает в себя в том числе и поле сторонних сил, обусловленных химическими или тепловыми процессами.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме совместно с граничными условиями и материальными уравнениями составляют *полную* систему, позволяющую по заданным начальным значениям $\vec{E}$ и $\vec{B}$ *однозначно* определить электромагнитное поле в любой точке пространства и в любой момент времени.

С помощью материальных уравнений из системы уравнений можно исключить величины $\vec{j}, \vec{D}, \vec{H}$. Таким образом, остается только 6 неизвестных $\vec{E}$ и $\vec{B}$, если считать известным распределение электрического заряда $\rho(t)$. Получаем 6 неизвестных и 8 уравнений, однако система получается не переполненной. Это связано с тем, что из дифференциальных уравнений (4.6.1б, в) и (4.6.1а, г) следуют одинаковые дифференциальные следствия.

Полная система уравнений вместе с уравнением движения заряженных частиц под действием силы Лоренца составляет фундаментальную систему уравнений. Эта система в принципе достаточна для описания всех электромагнитных явлений, в которых не проявляются квантовые эффекты.

Рассуждения, с помощью которых мы пришли к уравнениям Максвелла, ни в коем случае нельзя рассматривать как их доказательство или вывод. Эти уравнения, полученные путем обобщения опытных фактов, являются основными аксиомами, или постулатами, электродинамики. Они играют в электродинамике такую же роль, как законы Ньютона в классической механике или начала термодинамики в молекулярной физике.

4.6.3. О магнитном заряде. Магнитный монополь

Законы природы обнаруживают большую степень подобия между электрическими и магнитными полями. Имеется, однако, одно большое различие. Частицы с положительными и отрицательными электрическими зарядами постоянно наблюдаются в природе, создавая в окружающем про-

странстве кулоновское электрическое поле. Магнитные же заряды, ни положительные, ни отрицательные, никогда не наблюдались по отдельности. Магнит всегда имеет два разнесенных на концы равных по величине полюса — положительный и отрицательный. Магнитное поле вокруг магнита есть результирующее поле обоих полюсов.

После высказанной Ампером гипотезы о существовании внутримолекулярных токов и ее подтверждении казалось, что идея магнитного заряда была благополучно «похоронена» и могла рассматриваться лишь в качестве вспомогательной. Из уравнений Максвелла для электромагнитного поля вытекает фундаментальная *асимметрия* между магнитными $\vec{H}, \vec{B}$ и электрическими $\vec{E}, \vec{D}$ величинами, особенно наглядная, если эти уравнения переписать в виде:

$$div\vec{D} = 4\pi\rho, \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j};$$
$$div\vec{B} = 0, \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - rot\vec{E} = 0. \tag{4.6.9}$$

Еще нагляднее это проявляется, если рассмотреть эти уравнения для вакуума:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho, \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e;$$
$$div\vec{B} = 0, \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - rot\vec{E} = 0. \tag{4.6.10}$$

Эта асимметрия проявляется в отсутствии магнитных зарядов и их токов. Магнитное поле в этом смысле является вторичным эффектом электричества, возникая лишь при движении электрических зарядов. Если же отказаться от идеи «первородства» электричества, то из простых соображений симметрии можно было бы предположить существование магнитных зарядов и соответствующих им токов. Тогда в правых частях нижней пары уравнений Максвелла стояли бы не нули, а соответственно следующие величины:

$4\pi\rho_m$, ρ_m — плотность магнитных зарядов;

$\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m$, j_m — плотность магнитных токов.

Такое смелое предположение в 1931 г. и сделал П. Дирак, который высказал: «Было бы удивительно, если бы природа не использовала эту возможность», а позже развил идею о существовании магнитного монополя (единичного магнитного полюса). Логических возражений против такой гипотезы нет, т. е. классическая физика допускает существование таких частиц. Однако сохраняется неясность: многие уравнения получаются из вариационных принципов, но до сих пор не придумано и не сформулировано такого вариационного принципа, в котором бы наряду с системой уравнений Максвелла появлялись бы электрический и магнитный заряды одновременно и равноправно. Возможно, что отсюда следует запрет на существование магнитных зарядов. Кроме того, многочисленные попытки

экспериментального обнаружения магнитных монополей пока к успеху не привели.

В квантовой механике имеем другую ситуацию. Там монополь возникает как некоторая сингулярность в теории электромагнитного поля. Основной вывод Дирака: магнитный заряд магнитного монополя g должен быть связан с электрическим зарядом и квантован:

$$g = n\frac{\hbar c}{2e}, \tag{4.6.11}$$

где n — любое целое число. Эту связь можно получить многими способами, но везде нужно привлекать квантовую механику. Получим заряд монополя Дирака, используя мысленный эксперимент Эфингера (1969).

