Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Храмешин Сергей Николаевич
Должность: Научный руководитель
Дата подписания: 19.08.2025 14:47:23
Уникальный программный ключ:
9e604e7f43158d9188ee2ea08e15bab0641b06c9

В. К. ИВАНОВ

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Учебное пособие

ЛАНЬ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2025

УДК 537.8
ББК 22.336я73

И 20 **Иванов В. К.** Физика. Электромагнитные волны : учебное пособие для вузов / В. К. Иванов. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 204 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-507-51540-0

Содержание предлагаемого пособия составляет четвертую часть лекционного курса по общей физике для студентов третьего семестра обучения на физических направлениях подготовки. В курсе рассматриваются как общие свойства электромагнитных волн и их распространение в различных средах, так и традиционные разделы, относящиеся к волновой оптике. Изложение в пособии построено как естественное продолжение современного курса электромагнетизма, рассмотренного в предыдущей части курса общей физики. Последовательность изложения соответствует современным представлениям о логической структуре этого раздела физики. Стартуя с полученной ранее системы уравнений электромагнитного поля, в курсе рассматриваются общие свойства плоских волн и волновых пакетов, источники электромагнитных волн и правила преобразования векторов поля при переходе в различные инерциальные системы отсчета. Более традиционное изложение в пособии проводится при описании явлений интерференции и дифракции, а также при рассмотрении свойств распространения электромагнитных волн в различных средах. При создании учебного пособия использован многолетний опыт чтения общего курса физики на физических факультетах и институтах Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению бакалавриата «Физика», «Техническая физика», «Электроника и наноэлектроника» и «Прикладная математика и физика». Пособие может быть также использовано будущими бакалаврами, обучающимися по другим физическим направлениям, в качестве дополнительного учебного пособия по физике в рамках общетехнических образовательных программ, начинающими преподавателями в системах повышения квалификации.

УДК 537.8
ББК 22.336я73

Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА

© Издательство «Лань», 2025
© В. К. Иванов, 2025
© Издательство «Лань», художественное оформление, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение **6**
1. О курсе «Волновая оптика» 6
2. Система уравнений Максвелла 8
3. Волновое уравнение 10
Глава 1. Электромагнитные волны **13**
1.1. Плоские электромагнитные волны 13
1.1.1. Введение 13
1.1.2. Плоские и гармонические волны 14
1.1.3. Различные формы записи уравнения плоской монохроматической волны 16
1.1.4. Основные свойства плоских электромагнитных волн 18
1.2. Энергия и поток энергии электромагнитного поля 21
1.2.1. Изменение энергии в объеме. Уравнение неразрывности 21
1.2.2. Поток энергии в плоской электромагнитной волне 24
1.2.3. Примеры вычисления потоков электромагнитной энергии 25
1.3. Поток импульса в электромагнитной волне. Давление света 27
1.3.1. Импульс электромагнитного поля 27
1.3.2. Давление электромагнитных волн (света) 28
1.3.3. Опыты П. Н. Лебедева 30
1.4. Суперпозиция электромагнитных волн 31
1.4.1. Простейший случай сложения плоских волн 31
1.4.2. Биения 32
1.4.3. Стоячие волны 33
1.4.4. Эксперименты со стоячими волнами 36
1.5. Поляризация электромагнитных волн 38
1.5.1. О поляризации волн 38
1.5.2. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний 38
1.6. Момент импульса в бегущей плоской электромагнитной волне 42
1.7. Модуляция 45
1.7.1. Модуляция. Модуляция амплитуды 45
1.7.2. Модуляция частоты и фазы 48
1.8. Волновые пакеты. Групповая скорость 49
1.8.1. Волновые пакеты. Формула Рэлея 49
1.8.2. Пример спектрального разложения 51
1.9. Преобразования векторов электромагнитного поля 54
1.9.1. Преобразования компонент электромагнитного поля 54
1.9.2. Электрическое поле движущегося точечного заряда 57
1.9.3. Инварианты электромагнитного поля 59
1.10. Испускание электромагнитных волн 63
1.10.1. Излучение точечного заряда 63

1.10.2. Мощность излучения 68
1.10.3. Излучение электрического диполя 71
Глава 2. Интерференция и дифракция 73
2.1. Интерференция когерентных волн 73
2.1.1. Условия проявления интерференции 73
2.1.2. Оптическая разность хода 76
2.1.3. Интерференция от двух источников 77
2.2. Пространственная и временная когерентность 81
2.2.1. Когерентность 81
2.2.2. Интерференция квазимонохроматического света. Временная когерентность 84
2.2.3. Пространственная когерентность. Роль конечных размеров источников света 87
2.3. Интерференция в тонких пленках 89
2.3.1. Плоскопараллельная пластинка 89
2.3.2. Интерференция на клине 91
2.3.3. Кольца Ньютона 92
2.3.4. Двухлучевые и многолучевые интерферометры 93
2.4. Дифракция Френеля 97
2.4.1. Понятие дифракции. Принцип Гюйгенса — Френеля 97
2.4.2. Метод зон Френеля. Спираль Френеля 101
2.4.3. Дифракция Френеля на прямолинейном крае экрана 106
2.5. Дифракция Фраунгофера 110
2.5.1. Дифракция на прямоугольной щели 110
2.5.2. Дифракция на отверстии 115
2.6. Дифракционная решетка 118
2.6.1. Когерентный вклад *N* источников 118
2.6.2. Дифракционная картина от дифракционной решетки 119
2.6.3. Дифракционная решетка как спектральный прибор 121
2.7. Дифракция рентгеновских лучей 124
2.8. Голография 127
Глава 3. Прохождение и отражение электромагнитных волн 133
3.1. Законы отражения и преломления электромагнитных волн 133
3.1.1. Электромагнитные волны на границе двух сред 133
3.1.2. Законы отражения и преломления 136
3.2. Поляризация при отражении и преломлении электромагнитных волн 137
3.2.1. Еще о поляризации света 137
3.2.2. Формулы Френеля 138
3.2.3. Поляризация при отражении 141
3.2.4. Поляризация при преломлении 143
3.2.5. Фазовые соотношения 145

3.3. Полное внутреннее отражение 148
3.3.1. Прошедшая волна 148
3.3.2. Эксперименты с пройденной волной 150
3.3.3. Отраженная волна 152
3.4. Элементы оптики проводящих сред 154
3.4.1. Телеграфные уравнения 154
3.4.2. Основные особенности решений телеграфных уравнений 156
3.4.3. Пройденная и отраженная волны 158
3.5. Распространение света в кристаллах 161
3.5.1. Двойное лучепреломление 161
3.5.2. Оптические свойства кристаллов 163
3.5.3. Объяснение явления двойного лучепреломления 164
3.5.4. Оптически одноосные кристаллы 167
3.5.5. О построении лучей 169
3.5.6. Поляризаторы и оптические пластинки 172
3.6. Классическая теория дисперсии света 173
3.6.1. Дисперсия 173
3.6.2. Классическая теория дисперсии 174
3.6.3. Нормальная и аномальная дисперсии 178
3.7. Вращение плоскости поляризации 181
3.7.1. Естественная оптическая активность 181
3.7.2. Искусственная оптическая активность 183
3.8. Искусственная анизотропия 185
3.8.1. Фотоупругость 185
3.8.2. Эффект Керра 185
3.8.3. Эффект Коттона — Мутона (1910) 186
3.8.4. Линейный электрооптический эффект Поккельса 186
3.9. Рассеяние света 187
3.9.1. Природа рассеяния 187
3.9.2. Элементарный рассеиватель 189
3.9.3. Рэлеевское рассеяние 191
3.9.4. Угловое распределение рассеянного света 192
3.9.5. Томсоновское поперечное сечение для электрона 194
3.9.6. Рассеяние Ми 195
Приложения 198
Приложение 1. Энергия и поток энергии электромагнитного поля 198
Приложение 2. О временной когерентности 199
Приложение 3. О пространственной когерентности 200