Рассмотрим конденсатор, в котором создано однородное электрическое поле (рис. 4.6.1). В таком поле магнитный монополь с зарядом g будет двигаться по круговой орбите, т. е. его поведение будет аналогично тому, как будет вести себя электрон, помещенный в однородное магнитное поле (диамагнетизм свободных электронов Ландау). Сила Лоренца, действующая со стороны электрического поля на монополь, равна

$$\vec{F}_E = \frac{g}{c}\left[\vec{v}, \vec{E}\right], \tag{4.6.12}$$

или

$$F_E = g\left|\vec{E}\right|\frac{v}{c},$$

и будет сообщать ему центростремительное ускорение

$$F_E = M\frac{v^2}{R}, \tag{4.6.13}$$

где M, v и R — масса, скорость и радиус траектории монополя соответственно. Из равенства (4.6.12) и (4.6.13) получаем

$$\left|\vec{E}\right| = E = \frac{Mvc}{Rg}. \tag{4.6.14}$$

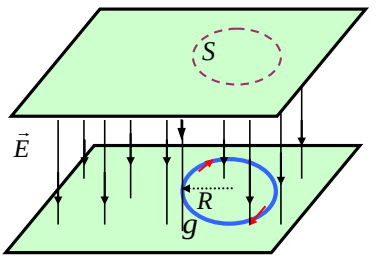


Рис. 4.6.1

Л. Д. Ландау показал, что орбитальное движение электронов в магнитном поле квантуется. Поэтому момент импульса электрического заряда в однородном магнитном поле относительно оси вращения может быть записан как

$$L_z = (2n+1)\hbar, \tag{4.6.15}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, где член с $n = 0$ описывает так называемое нулевое движение. Распространяя этот результат на орбитальное движение монополя в однородном электрическом поле, запишем

$$L_z = MvR = (2n+1)\hbar. \qquad (4.6.16)$$

Тогда напряженность электрического поля, в котором движется монополь, может быть выражена как

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\hbar c}{gR^2}(2n+1) = \frac{2\hbar c}{gR^2}\left(n+\frac{1}{2}\right). \qquad (4.6.17)$$

С другой стороны, по теореме Гаусса поле в конденсаторе (см. рис. 4.6.1):

$$E \cdot \pi R^2 = 4\pi\sigma \cdot \pi R^2;$$

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q_{охв}}{\pi R^2} = \frac{4q_{охв}}{R^2}, \qquad (4.6.18)$$

где σ — поверхностная плотность зарядов на пластине конденсатора, $q_{охв} = \sigma \cdot \pi R^2$ — заряд на пластине конденсатора, охватываемый проекцией орбиты магнитного монополя на плоскость пластины. Приравнивая (4.6.17) и (4.6.18), получаем

$$\frac{4q_{охв}}{R^2} = \frac{2\hbar c}{gR^2}\left(n+\frac{1}{2}\right), \text{ или } q_{охв} = \frac{\hbar c}{2g}\left(n+\frac{1}{2}\right). \qquad (4.6.19)$$

При $n = 0$ остается конечный заряд, связанный с нулевым движением монополя (эффект физического вакуума). Вычитая эффект вакуума, получаем

$$q_{набл} = n\frac{\hbar c}{2g}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (4.6.20)$$

При $n = 1$ получаем $e = \frac{\hbar c}{2g}_{\min}$ — наименьший электрический заряд, откуда

$$g_{\min} = \frac{\hbar c}{2e} \quad \text{или} \quad g = n\frac{\hbar c}{2e},$$

т. е. получаем условие квантования гипотетического магнитного заряда, записанное выше (4.6.11).

Условие квантования возникает из-за того, что частицы проявляют волновые свойства, вследствие чего появляются интерференционные эффекты в движении частиц одного типа под влиянием частиц другого типа. Если магнитный монополь с магнитным зарядом g существует, то формула

$$eg = \frac{1}{2}n\hbar c \qquad (4.6.21)$$

равносильна требованию, чтобы все заряженные частицы в окрестности монополя имели заряд e, равный целому кратному величины $\frac{\hbar c}{2g}$. Таким образом, электрические заряды должны быть квантованы. А именно кратность всех наблюдаемых зарядов заряду электрона является одним из фундаментальных законов природы. Поэтому если бы существовал монополь

Дирака, то этот закон имел бы естественное объяснение. Никакого другого объяснения квантования электрического заряда неизвестно.

Принимая, что e — заряд электрона, величина которого определяется соотношением $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ (α — постоянная тонкой структуры), и используя условие квантования, можно получить наименьший магнитный заряд, определяемый равенством $\frac{g^2}{\hbar c} = \frac{137}{4}$. Откуда $\frac{g^2}{e^2} = \left(\frac{137}{2}\right)^2$ и получаем

$$g = \frac{137}{2} e = 68{,}5e, \qquad (4.6.22)$$

т. е. наименьший магнитный заряд много больше заряда электрона.

Магнитный монополь — стабильная частица, которая не может исчезнуть, пока не встретится с другим монополем, имеющим равный по величине и противоположный по знаку магнитный заряд. Таким образом, монополи, если они существуют, должны, как и электроны с позитронами, рождаться и аннигилировать парами: плюс-монополь и минус-монополь. Масса монополя $\sim 2{,}5m_p$.

Выводы Дирака.

1. Магнитный монополь, если он существует, вносит симметрию в уравнения для магнитных и электрических полей.

2. Нет физических законов, запрещающих существование магнитного монополя.

3. Имеет место взаимное квантование электрического и магнитного зарядов.

Как можно обнаружить монополь? Степень ионизации, производимой монополем, должна быть велика $(g = 68{,}5e)$, поэтому его трек в камере Вильсона или пузырьковой камере должен очень сильно выделяться на фоне треков других частиц. Однако поиски пока не дали результатов.

Существуют ограничения сверху, которые необходимо учитывать при попытках обнаружить магнитный монополь, например:

1. В составе космических лучей вплоть до энергий $\sim 3\ 10^{19}$ эВ не обнаружена высокопроникающая компонента монополей.

2. Космическими лучами создается не более двух монополей в секунду по всей поверхности Земли.

Примечание 65. Поль Андриен Морис Дирак (1902–1984), английский физик-теоретик.

4.7. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля

4.7.1. Зависящие от времени потенциалы поля

Записав систему уравнений Максвелла, теперь следует найти способ их решения. Для стационарного электромагнитного поля эта задача суще-

ственно облегчается введением вспомогательных величин — потенциалов φ и $\vec{A}$. Оказывается, что, видоизменив надлежащим образом определение скалярного и векторного потенциалов, можно воспользоваться ими и для решения уравнений Максвелла в общем случае переменного электромагнитного поля.

Будем считать, что диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости одинаковы на всем протяжении поля и поверхностных зарядов и токов в поле нет. При этих условиях векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и их первые производные всюду остаются непрерывными, что существенно упрощает решение поставленной задачи. Полученные далее результаты могут быть легко обобщены на случай наличия скачкообразного изменения ε и μ на отдельных поверхностях раздела различных сред, в то время как задача решения уравнений Максвелла при произвольной зависимости ε и μ от координат точки чрезвычайно усложняется.

Ранее в электростатике ввели скалярный потенциал φ. При этом электрическое поле $\vec{E}$ было потенциальным ($rot\vec{E} = 0$) и определялось из равенства

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \tag{4.7.1}$$

Но теперь в переменных во времени полях появилась непотенциальная часть электрического поля:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{c\partial t}. \tag{4.7.2}$$

Поскольку магнитных зарядов нет, то, как и ранее, имеем $div\vec{B} = 0$ и, как и ранее, можно ввести векторный потенциал $\vec{A}$ (см. главу 3, §3.7):

$$\vec{B} = rot\vec{A}. \tag{4.7.3}$$

Поскольку теперь рассматриваем электрическое и магнитное поля зависящими от времени, то, следовательно, и скалярный $\varphi(\vec{r},t)$, и векторный $\vec{A}(\vec{r},t)$ потенциал также зависят от времени и координат. Подставим (4.7.3) в уравнение (4.7.2) и поменяем порядок дифференцирования:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial}{c\partial t}rot\vec{A} = -\frac{1}{c}rot\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}. \tag{4.7.4}$$

Тогда последнее выражение можно переписать в виде

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{c\partial t}\right) = 0. \tag{4.7.5}$$

Иначе говоря, вектор в круглых скобках является *потенциальным вектором*. И именно этот вектор можно представить в виде градиента от скалярного потенциала $\varphi(\vec{r},t)$:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi. \tag{4.7.6}$$

Итак, в случае *переменных полей электрическое поле выражается через векторный и скалярный потенциалы*:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t} - \nabla\varphi(t,\vec{r}). \qquad (4.7.7)$$

Первое слагаемое в (4.7.7) определяет электрическое поле, появляющееся вследствие электромагнитной индукции, второе — от зарядов. *Магнитное поле определяется по-прежнему*:

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = rot\vec{A}(t,\vec{r}). \qquad (4.7.8)$$

Как и в случае стационарных полей, потенциалы $\varphi(\vec{r},t)$ и $\vec{A}(\vec{r},t)$ определены неоднозначно, т. е. одно и то же электромагнитное поле может быть представлено различными потенциалами. Это связано с тем, что скалярный и векторный потенциалы поля являются лишь вспомогательными функциями, а непосредственный физический смысл имеют только напряженность $\vec{E}$ электрического и индукция $\vec{B}$ магнитного полей. Именно эти характеристики поля однозначно определяют энергию поля, силы, действующие со стороны поля на заряженные частицы, плотность токов и т. д. Поэтому любые два поля, описываемые одними и теми же значениями $\vec{E}$ и $\vec{B}$, но разными значениями потенциалов φ и $\vec{A}$, физически тождественны.