ВВЕДЕНИЕ

1. О курсе «Волновая оптика»

Раздел физики, посвященный электромагнитным волнам, является одним из наиболее важных в курсе физики как с практической, так и с фундаментальной точек зрения. Предлагаемое учебное пособие посвящено краткому изложению основных свойств электромагнитных волн, а также основным процессам и физическим следствиям, возникающим при их взаимодействии с веществом.

Пособие представляет собой четвертую часть лекционного курса общей физики, читаемого студентам 1–2 годов обучения на физических и инженерно-физических направлениях подготовки политехнического университета. Настоящий курс является продолжением трех предыдущих частей курса физики, опубликованных ранее в 2021–2022 гг., а именно: «Механика», «Молекулярная физика» и «Электромагнетизм». Физическое содержание и изложение в этом пособии по электромагнитным волнам опирается на пройденный ранее материал с указанием соответствующих ссылок на предыдущие части курса.

Цель настоящего пособия — применение уравнений электромагнитного поля (системы уравнений Максвелла, полученной ранее в курсе «Электромагнетизм») для описания практических явлений, возникающих при распространении электромагнитных волн в пространстве и во времени.

Пособие состоит из трех глав. В первой главе содержится изложение общих свойств электромагнитных волн. Рассматриваются такие физические величины, характеризующие распространение волн, как энергия и поток энергии, поток импульса и момента импульса, поляризация, а также следствия, возникающие при суперпозиции электромагнитных волн.

В последующих главах, в основном на примере волн оптического диапазона, рассматриваются явления, связанные со сложением электромагнитных волн. Подробно обсуждаются условия наблюдения интерференции и дифракции, приводятся основные эксперименты, в которых эти явления применяются для прецизионных измерений в физике. Последняя глава пособия посвящена процессам прохождения и отражения электромагнитных волн в различных средах. Определенное внимание уделяется явлениям поляризации и дисперсии световых волн при их распространении в анизотропных средах.

Пособие подготовлено с учетом методических разработок кафедры экспериментальной физики политехнического университета (СПбПУ). Основные идеи и содержание обновленного курса общей физики широко обсуждались на научно-методических семинарах под руководством профессоров кафедры

экспериментальной физики. Результатом этих обсуждений являлось опубликование в 2003 г. учебного пособия по курсу физики под авторством коллектива профессоров кафедры И. П. Ипатовой, В. Ф. Мастерова, Ю. И. Уханова. Основная идея авторов курса состояла в том, что школьники уже освоили в школе курс элементарной физики и достаточно хорошо подготовлены к восприятию дедуктивного изложения материала. Стартуя с системы уравнений, описывающих электромагнитное поле и являющихся обобщением опытных фактов, в последующем авторы рассматривали физические следствия, вытекающие из постулируемой системы уравнений. Однако, как показывает опыт преподавания на тех же физических направлениях подготовки, большая часть студентов легче воспринимала материал при последовательном переходе от основных экспериментальных законов к их обобщению и дальнейшему представлению их в виде системы уравнений электромагнитного поля.

Настоящее учебное пособие по электромагнетизму построено ближе к традиционному изложению этого раздела курса физики на лекциях и практических занятиях. Далее во введении приводятся классические уравнения электромагнитного поля как результат изучения предыдущей части курса электромагнетизма. В дальнейшем изложении эти уравнения применяются для описания распространения электромагнитных волн в различных средах.

Пособие отражает совокупность основных тем и вопросов, которые излагаются на лекциях и проходятся на практических занятиях. Оно построено в рамках утвержденной программы по общей физики для студентов Санкт-Петербургского политехнического университета. В пособии не рассматриваются многие практические приложения, связанные с применением электромагнитных волн. В этом смысле пособие не является полноценным в курсе электромагнетизма в отличие от известных книг и учебников в прилагаемой ниже литературе. Следует также отметить, что многие рассуждения и стиль изложения ряда вопросов в данном пособии могут быть аналогичны их рассмотрению в указанной учебной литературе.

Предлагаемая литература к разделу «Электромагнитные волны»

1. Матвеев А. Н. Оптика. — М. : Высшая школа, 1985.

2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. — М. : Наука ; Физматлит, 1980. — Том 4 : Оптика.

3. Иродов И. Е. Основные законы электромагнетизма. — М. : Высшая школа, 1991.

4. Калитеевский Н. И. Волновая оптика. — М. : Высшая школа, 1978.

5. Ипатова И. П. Курс физики / И. П. Ипатова, В. Ф. Мастеров, Ю. И. Уханов. — СПб. : Издательство СПбГПУ, 2003. — Том 2 : Электромагнитные явления.

6. Савельев И. В. Курс общей физики. — СПб. : Лань, 2005. — Том 2.

7. Ландсберг Г. С. Оптика. — М. : Наука, 1970.

8. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М. : Наука, 1970.

Кроме того, поскольку настоящий курс лекций является продолжением пройденного студентами ранее материала по физике, то в тексте часто указываются ссылки на лекции, опубликованные в предыдущих пособиях автора по курсам «Механика» [1], «Молекулярная физика» [2] и «Электромагнетизм» [3].

1. Иванов В. К. Физика. Механика. — СПб. : Политех-Пресс, 2021.

2. Иванов В. К. Физика. Молекулярная физика. — СПб. : Политех-Пресс, 2021.

3. Иванов В. К. Электромагнетизм. — СПб. : Политех-Пресс, 2022.

В пособии используется Гауссова система единиц как наиболее естественная система, принимаемая в общем курсе физики. Однако автор считает, что будущие физики должны ориентироваться в различных системах единиц и успешно переходить из одной системы единиц в другую, поэтому в пособии все формулы дублируются в международной системе единиц СИ. Это также полезно с той точки зрения, что система единиц СИ используется в большинстве задачников и основных учебников по физике.

Автор пособия признателен преподавателям и сотрудникам кафедры экспериментальной физики СПбПУ за обсуждение содержания и критику этого курса, что способствовало его формированию.

2. Система уравнений Максвелла

Классическая теория электромагнитных явлений основана на *уравнениях Максвелла*, являющихся обобщением опытных фактов. Они образуют систему уравнений, которая связывает воедино основные электромагнитные величины и описывает все наблюдаемые классические электромагнитные явления. Последовательное получение этих уравнений и их физическое содержание подробно раскрывалось в предыдущей части курса физики (см. «Электромагнетизм» [3]), однако для удобства их применения в этой части курса полная система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме приводится далее в таблице В1. При изложении явлений, связанных с распространением электромагнитных волн в вакууме и в различных средах, мы будем ссылаться на приведенные уравнения.

Запишем уравнения электромагнитного поля в интегральной (табл. В1) и дифференциальной (табл. В2) формах в двух системах единиц, которые наиболее широко используются в физике электромагнитных явлений:

1) *СГС* (*CGS*) (или далее система единиц Гаусса);

2) международная *СИ* (*SI*) система единиц.

Таблица B1

Уравнения Максвелла в интегральной форме

CGS	SI	№
$\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \vec{j}d\vec{S} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{D}d\vec{S}$	$\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \int\limits_S \vec{j}d\vec{S} + \frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{D}d\vec{S}$	(1)
$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{B}d\vec{S}$	$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{B}d\vec{S}$	(2)
$\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0$	$\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0$	(3)
$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi q$	$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = q$	(4)

Таблица B2

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

CGS	SI	№
$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	(5)
$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	(6)
$div\vec{B} = 0$	$div\vec{B} = 0$	(7)
$div\vec{D} = 4\pi\rho$	$div\vec{D} = \rho$	(8)

Напомним обозначения, используемые в уравнениях (1)–(4). Эти же обозначения применялись в предыдущей части курса электромагнетизма [3].

Для электрических величин:

q — электрический заряд;
ρ — объемная плотность электрического заряда;
$\vec{E}$ и $\vec{D}$ — векторы напряженности и индукции электрического поля соответственно;
$\vec{j}$ — вектор плотности электрического тока.

Для магнитных величин:

$\vec{B}$ и $\vec{H}$ — векторы индукции и напряженности магнитного поля соответственно.

Кроме того, c — скорость света; а производные d/dt берутся по времени.

Интегралы в (1)–(2) от скалярного произведения векторной величины поля и вектора элемента контура $d\vec{l}$ берутся по замкнутому контуру L и носят

название *циркуляции* этого вектора. В правой части этих уравнений интегралы от скалярного произведения векторов поля и вектора элемента поверхности $d\vec{S}$ берутся по поверхности *S*, опирающейся на контур *L*. Такие интегралы называются *потоком вектора* через эту поверхность. Таким образом, циркуляция вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля (1) определяется двумя слагаемыми: потоком вектора $\vec{j}$ через поверхность *S* (т. е. полным током) и скоростью изменения потока вектора индукции $\vec{D}$ через ту же поверхность *S*. Циркуляция вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ по замкнутому контуру (2) (работа электрического поля) определяется скоростью изменения потока вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через поверхность *S*, опирающуюся на контур *L*.

Интегралы в (3)–(4) от скалярного произведения векторов $\vec{B}$ и $\vec{D}$ и элемента поверхности $d\vec{S}$ берутся по замкнутой поверхности *S*: они определяют *поток векторов* $\vec{B}$ и $\vec{D}$ через эту поверхность. Уравнение (3) свидетельствует о том, что источников магнитного поля в виде магнитных зарядов (монополей) не существует (в классической электродинамике). Источником же электрических полей (4) являются электрические заряды *q*.

Интегральные уравнения электромагнитного поля описывают общие свойства электрических и магнитных величин. Однако для решения конкретных задач необходимы знания электромагнитных величин в каждой точке рассматриваемого пространства, иначе говоря, дифференциальные характеристики поля. Соответствующие интегральным уравнениям (1)–(4) дифференциальные уравнения (5)–(8) записываются с помощью дифференциальных операторов *rot* и *div*.

Напомним также еще несколько основных фактов, касающихся области применения системы уравнений электромагнитного поля.

1. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца, поэтому они справедливы и в области релятивистских скоростей.

2. Квантовый характер электромагнитных сил не сказывается на расстояниях вплоть до 10^{-10} см (примерно в 100 раз меньше размера атома). Для меньших расстояний необходимо использовать уравнения квантовой электродинамики.

3. Волновое уравнение

Настоящий курс посвещен основным свойствам электромагнитных волн, поэтому кратко напомним, как получается уравнение, описывающее их распространение в вакууме и простейших средах.

Рассмотрим непроводящую, изотропную и однородную среду, характеризуемую диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Пусть в этой среде отсутствуют свободные заряды и токи проводимости, т. е.

имеем $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$. Тогда, если в рассматриваемой области нет ферромагнетиков, можно записать стандартные уравнения для полей в среде:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}\,. \tag{9}$$

Система уравнений Максвелла (5)–(8) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ div\vec{D} = 0, \qquad\qquad div\vec{B} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Продифференцируем первое уравнение из (10) по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H} = rot\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\,. \tag{11}$$

Применяя операцию rot ко второму уравнению системы (10) и подставляя результат (11), полученный из первого уравнения, находим:

$$rot\left(rot\vec{E}\right) = -\frac{\mu}{c} rot\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\,.$$

Из векторного анализа вспомним правило «БАЦ-ЦАБ», тогда имеем

$$rot\left(rot\vec{E}\right) = \left[\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}, \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = grad\left(div\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}\,,$$

где оператор Лапласа равен как обычно сумме вторых частных производных.

И так как $grad\left(div\vec{E}\right) = 0$ из-за условия $div\vec{D} = 0$, получаем

$$rot\left(rot\vec{E}\right) = -\Delta\vec{E}. \tag{12}$$

Таким образом, окончательно для вектора напряженности электрического поля имеем:

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0\,. \tag{13}$$

Аналогично для $\vec{H}$ или $\vec{B}$ получаем

$$\Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0\,. \tag{14}$$

Именно получением этих уравнений, называемых *волновыми уравнениями*, закончился предыдущий курс, посвященный электромагнетизму (§ 4.8, гл. 4 [3]). Полученные уравнения описывают распространение электромагнитных колебаний в среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ.

Еще ранее в курсе классической механики мы также встречались с такими уранениями при изучении распространения колебаний (§ 4.7, гл. 4 [1]). В общем случае уравнение вида

$$\Delta\Phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (15)$$

называется *волновым уравнением*. Здесь в качестве функции $\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$ могут быть функции векторных полей $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}$ и их проекций.

Глава 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1.1. Плоские электромагнитные волны

1.1.1. Введение

Существование электромагнитных волн было предсказано Дж. Максвеллом в 1862–1864 гг. как прямое следствие уравнений электромагнитного поля. Экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн было впервые получено Г. Герцем в 1888 г. После опытов, проведенных Г. Герцем, получает признание гипотеза об электромагнитной волновой природе света.

Представление о свете существенно изменялось со временем по мере накопления экспериментальных данных и возможности их описания, а также по мере развития других физических представлений. Какова природа света — волновая или корпускулярная? Этот вопрос занимал мыслителей и исследователей в течение нескольких столетий. И. Ньютон отдавал предпочтение корпускулярной теории, Р. Декарт, Х. Гюйгенс — волновой теории.

С начала XIX в. представление о природе света стало складываться в пользу волновой теории в связи с открытием явлений интерференции и дифракции. Наибольший вклад в исследовании волновых свойств света внесли Т. Юнг, Ж. Френель. Подтверждением волновой теории послужили также опыты по поляризации света, в частности, по вращению плоскости поляризации, а также факт совпадения скорости света c с электродинамической постоянной.