Неоднозначность потенциалов позволяет производить *калибровочное преобразование.* В самом деле, имеем:

$$\begin{cases} \vec{B} = rot\vec{A} \\ \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \end{cases}. \qquad (4.7.9)$$

Пусть имеется произвольная функция $\chi(\vec{r},t)$. Тогда легко увидеть, что новые потенциалы, определенные как

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + grad\chi \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\chi}{\partial t} \end{cases}, \qquad (4.7.10)$$

опять описывают те же магнитное и электрическое поля. В самом деле, имеем для индукции магнитного поля:

$$\vec{B}' = rot\vec{A}' = rot\vec{A} + rot(grad\chi) = rot\vec{A} = \vec{B},$$

так как $rot(grad\chi) = [\nabla,\nabla\chi] \equiv 0$, и для напряженности электрического поля

$$\vec{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{\partial}{c\partial t}\nabla\chi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\chi}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E}.$$

Преобразования (4.7.10) называются *калибровочными преобразованиями*. Инвариантность поля по отношению к этому классу преобразований потенциалов называется *калибровочной*, или *градиентной*, *инвариантностью*. Требование калибровочной инвариантности уравнений теоретической физики, т. е. требование, чтобы физическое содержание этих уравнений зависело только от напряженности и индукции электромагнитного поля и оставалось неизменным при всех преобразованиях потенциалов поля,

играет важную роль в физических теориях. Решение отдельных конкретных задач часто облегчается специальной, целесообразной для данной задачи калибровкой потенциалов.

4.7.2. Уравнения для потенциалов

Получим дифференциальные уравнения для зависящих от времени потенциалов электромагнитного поля. Пусть для простоты *рассматриваем изотропную среду*

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E};$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

и $\varepsilon, \mu = const$ на всем протяжении поля. Тогда перепишем уравнение системы уравнений Максвелла в виде

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

или, умножая на магнитную проницаемость, имеем:

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (4.7.11)$$

Подставим выражения $\vec{B} = rot\vec{A}$ и $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ в последнее уравнение:

$$rot\left(rot\vec{A}\right) = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).$$

Воспользуемся известным соотношением из векторной алгебры:

$$rot\left(rot\vec{A}\right) \equiv \left[\nabla, \left[\nabla, \vec{A}\right]\right] = grad\left(div\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}$$

(напомним, двойное векторное произведение раскладывается по правилу БАЦ–ЦАБ — $\left[\nabla\left[\nabla, \vec{A}\right]\right] = \nabla\left(\nabla, \vec{A}\right) - \left(\nabla, \nabla\right)\vec{A}$). Тогда получаем

$$grad\left(div\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} - \vec{\nabla}\left(\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2},$$

или далее

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + grad\left(div\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \qquad (4.7.12)$$

Воспользовавшись неоднозначностью определения потенциалов φ и $\vec{A}$, можем наложить некоторое условие, определяющее их взаимосвязь, в частности так называемое условие *калибровка Лоренца*:

$$div\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \qquad (4.7.13)$$

Иначе говоря, мы можем выбрать такие калибровочные преобразования, т. е. такие $\chi(\vec{r}, t)$, чтобы выполнялось (4.7.13). Тогда уравнение для векторного потенциала $\vec{A}$ в калибровке Лоренца приобретает вид:

$$\Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}\,. \qquad (4.7.14)$$

Это уравнение носит название *уравнения Даламбера*. Заметим, что в случае стационарных, не зависящих от времени полей второе слагаемое $\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$ равно нулю, и мы приходим к уравнению (3.7.12) — к уравнениям Пуассона для компонент векторного потенциала.