Итак, световые колебания тождественны колебаниям электромагнитного поля, поэтому оптика рассматривается как раздел учения об электромагнитных явлениях, описываемых системой уравнений Максвелла.

Однако в начале XX в. появилась необходимость выхода за рамки классических волновых представлений. Этому способствовали исследования излучения абсолютно черного тела, которые привели к введению понятия квантов энергии. Это понятие ввел в теорию излучения М. Планк при описании спектра излучения абсолютно черных тел. Затем эксперименты по фотоэффекту, опыты А. Комптона и другие исследования показали невозможность их объяснения с классической волновой точки зрения. Для объяснения новых экспериментов стало необходимым ввести и учитывать корпускулярные свойства электромагнитных волн. Было введено понятие частиц света — *фотонов*, обладающих энергией, импульсом, моментом импульса.

Современное представление о фотоне как о кванте электромагнитного поля основывается на том, что фотон в процессах взаимодействия с веществом проявляет свойства и волны и частицы. Об этом свойстве фотона проявлять

при одних условиях свойства электромагнитных волн, а при других — свойства классических частиц, физики говорят как о «*дуализме волны и частицы*». Такое представление происходит из-за нашей попытки понять микрообъекты с помощью понятий макромира. Поэтому правильнее сказать, что внутренняя природа фотонов просто такова, что в зависимости от условий проведения эксперимента проявляются или волновые, или корпускулярные свойства электромагнитных волн.

Электромагнитные волны (фотоны) имеют различные длины волн, фактически простирающиеся от бесконечности до нуля. В физике вводится в рассмотрение шкала электромагнитных волн, в рамках которой волны классифицируются по длинам волн или по частоте. В зависимости от длины волны электромагнитные волны носят различные названия: радиоволны, инфракрасный и видимый свет, ультрафиолетовое и рентгеновское излучение, гамма-кванты. Всех их объединяют общие свойства, к описанию которых мы переходим в этом курсе.

Примечание 1. *Исаак Ньютон, великий английский физик, 1643–1727,* создатель классической механики.
Рене Декарт, французский математик и естествоиспытатель, 1596–1650.
Христиан Гюйгенс, голландский физик, 1629–1695.
Томас Юнг, английский ученый, 1773–1829.
Огюстен Жан Френель, французский физик, 1788–1827.
Джеймс Клерк Максвелл, великий английский физик, 1831–1879; создатель системы уравнений электромагнитного поля.
Генрих Рудольф Герц, немецкий физик, 1857–1894.
Макс Карл Эрнст Людвиг Планк, немецкий физик-теоретик, 1858–1947, Нобелевская премия 1918 г. за вывод теоретического закона излучения.
Артур Холли Комптон, американский физик, 1892–1962, Нобелевская премия 1927 г. за открытие явления изменения длины волны рентгеновского излучения вследствие его рассеяния электронами вещества.

1.1.2. Плоские и гармонические волны

Пусть имеем неограниченную однородную среду, характеризуемую диэлектрической постоянной ε и магнитной проницаемостью μ. Будем считать, что в рассматриваемой среде выполняются следующие условия:

1) поглощение равно 0, т. е. в среде нет проводимости $\sigma = 0$; следовательно, нет потери на джоулево тепло, поскольку в этом случае ток проводимости отсутствует, $\vec{j} = 0$;
2) объемная плотность сторонних зарядов равна нулю, $\rho = 0$.

Тогда из системы уравнений Максвелла (см. пункт 3 во введении или §§ 4.7, 4.8 курса «Электромагнетизм» [3]) получаем *волновые уравнения* для векторов напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей:

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.1.1}$$

Пусть векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для простоты зависят только от одной координаты x и времени t, тогда волновые уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.1.2}$$

Общим решением этих уравнений являются векторные функции, зависящие от аргумента ($x \pm vt$): $\vec{E} = \vec{E}(x \pm vt)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x \pm vt)$, где v — скорость электромагнитной волны в среде:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{1.1.3}$$

Значение функции $\vec{E}$ (и $\vec{H}$) для фиксированных значений координаты x и времени t является постоянным на плоскости, перпендикулярной к оси x. Поэтому такие волны, описываемые функциями $E = E(x \pm vt)$ и $H = H(x \pm vt)$, называются *плоскими*.

Волна называется *монохроматической* (одноцветной), если поле волны в каждой точке пространства является *гармонической* (синусоидальной, косинусоидальной) функцией времени. Монохроматическая волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x, описывается уравнениями:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]; \qquad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \tag{1.1.4}$$

где $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ — амплитуды волны; ω — частота электромагнитных колебаний или круговая частота. Вводя обозначение

$$k = \frac{\omega}{v}, \tag{1.1.5}$$

где k — волновое число ($k = 2\pi/\lambda$, т. е. k равно числу волн, укладывающихся на отрезке длиной 2π — отсюда следует его название), *уравнение монохроматической волны* можем записать в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$$

или

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \tag{1.1.6}$$

Аргумент косинуса

$$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$$

называется *фазой волны*, где φ_0 — начальная фаза.

Если зафиксировать момент времени t, то получаем синусоидальное распределение полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в пространстве (вдоль оси x) в данный момент времени (см. рис. 1.1*а*). Если зафиксируем значение координаты x, то получим синусоидальное распределение полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в зависимости от времени (рис. 1.1*б*) — гармонические колебания с частотой ω.

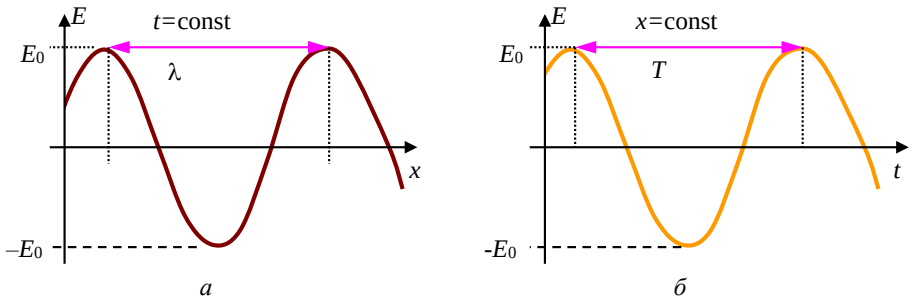


Рис. 1.1

Период изменения напряженности поля в пространстве — это *длина волны* λ, величину которой можно записать в виде

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = v\frac{2\pi}{\omega} = vT, \qquad (1.1.7)$$

т. е. длина волны λ — это расстояние, на которое перемещается плоскость постоянной фазы за время, равное одному *периоду колебаний*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}. \qquad (1.1.8)$$

Здесь ν в отличие от круговой частоты ω — обычная частота $\nu = \omega/2\pi$, определяемая как количество колебаний в единицу времени (греческий символ «ню» — не путать со скоростью распространения фазы волны v!!).

1.1.3. Различные формы записи уравнения плоской монохроматической волны

Описать плоскую монохроматическую волну можно иначе, используя общий подход к определению направления ее распространения. Пусть распространяется волна в произвольном направлении, определяемом единичным вектором $\vec{n}$, перпендикулярным к плоскости волны, т. е. плоскости постоянной фазы $\omega t - kx = const$. Тогда можно записать $kx = \vec{k}\vec{r}$, если $\vec{k} = k\vec{n}$. Вектор, направленный в сторону распространения волны,

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{n}, \qquad (1.1.9)$$

называется *волновым вектором*. Теперь, записывая $kx = \vec{k}\vec{r}$ и абстрагируясь от системы координат, получаем

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right); \qquad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right). \qquad (1.1.10)$$

Эти уравнения описывают плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в направлении волнового вектора $\vec{k}$.

Часто зависимость векторов электромагнитного поля от координат и времени удобно записывать в комплексной форме. Используем для перехода к комплексной форме записи формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (1.1.11)$$

Тогда общее решение волнового уравнения для плоской монохроматической волны можно представить в виде:

$$\vec{E} = Re\left[\vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}\right] \quad \text{и} \quad \vec{H} = Re\left[\vec{H}_0 e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}\right]. \qquad (1.1.12)$$

Знак реальной части «Re» мы, как это принято, в дальнейшем будем опускать, не забывая при этом, что физический смысл имеет лишь вещественная часть используемых комплексных выражений:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} \quad \text{и} \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}. \qquad (1.1.13)$$

Амплитуды $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ в общем случае являются комплексными величинами и могут быть представлены как

$$E_0 = \left|\vec{E}_0\right| e^{i\varphi_0}, \qquad (1.1.14)$$

где модуль $\left|\vec{E}_0\right|$ равен амплитуде колебаний, а аргумент φ_0 — начальной фазе колебаний в точке $\vec{r} = 0$. Аналогичным образом может быть записана комплексная амплитуда колебаний магнитного поля $\vec{H}_0$.

Комплексная запись особенно удобна, как мы увидим далее, при применении к векторам $\vec{E}$ и $\vec{H}$ дифференциальных операторов.

Резюмируя сказанное, отметим, что *из уравнений Максвелла следует вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно, т. е. отдельно от электрических зарядов и токов. Изменение состояния электромагнитного поля носит волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами.*

Любая электромагнитная волна (гармоническая волна или электромагнитное возмущение произвольной формы) характеризуется общими свойствами, которые рассмотрим ниже.

1.1.4. Основные свойства плоских электромагнитных волн

1. ***Поперечность***. Запишем уравнения плоских монохроматических волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, exp\left[-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right], \qquad \vec{H} = \vec{H}_0\, exp\left[-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right] \tag{1.1.15}$$

и подставим их в уравнения системы уравнений Максвелла. Сначала подставим в первое уравнение системы уравнений (10):

$$rot\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{1.1.16}$$

Для упрощения дальнейших вычислений заметим, что дифференцирование по времени векторов плоской волны сводится к умножению их на множитель $-i\omega$, а дифференцирование по координате — к умножению на множители ik_x, ik_y, ik_z, соответственно. Тогда имеем

$$rot\vec{H} = \left[\vec{\nabla}, \vec{H}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = i\left[\vec{k}, \vec{H}\right]; \tag{1.1.17}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = -i\omega\vec{E}. \tag{1.1.18}$$

Таким образом, подставляя последние полученные выражения в уравнение системы Максвелла (1.1.16), получаем соотношение

$$\left[\vec{k}, \vec{H}\right] = -\frac{\varepsilon\omega}{c}\vec{E}. \tag{1.1.19}$$

Подставив (1.1.15) во второе уравнение системы (10):

$$rot\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{1.1.20}$$

таким же способом преобразуем его к следующему виду:

$$\left[\vec{k}, \vec{E}\right] = \frac{\mu\omega}{c}\vec{H}. \tag{1.1.21}$$

Или можно последние два уравнения (1.1.19) и (1.1.21) переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left[\vec{k}, \vec{H}\right] &= -\frac{\omega}{c}\vec{D} \\ \left[\vec{k}, \vec{E}\right] &= \frac{\omega}{c}\vec{B} \end{aligned}. \tag{1.1.22}$$

Полученные уравнения справедливы для любых плоских волн. Отсюда следует, что в плоской электромагнитной волне вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$, вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и волновой вектор $\vec{k}$ *взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему* (рис. 1.2). Из перпендикулярности векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ к волновому вектору $\vec{k}$ (к вектору скорости волны $\vec{v}$), т. е. направлению распространения волны, следует, что *электромагнитные волны — поперечные*.

Это свойство следует также из двух других уравнений системы (10) $div\vec{D}=0$ и $div\vec{B}=0$, которые подстановкой (1.1.15) преобразуются к виду, соответственно:

$$(\vec{k},\vec{D})=0,\qquad (\vec{k},\vec{B})=0. \tag{1.1.23}$$

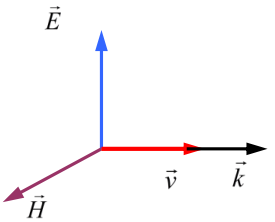


Рис. 1.2

То есть вектор $\vec{k}$ перпендикулярен векторам $\vec{D}$ и $\vec{B}$. Свойство поперечности справедливо для любых плоских электромагнитных волн.

2. ***Синфазность***. Перепишем уравнения (1.1.19) и (1.1.21), учитывая, что волновой вектор и скорость волны равны $k=\omega/v$ и $v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, в следующем виде:

$$\vec{E}=-\frac{c}{\varepsilon\omega}\left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\frac{1}{k}\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\varepsilon}\left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\vec{k},\vec{H}\right]; \tag{1.1.24}$$

$$\vec{H}=\frac{c}{\mu\omega}\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\vec{k},\vec{E}\right]. \tag{1.1.25}$$

Поскольку векторы $\vec{E},\vec{H}$ и $\vec{k}$ взаимно перпендикулярны, то можно взять соотношения (1.1.24) или (1.1.25) по модулю, и тогда получаем следующее равенство модулей:

$$\sqrt{\mu}H=\sqrt{\varepsilon}E\,. \tag{1.1.26}$$

Таким образом, отношение численных значений векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ пропорционально корню из отношения проницаемостей и, следовательно, от времени не зависит, следовательно, эти *векторы имеют одинаковые фазы и изменяются синхронно*.

На рисунке 1.3 показано это свойство синфазности векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, при этом между мгновенными значениями E и H в любой точке существует определенная связь:

$$E=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H=\frac{v}{c}B\,.$$

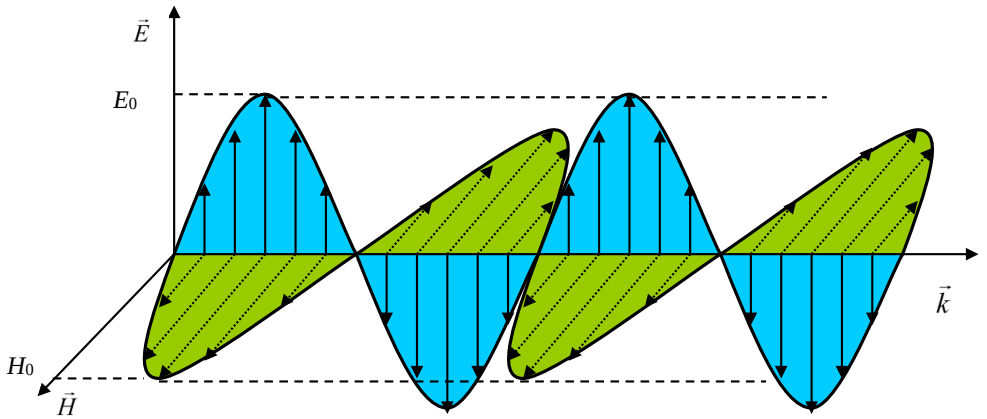


Рис. 1.3

3. ***Фазовая скорость*** — скорость распространения одинаковой фазы (см. уравнение (1.1.3) или ранее (4.8.11) в [3]). Выразим из уравнения (1.1.21) $\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\mu\omega\vec{H}/c$ вектор $\vec{H}$ и подставим в уравнение (1.1.19) $\left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\varepsilon\omega\vec{E}/c$. При этом получаем

$$\left[\vec{k}\left[\vec{k},\vec{E}\right]\right]=-\varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}. \qquad (1.1.27)$$