Вводя условие Лоренца (4.7.13), которое упрощает запись уравнения для векторного потенциала, это условие должно сохраняться при калибровочных преобразованиях. Мы, таким образом, накладываем ограничения на вид скалярной функции $\chi(t,\vec{r})$ исходя из следующего равенства:

$$div\vec{A}' + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = div\left(\vec{A} + grad\chi\right) + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) = div\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\Delta\chi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right).$$

Итак, условие Лоренца оказывается инвариантным лишь тогда, когда выражение в круглых скобках равно нулю, т. е. при калибровочных преобразованиях с функцией χ, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\chi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0\,. \qquad (4.7.15)$$

Воспользовавшись уравнением Максвелла для вектора электрической индукции $div\vec{D} = 4\pi\rho$, найдем теперь дифференциальное уравнение для скалярного потенциала φ:

$$div\vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

$$div\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

или далее получаем

$$-\Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{A} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Из условия Лоренца (4.7.13) выражаем дивергенцию векторного потенциала $div\vec{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и подставляем в последнее уравнение, тогда получаем

$$-\Delta\varphi + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

или окончательно имеем

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \qquad (4.7.16)$$

Таким образом, мы получили дифференциальные уравнения для определения векторного (4.7.14) и скалярного (4.7.16) потенциалов. Полученные уравнения носят название *уравнений Даламбера*. Эти уравнения вместе с *условием Лоренца* позволяют определить значения потенциалов электромагнитного поля по заданному распределению зарядов и токов прово-

димости. Зная φ и $\vec{A}$, можно с помощью уравнений $\vec{B} = rot\vec{A}$ и $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ найти векторы $\vec{B}$ и $\vec{E}$.

Отметим, что хотя скалярный потенциал φ, как и в случае стационарных полей, зависит лишь от распределения зарядов, а векторный потенциал $\vec{A}$ — от распределения токов проводимости, напряженность же электрического поля зависит не только от градиента скалярного потенциала, но и от производной по времени векторного потенциала. В этом обстоятельстве проявляется закон электромагнитной индукции.

Для стационарного поля все производные по времени обращаются в нуль, а все уравнения, как и следовало ожидать, сводятся к полученным ранее в п. 3.7 уравнениям, описывающим стационарное поле.

Пока остается открытым вопрос о физическом смысле коэффициента $\frac{\varepsilon\mu}{c^2}$. Ответ на него мы получим в следующем параграфе.

4.8. Волновое уравнение

Рассмотрим непроводящую, изотропную и однородную среду, характеризуемую диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Пусть в этой среде отсутствуют свободные заряды и токи проводимости, т. е. имеем $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$. Тогда, если в рассматриваемой области нет ферромагнетиков, можно записать стандартные уравнения для полей в среде:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}. \tag{4.8.1}$$

Система уравнений Максвелла (4.6.1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} rot\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad & rot\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ div\vec{D} &= 0, & div\vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (.) \tag{4.8.2}$$

Продифференцируем первое уравнение из (4.8.2) по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H} = rot\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{4.8.3}$$

Применяя операцию rot ко второму уравнению системы (4.8.2) и подставляя результат (4.8.3), полученный из первого уравнения, находим:

$$rot\left(rot\vec{E}\right) = -\frac{\mu}{c} rot\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Из векторного анализа вспомним правило БАЦ–ЦАБ, тогда имеем

$$rot\left(rot\vec{E}\right) = \left[\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}, \vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} = grad\left(div\vec{E}\right) - \Delta\vec{E},$$

где оператор Лапласа, как обычно, равен сумме вторых частных производных

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

И так как $grad\left(div\vec{E}\right) = 0$ из-за условия $div\vec{D} = 0$, получаем

$$rot\left(rot\vec{E}\right) = -\Delta\vec{E} \qquad (4.8.4)$$

Таким образом, окончательно для вектора напряженности электрического поля имеем

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0. \qquad (4.8.5)$$

Аналогично для $\vec{H}$ или $\vec{B}$ получаем

$$\Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0. \qquad (4.8.6)$$

С такими уравнениями мы с вами встречались при изучении распространения колебаний в курсе «Классическая механика» (глава 4, § 4.7, уравнение (4.7.14)). В общем случае уравнение вида

$$\Delta\Phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.8.7)$$

называется *волновым уравнением.* Здесь в качестве функции $\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$ могут быть функции векторных полей $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}$ и их проекций.

Рассмотрим одномерный случай, когда процесс распространения происходит вдоль оси x. Тогда уравнение (4.8.7) запишется

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \qquad (4.8.8)$$

Решением этого уравнения является функция вида

$$\Phi = \Phi\left(t \pm \frac{x}{v}\right). \qquad (4.8.9)$$

Это легко проверить, если вычислим производные от (4.8.9) по координате:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \pm\frac{1}{v}\Phi'; \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\Phi'',$$

и по времени:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \Phi'; \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Phi''.$$

В самом деле, подставляя эти производные в волновое уравнение (4.8.8), получаем равенство нулю левой части уравнения.