Расписывая двойное векторное произведение по правилу $\left[\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, имеем

$$\left[\vec{k}\left[\vec{k},\vec{E}\right]\right]=\vec{k}\left(\vec{k},\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\vec{k},\vec{k}\right)=-k^2\vec{E},$$

так как $\left(\vec{k},\vec{E}\right)=0$ из-за перпендикулярности векторов $\vec{k}\perp\vec{E}$. Получаем следующее соотношение:

$$k^2\vec{E}=\varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E},$$

откуда получаем скорость распространения одинаковой фазы:

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu}=\frac{\omega^2}{k^2}=v^2 \qquad \text{и} \qquad v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (1.1.28)$$

Опять получаем фазовую скорость, т. е. скорость распространения колебаний одинаковой фазы, которая уже появлялась выше (см. (1.1.3)).

В вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) скорость распространения электромагнитного поля численно равняется *электродинамической постоянной*, определяющей силу взаимодействия токов и имеющей размерность скорости. Значение электроди-

намической постоянной, найденное опытным путем, в пределах ошибок эксперимента равно скорости света в вакууме. Численное совпадение этих величин является доказательством как электромагнитной природы света, так и справедливости уравнений Максвелла, по крайней мере в применении их к вакууму.

Отметим, что в признании конечности скорости распространения электромагнитного поля заключается основное отличие фактического содержания теорий близкодействия и, прежде всего теории Максвелла, от теорий мгновенного дальнодействия начала прошлого столетия.

4. ***Поляризация***. Если в электромагнитной волне поведение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в пространстве и времени подчиняется определенному закону, то такую волну называют *поляризованной*. Если направить ось z системы координат вдоль волнового вектора $\vec{k}$, то вследствие поперечности электромагнитных волн векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будут иметь отличные от нуля проекции только на оси x и y.

Уравнения Максвелла допускают, в частности, такое решение, когда каждый из векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ совершает колебания только вдоль одной из взаимно перпендикулярных осей. Тогда говорят, что волна имеет *линейную*, или *плоскую поляризацию*. Плоскость, в которой лежит вектор напряженности электрического поля волны $\vec{E}$ и волновой вектор $\vec{k}$, называют *плоскостью поляризации* или *плоскостью колебаний*.

Линейной поляризацией не исчерпываются виды поляризации электромагнитных волн. О других видах поляризации разговор пойдет ниже.

1.2. Энергия и поток энергии электромагнитного поля

1.2.1. Изменение энергии в объеме. Уравнение неразрывности

Энергия электрического и магнитного полей нами уже определялась в разделе «Электромагнетизм» следующими соотношениями (§§ 2.6 и 4.4 [3]):

$$\begin{aligned} W_{эл} &= \frac{1}{8\pi}\int \vec{E}\vec{D}dV \\ W_{магн} &= \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV \end{aligned} \quad \text{или более общими} \quad \begin{aligned} W_{эл} &= \frac{1}{4\pi}\iint \vec{E}d\vec{D}dV \\ W_{магн} &= \frac{1}{4\pi}\iint \vec{H}d\vec{B}dV \end{aligned}. \qquad (1.2.1)$$

Под воздействием электрических и магнитных сил может совершаться работа. Поэтому, записывая закон сохранения энергии для электромагнитного поля, необходимо включать и эту работу тоже.

Пусть среда, в которой возбуждаются электромагнитное поле и токи, неподвижна. Тогда в единице объема возбуждается энергия за счет работы внешних сил — энергия электромагнитного поля и энергия тока:

$$\delta A = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}d\vec{B} + \vec{E}d\vec{D}\right) + \left(\vec{j},\vec{E}\right)dt\,. \qquad (1.2.2)$$

Последнее слагаемое в (1.2.2) описывает выделяющееся джоулево тепло:

$$\delta Q/dV = \sigma E^2 dt = \vec{j}\vec{E}dt\,.$$

Считаем для простоты, что других превращений энергии в этом объеме нет. Эта работа δA идет на приращение внутренней энергии за вычетом тепла, уходящего из единицы объема среды вследствие теплопроводности. Если теплопроводность равна 0, то весь запас внутренней энергии пополняется работой δA.

Пусть u — внутренняя энергия единицы объема. Тогда ее приращение равно работе внешних сил:

$$\delta A = du = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}d\vec{D} + \vec{H}d\vec{B}\right) + \vec{j}\vec{E}dt\,.$$

Или, разделив на временной интервал dt, получаем приращение внутренней энергии в дифференциальной форме и интегральной (для конечного объема V) форме, соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) + \vec{j}\vec{E}\,; \qquad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V u dV = \frac{1}{4\pi}\int_V\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)dV + \int_V \vec{j}\vec{E}dV\,. \qquad (1.2.4)$$

Под u понимается плотность всей внутренней энергии, а не только ее электромагнитная часть. Поэтому уравнение (1.2.3) справедливо для любых сред, в том числе ферромагнитных и сегнетоэлектрических. Оно учитывает не только джоулево тепло ($\vec{j},\vec{E}$), но и тепло ферромагнитного и диэлектрического гистерезиса. Преобразуем (1.2.3), вспомнив уравнения Максвелла:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} = rot\vec{H} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot\vec{E}\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(\vec{E},\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right) + \frac{1}{4\pi}\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E},rot\vec{H}\right) - \frac{c}{4\pi}\left(\vec{H},rot\vec{E}\right).$$

Далее, используя векторное тождество $\vec{E}rot\vec{H} - \vec{H}rot\vec{E} = -div\left[\vec{E},\vec{H}\right]$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{4\pi}div\left[\vec{E},\vec{H}\right] = 0\,. \qquad (1.2.5)$$

Введем новый вектор:

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right], \qquad (1.2.6)$$

тогда уравнение (1.2.5) записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div\vec{S} = 0. \qquad (1.2.7)$$

В итоге получили уравнение (1.2.7) называемое *уравнением неразрывности*, которое описывает *закон сохранения энергии*. Ранее в курсе физики мы уже встречались с подобными уравнениями неразрывности, так, например, закон сохранения плотности вероятности, или закон сохранения заряда: $\partial\rho/\partial t + div\vec{j} = 0$ (см § 3.1 в [3]).

По аналогии с другими законами сохранения заключаем, что поскольку в уравнении (1.2.7) имеем изменение плотности энергии во времени $\partial u/\partial t$, то введенный вектор $\vec{S}$ играет роль *плотности потока электромагнитной энергии*. Смысл уравнения (1.2.7) становится более понятным, если записать его в интегральной форме. Пользуясь (1.2.4) и (1.2.6), получаем

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \int_V div\vec{S}dV = \frac{\partial U}{\partial t} + \oint \vec{S}d\vec{s} = 0. \qquad (1.2.8)$$

То есть приращение внутренней энергии в объеме V происходит за счет электромагнитной энергии, «втекающей» в этот объем из окружающего пространства через поверхность **s**, ограничивающую этот объем.

Вектор плотности потока электромагнитной энергии $\vec{S}$ называется *вектором Пойнтинга*. Иногда его называют *вектором Умова — Пойнтинга*. Н. А. Умов ввел понятие плотности потока энергии для упругих сред и вязких жидкостей в 1874 г. Дж. Пойнтинг ввел вектор $\vec{S}$ для электромагнитного поля в 1885 г. Размерность вектора Пойнтинга: $[\vec{S}]$ = энергия/время·площадь.

В системе СИ его размерность: $[\vec{S}] = \frac{Дж}{м^2 с}$.

В системе единиц Гаусса: $[\vec{S}] = \frac{Эрг}{см^2 с}$.

Отметим, что выражение $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E},\vec{H}]$ отличается большой общностью, так как вектор Пойнтинга выражается только через напряженности электрического $\vec{E}$ и $\vec{H}$ магнитного полей и не содержит никаких величин, характеризующих индивидуальные свойства среды, в которой распространяется электромагнитная энергия.

Примечание 1. Различные выражения закона сохранения энергии.

1. Если теплопроводность отлична от 0, то к потоку электромагнитной энергии добавится плотность потока тепла.

2. Электромагнитная часть энергии определяется соотношением $dW = \int\limits_V dwdV$, где приращение плотности электромагнитной энергии равно $dw = 1/4\pi\left(\vec{E}d\vec{D} + \vec{H}d\vec{B}\right)$. Тогда, разделяя полную энергию U на электромагнитную энергию W и джоулево тепло $Pdt = \sigma E^2 dt = \vec{j}\vec{E}dt$, можно записать выражение для мощности P, выделяемой в объеме V из-за токов проводимости:

$$P = -\frac{\partial W}{\partial t} - \oint\limits_s \vec{S}d\vec{s}\,. \qquad (1.2.9)$$

Эта мощность равна уменьшению энергии электромагнитного поля и потоку энергии через поверхность объема. Если энергия электромагнитного поля не изменяется во времени (стационарный случай), то мощность равна нулю $\partial W/\partial t = 0$ и вся производимая работа в замкнутом объеме совершается за счет энергии электромагнитного поля, проникающую через поверхность, ограничивающую объем.

3. Если рассматриваем вакуум или диэлектрик, то плотность тока проводимости $\vec{j} = 0$ и мощность выделяемого джоулева тепла $P = 0$ и в закон сохранения энергии входят только электромагнитные величины:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \oint\limits_s \vec{S}d\vec{s} = 0\,. \qquad (1.2.10)$$

4. Альтернативный вывод уравнения неразрывности (1.2.7) приведен в Приложении 1.

Примечание 2. *Джон Генри Пойнтинг, английский физик, 1852–1914.*
Николай Алексеевич Умов, русский физик, 1846–1915.

1.2.2. Поток энергии в плоской электромагнитной волне

Итак, плотность потока электромагнитной энергии задается вектором Пойнтинга $\vec{S}$ (1.2.6). Ранее для вектора напряженности магнитного поля в плоской электромагнитной волне мы получили (см. § 1.1, формула (1.1.21)):

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu\omega}\left[\vec{k},\vec{E}\right].$$

Подставим $\vec{H}$ в выражение для вектора Пойнтинга и, вспоминая свойство поперечности электромагнитной волны $\left(\vec{k},\vec{E}\right) = 0$, а также связь между модулями векторов напряженности электрического и магнитного поля в этой волне $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$ (1.1.26), получим

$$\vec{S} = \frac{c^2}{4\pi\mu\omega}\left[\vec{E}\left[\vec{k},\vec{E}\right]\right] = \frac{c^2}{4\pi\mu\omega}\left(\vec{k}E^2 - \vec{E}\cancelto{0}{\left(\vec{k},\vec{E}\right)}\right) = \frac{c^2}{4\pi}\frac{E^2}{\mu}\frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{c^2}{4\pi}\frac{H^2}{\varepsilon}\frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{c^2}{4\pi}\frac{EH}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\vec{k}}{\omega}.$$

Плотность энергии в электромагнитной волне, распространяющейся в однородной и изотропной среде, равна

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right). \qquad (1.2.11)$$

И с учетом равенства (1.1.26) для модулей $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$, получаем для плотности энергии поля:

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi}. \qquad (1.2.12)$$

Тогда можно записать вектор Пойнтинга в следующем виде (учитывая, что фазовая скорость $\omega/|\vec{k}| = v$):

$$\vec{S} = \frac{c^2}{4\pi}\frac{E^2}{\mu\omega}\vec{k} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu\omega}w\vec{k} = \frac{v^2}{\omega}w\vec{k} = w\vec{v}. \qquad (1.2.13)$$

Плотность потока энергии равна объемной плотности энергии, умноженной на вектор скорости ее распространения:

$$\vec{S} = w\vec{v}. \qquad (1.2.14)$$

Интерпретация этого важного соотношения, таким образом, довольно проста: *электромагнитная волна переносит энергию в направлении своего распространения.*

1.2.3. Примеры вычисления потоков электромагнитной энергии

1. *Выделение джоулева тепла в проводнике*.

Пусть по цилиндрическому проводнику радиусом r течет постоянный ток: $I = \pi r^2 j$ (j — плотность тока). Из теоремы о циркуляции $H \cdot 2\pi r = 4\pi/c \cdot \pi r^2 j$ получаем, что магнитное поле тока на поверхности проводника равно

$$H = \frac{2I}{cr} = \frac{2\pi jr}{c}, \qquad (1.2.15)$$

а его силовые линии представляют собой концентрические окружности вокруг оси проводника. Электрическое поле $\vec{E}$ параллельно оси провода (рис. 1.4). Поэтому вектор Пойнтинга $\vec{S}$ направлен внутрь проводника нормально к его боковой поверхности. Таким образом электромагнитная энергия «втекает» из окружающего пространства через боковую поверхность внутрь проводника.

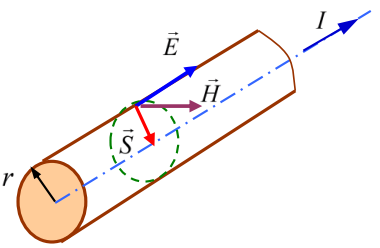


Рис. 1.4

Сравним входящую энергию с количеством теплоты, выделяющейся в проводнике при протекании тока. Поток электромагнитной энергии сквозь боковую поверхность участка проводника длиной l равен

$$S \cdot 2\pi rl = \frac{c}{4\pi}EH\,2\pi rl = \pi r^2 ljE = VjE. \qquad (1.2.16)$$

Здесь вместо напряженности магнитного поля H подставлено выражение (1.2.15), $V = \pi r^2 l$ — объем участка проводника. Таким образом, поток электромагнитной энергии, поступающей в проводник извне, целиком превращается в джоулево тепло.