Смысл приведенного решения (4.8.9) прост: оно описывает распространяющееся возмущение (т. е. значение функции Ф в одной точке) или бегущую волну. Функция $\Phi = \Phi(t - x/v)$ представляет уравнение волны, распространяющейся вдоль оси x со скоростью v. Функция $\Phi = \Phi(t + x/v)$ описывает волну, распространяющуюся против оси x со скоростью v.

Действительно, следующее равенство, определяющее постоянное значение функции Ф:

$$t - \frac{x}{v} = t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{v}, \qquad (4.8.10)$$

выполняется, если

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}, \text{ или } v = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

т. е. v имеет смысл скорости, т. е. скорости распространения постоянного значения функции Ф.

При фиксированных значениях x и t значение функции $\Phi = \Phi(t \pm x/v)$ постоянно на всей плоскости, перпендикулярной x. Поэтому такие волны называются *плоскими.* Аргумент функции Φ, т. е. $\varphi(x,t) = t - x/v$, называется *фазой волны*. Уравнение поверхности постоянной фазы, иначе *волновой поверхности*, имеет вид

$$t - \frac{x}{v} = const. \qquad (4.8.11)$$

Дифференцируем это уравнение по времени: $1 - \frac{1}{v}\frac{dx}{dt} = 0$, получаем *фазовую скорость*:

$$v = \frac{dx}{dt}. \qquad (4.8.12)$$

Фазовая скорость — это скорость, с которой поверхность с фиксированным значением фазы (волновая поверхность) перемещается вдоль оси *x*.

Возвращаясь к уравнениям для потенциалов электромагнитного поля (см. п. 4.7) и уравнениям для векторов электромагнитного поля (4.8.5)–(4.8.6), находим, что

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} = \frac{1}{v^2}.$$

Таким образом, электромагнитное поле распространяется от места возбуждения с конечной скоростью, определяемой соотношением

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (4.8.13)$$

Скорость распространения электромагнитных волн (скорость света) в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) равна коэффициенту, введенному в системе единиц Гаусса:

$$v_{вакуум} = c. \qquad (4.8.14)$$

Отметим, что скорость света в среде меньше, чем в вакууме, так как произведение $\varepsilon\mu \geq 1$.

Примечание 66. В системе СИ скорость света в вакууме $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, а в среде — $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0}}$.

Резюмируя сказанное, отметим, *что из уравнений Максвелла следует вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно, т. е. отдельно от электрических зарядов и токов. Изменение состояния электромагнитного поля носит волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами.*

ДОПОЛНЕНИЯ

К главе 4 п. 4.4

Дополнение 2. Энергия магнитного взаимодействия токов (Тамм И. Е. Основы теории электричества. § 79).

Рассмотрим индукционное взаимодействие переменных токов I_1 и I_2 с энергетической точки зрения. Очевидно, что приращение энергии в системе будет определяться вкладами от различных механизмов, которые можно рассматривать как аддитивные. При этом необходимо учесть следующие превращения энергии:

1) выделение джоулева тепла Q в цепи токов;

2) работу P сторонних электродвижущих сил;

3) механическую работу A, совершаемую при перемещении контуров тока;

4) энергию магнитного взаимодействия токов W.

Итак, рассмотрим изменение всех этих видов энергии за бесконечно малый элемент времени dt. За это время должно иметь место увеличение механической энергии (например, кинетической энергии движения проводников) на величину δA (и оно равно убыли потенциальной функции этих токов (4.3.28)):

$$\delta A = -d(U)_I = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}I_1^2 dL_{11} + I_1 I_2 dL_{12} + \frac{1}{2}I_2^2 dL_{22}\right). \qquad (4.4.д1)$$

Промежуток времени dt выбирается настолько малым, что силы токов могут считаться практически постоянными в течение этого промежутка. За время dt в обоих контурах выделяется количество джоулева тепла, равное

$$Qdt = \left(I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2\right)dt, \qquad (4.4.д2)$$

а сторонние электродвижущие силы $\mathsf{E}^{стр}$ совершат за это же время (например, за счет химической энергии включенных в цепь контуров гальванических элементов) в обоих контурах работу

$$Pdt = \left(I_1 \mathsf{E}_1^{стр} + I_2 \mathsf{E}_2^{стр}\right)dt. \qquad (4.4.д3)$$

Здесь Q и P — тепловая мощность и мощность сторонних сил соответственно; $R_{1,2}$ — электрические сопротивления контуров.

Итак, за время dt должно иметь место увеличение механической энергии, увеличение тепловой энергии и уменьшение энергии источников электродвижущих сил (химической энергии аккумуляторов). Таким образом, общее увеличение всех видов энергии равно

$$\Delta = \delta A + (Q - P)dt. \qquad (4.4.д4)$$

Вычисляем разность мощностей отдельно:

$$Q - P = I_1\left(I_1 R_1 - \mathsf{E}_1^{стр}\right) + I_2\left(I_2 R_2 - \mathsf{E}_2^{стр}\right) = I_1 \mathsf{E}_1^{ind} + I_2 \mathsf{E}_2^{ind}. \qquad (4.4.д5)$$

Здесь мы воспользовались разделением полной электродвижущей силы на ЭДС сторонних сил и ЭДС индукции:

$$IR = \mathcal{E}^{стр} + \mathcal{E}^{ind}. \qquad (4.4.д6)$$

Теперь пользуясь определением потоков через первый и второй контуры соответственно:

$$\Phi_1 = \frac{1}{c} L_{11} I_1 + \frac{1}{c} L_{12} I_2 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \frac{1}{c} L_{21} I_1 + \frac{1}{c} L_{22} I_2, \qquad (4.4.д7)$$

можно записать ЭДС индукции в первом контуре в виде:

$$\mathcal{E}_1^{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{c^2}\left(L_{11}\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt} + I_1\frac{dL_{11}}{dt} + I_2\frac{dL_{12}}{dt} \right). \qquad (4.4.д8)$$

Аналогично для второго контура. Тогда имеем

$$(Q - P)dt = -\frac{1}{c^2}\left(L_{11} I_1 dI_1 + L_{12} I_1 dI_2 + L_{12} I_2 dI_1 + L_{22} I_2 dI_2 \right). \qquad (4.4.д9)$$

Общее увеличение всех этих видов энергии равно

$$\Delta = \\ = -\frac{1}{c^2}\left(L_{11} I dI_1 + \frac{1}{2} I_1^2 dL_{11} + L_{12} I_1 dI_2 + L_{12} I_2 dI_1 + I_1 I_2 dL_{12} + L_{22} I_2 dI_2 + \frac{1}{2} I_2^2 dL_{22} \right), \qquad (4.4.д10)$$

или далее

$$\Delta = -\frac{1}{c^2} d\left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \right). \qquad (4.4.д11)$$

Таким образом, всякое изменение конфигурации контуров и силы токов в них приводит к увеличению суммы механической, тепловой и химической энергии этой системы контуров на величину Δ.

Из закона сохранения энергии следует, что эти процессы должны сопровождаться эквивалентным уменьшением некоторого другого вида энергии. Чтобы определить этот вид энергии, следует заметить, что, помимо уже учтенных нами процессов, с перемещением проводников и изменением токов в них неразрывно связаны лишь силы магнитного взаимодействия этих токов. Поэтому магнитному взаимодействию токов необходимо приписать определенную магнитную энергию W, за счет эквивалентного изменения dW которой и происходит приращение всех прочих видов энергии.

$$dW = -\Delta = +\frac{1}{c^2} d\left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \right). \qquad (4.4.д12)$$

Следовательно, имеем

$$W = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \right). \qquad (4.4.д13)$$

Аддитивную постоянную, появляющуюся при интегрировании, кладут равной нулю для того, чтобы в отсутствие токов $(I_1 = I_2 = 0)$ магнитная

энергия оказалась равной нулю. Это выражение (4.4.д13) можно записать следующим образом:

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k . \qquad (4.4.д14)$$

Эта же формула справедлива и для произвольного n числа контуров, при этом индексы i и k будут пробегать все значения от 1 до n.

Сравнивая полученные выражения, получаем $W = -U$. Подчеркнем, что смысл величин W и U совершенно различен. Действительно, убыль потенциальной функции $-(dU)_I$ равна механической работе A, совершаемой силами магнитного поля (силу тока полагаем постоянной). Между тем убыль магнитной энергии $-dW$ равна сумме приращений всех видов энергии, а не только энергии механической (учитываем и изменение силы тока). Поэтому, в частности, трудно было ожидать столь простого соотношения между величинами W и U, которое мы получили.

В случае постоянных токов в неподвижных проводниках равны нулю механическая работа A, изменение магнитной энергии dW и ЭДС индукции $\mathcal{E}^{ind}$. Поэтому $Q = P$, т. е. работа сторонних сил целиком переходит в тепло.

При перемещении проводников совершается механическая работа и появляется ЭДС индукции, поэтому баланс между выделенной теплотой и работой сторонних сил нарушается. «Избыточная» затрата энергии сторонних сил расходуется не только на совершение механической работы, но и идет на увеличение магнитной энергии системы проводников.

Дополнение 3. Энергия магнитного поля.

Полученное нами выражение для энергии магнитного взаимодействия токов в отсутствие ферромагнетиков

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k \qquad (4.4.д15)$$

по своей форме аналогично выражению энергии взаимодействия покоящихся электрических зарядов

$$W_Э = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \qquad (i \neq k).$$

Поэтому, выражая магнитную энергию токов в виде интеграла по всему объему, мы получаем возможность интерпретировать энергию W как энергию поля.

$$W = -U = \frac{1}{2c}\int \vec{A}\vec{j}dV . \qquad (4.4.д16)$$

Учитывая, что $rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, получаем

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{A} rot\vec{H} dV . \qquad (4.4.д17)$$

Из векторного анализа имеем

$$\vec{A}rot\vec{H} = \vec{H}rot\vec{A} + div\left[\vec{H},\vec{A}\right] = \vec{H}\vec{B} + div\left[\vec{H},\vec{A}\right].$$

Подставляя полученное выражение в интеграл (4.4.д17) и используя теорему Гаусса, получаем

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV + \frac{1}{8\pi}\int div\left[\vec{H},\vec{A}\right]dV = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV + \frac{1}{8\pi}\oint_S \left[\vec{H},\vec{A}\right]_n dS\,, \qquad (4.4.д18)$$

где интегрирование распространено на все пространство, охватывающее все взаимодействующие токи и поле этих токов. В качестве поверхности интегрирования для второго интеграла можно взять бесконечно удаленную поверхность. Если все токи текут в конечной области пространства, то магнитное поле будет убывать на бесконечности достаточно быстро и рассматриваемый интеграл обратится в нуль. Тогда

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV\,. \qquad (4.4.д19)$$

Полученное выражение может быть интерпретировано следующим образом: магнитная энергия локализована в поле и распределена по его объему с плотностью, равной

$$w = \frac{1}{8\pi}\vec{H}\vec{B}\,. \qquad (4.4.д20)$$

Полученные результаты справедливы при отсутствии в поле ферромагнетиков. Для изотропных магнетиков справедливо соотношение $\vec{B} = \mu\vec{H}$, поэтому можем записать:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu H^2 dV\,; \qquad w = \frac{1}{8\pi}\mu H^2. \qquad (4.4.д21)$$

Таким образом, при заданной напряженности магнитного поля энергия единицы его объема пропорциональна магнитной проницаемости среды.

В вакууме $\mu = 1$ и для энергии получаем

$$w = \frac{1}{8\pi}H^2 = \frac{1}{8\pi}B^2\,. \qquad (4.4.д22)$$

Определим энергию магнитного поля $\vec{H}$ двух токов, находящихся в произвольной слабомагнитной среде. Если $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ — напряженности полей, создаваемых каждым током в отдельности, то

$$H^2 = \left(\vec{H}_1 + \vec{H}_2\right)^2 = H_1^2 + 2\vec{H}_1\vec{H}_2 + H_2^2\,, \qquad (4.4.д23)$$

и общая энергия поля токов равна

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi}\int \mu H^2 dV = \frac{1}{8\pi}\int \mu H_1^2 dV + \frac{1}{4\pi}\int \mu H_1 H_2 dV + \frac{1}{8\pi}\int \mu H_2^2 dV = \\ &= W_{11} + W_{12} + W_{22} \end{aligned}\,. \qquad (4.4.д24)$$

Первый и последний члены этого равенства могут быть названы *собственной энергией* каждого из токов I_1 и I_2, а второй член — *взаимной энергией* этих токов. Сравнивая это выражение с выражением для энергии системы токов (4.4.д13):

$$W = \frac{1}{2c^2}\left(L_{11}I_1^2 + 2L_{12}I_1I_2 + L_{22}I_2^2\right),$$

получаем для произвольной слабомагнитной среды:

$$W_{11} = \frac{1}{8\pi}\int \mu H_1^2 dV = \frac{1}{2c^2}L_{11}I_1^2;$$

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \mu \vec{H}_1\vec{H}_2 dV = \frac{1}{c^2}L_{12}I_1I_2. \qquad (4.4.д25)$$

Полученные уравнения (4.4.д25) представляют собой наиболее общее (справедливое и при $\mu \neq const$) определение коэффициентов индукции. Из этого определения следует, что при заданной силе тока коэффициенты индукции можно рассматривать как меру энергии магнитного поля токов.

Вадим Константинович ИВАНОВ

ФИЗИКА. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Учебное пособие

Зав. редакцией физико-математической
литературы *О. Е. Гайнутдинова*
Ответственный редактор *Н. С. Захарова*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Выпускающий *В. А. Иутин*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028 от 14.04.2016 г.,
выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр-кт Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 20.12.24.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная/цифровая. Усл. п. л. 21,45. Тираж 30 экз.

Заказ № 1371-24.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр-кт, д. 42, к. 5.