2. *Зарядка конденсатора*.

Пусть плоский конденсатор имеет круглые обкладки радиусом r, находящиеся на расстоянии h друг от друга. Пренебрегая краевыми эффектами, найдем поток электромагнитной энергии, «втекающей» в конденсатор через его боковую «поверхность». В процессе зарядки конденсатора вектор Пойнтинга $\vec{S}$ направлен внутрь конденсатора (рис. 1.5). На этой «поверхности» имеется меняющееся во времени электрическое поле $\vec{E}$ и вызванное его изменением магнитное поле $\vec{H}$. По теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$ находим

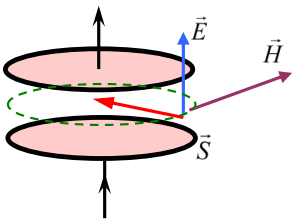


Рис. 1.5

$$H \cdot 2\pi r = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{D}d\vec{s} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\pi r^2 .$$

Тогда поток электромагнитной энергии внутрь конденсатора равен

$$S \cdot 2\pi rh = \frac{c}{4\pi}EH\,2\pi rh = \frac{1}{4\pi}E\frac{\partial D}{\partial t}h\pi r^2 = \frac{V}{4\pi}E\frac{\partial D}{\partial t}. \qquad (1.2.17)$$

Таким образом, за время dt приращение энергии конденсатора составит (если $D = \varepsilon E$):

$$dW = \frac{V}{4\pi}EdD = \frac{1}{8\pi}d\left(\varepsilon E^2 V\right) = \frac{1}{8\pi}d\left(ED \cdot V\right). \qquad (1.2.18)$$

Проинтегрировав это выражение, мы получаем формулу для энергии заряженного конденсатора.

$$W = \frac{1}{8\pi}ED \cdot V = w \cdot V. \qquad (1.2.19)$$

Вся энергия, вошедшая через боковую поверхность конденсатора за время зарядки, сосредоточилась внутри конденсатора в виде энергии электрического поля.

1.3. Поток импульса в электромагнитной волне. Давление света

1.3.1. Импульс электромагнитного поля

Из курса релятивистской физики (СТО) нам известно, что энергия замкнутой системы сохраняется, но не является инвариантом относительно преобразований Лоренца. Инвариантной величиной является 4^x-вектор энергии — импульса $\left(E/c, \vec{p}\right)$, квадрат длины которого равен [1]:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 = inv. \tag{1.3.1}$$

где m_0 — масса покоя системы или одной частицы, E — полная энергия частицы или системы частиц (не путать с напряженностью электрического поля). Другими словами, энергия и импульс взаимосвязаны друг с другом и, в общем, неразделимы. Вспомним основные формулы для энергии и импульса в теории относительности (подробнее см. [1]), в которых устанавливается, что энергии присущи определенная масса и скорость движения:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{1.3.2}$$

а импульс является мерой переноса массы — энергии:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.3.3}$$

Рассматривая энергию электромагнитного поля W и связь между энергией и импульсом, запишем импульс, соответствующий электромагнитному полю (теперь здесь и далее переобозначим $E \equiv W$):

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} = \frac{W\vec{v}}{c^2}. \tag{1.3.4}$$

Здесь $\vec{v}$ — скорость распространения электромагнитной волны в среде. В вакууме $v = c$ и импульс электромагнитной волны равен

$$\left|\vec{p}\right| = \frac{W}{c}. \tag{1.3.5}$$

Введем понятие *плотности импульса* электромагнитного поля $\vec{p}_0$:

$$\vec{p}_0 = \frac{\vec{p}}{V} = \frac{W}{V}\frac{\vec{v}}{c^2} = w\frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E}, \vec{H}\right], \tag{1.3.6}$$

где плотность энергии w определяется формулой (1.2.11) для изотропной и однородной среды, а вектор Пойнтинга — из соотношения (1.2.14). Таким образом, импульс бегущей электромагнитной волны направлен в сторону распространения волны.

Часто вводят *плотность потока импульса* электромагнитной волны как произведение плотности импульса на скорость распространении:

$$\vec{j}_p = \vec{p}_0 c = \frac{\vec{S}}{c} = \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]. \qquad (1.3.7)$$

Таким образом, вектор плотности потока импульса электромагнитной волны равен вектору плотности потока энергии, деленному на скорость света.

1.3.2. Давление электромагнитных волн (света)

При поглощении или отражении электромагнитных волн среде сообщается импульс, равный разности импульсов электромагнитной волны до и после поглощения или отражения. По аналогии с механикой эти процессы можно рассматривать как неупругое и абсолютно упругое взаимодействия, соответственно. Поэтому среда должна испытывать *давление электромагнитной волны*!

Если среда непрозрачная, то волна частично отражается и частично поглощается ею. Введем для характеристики среды коэффициент отражения ρ, при этом при полном отражении волны имеем ρ = 1, а при полном поглощении — ρ = 0.

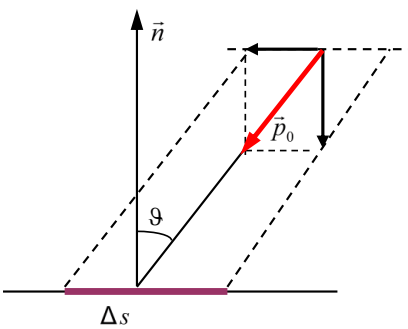


Рис. 1.6

Пусть электромагнитная волна падает из вакуума под углом ϑ на поверхность непрозрачной среды с коэффициентом отражения ρ (рис. 1.6). По определению давление $\boldsymbol{P}$ равно

$$\boldsymbol{P} = \frac{F_n}{\Delta s} = \frac{\Delta p}{\Delta t \Delta s}, \qquad (1.3.8)$$

где F_n — нормальная к поверхности составляющая силы, Δp — импульс, переданный площадке Δs за время Δt.

Рассмотрим по отдельности изменение импульса волны Δp при её отражении и поглощении. Понятно, что при нахождении давления $\boldsymbol{P}$ на поверхность среды нас будет интересовать лишь нормальная составляющая импульса волны p_0, которая, не изменяясь по модулю, меняет знак на противоположный при отражении и становится равной нулю при поглощении.

Отражение: переданный поверхности импульс при отражении волны равен (рис. 1.6):

$$\Delta p_{отр} = 2 p_0 \cos\vartheta \cdot \Delta s \cdot c\Delta t \cos\vartheta \cdot \rho .$$

Коэффициент 2 учитывает, что перпендикулярная к поверхности проекция импульса падающей электромагнитной волны меняется на противоположную по направлению проекцию импульса отраженной волны. Далее, учитывая, что плотность импульса электромагнитной волны из (1.3.6) в вакууме равна $p_0 = w/c$, получаем давление, оказываемое отраженной волной:

$$\boldsymbol{P}_{отр} = \frac{\Delta p_{отр}}{\Delta t \Delta s} = 2c\rho \cdot p_0 \cos^2 \vartheta = 2\rho \cdot w \cos^2 \vartheta . \qquad (1.3.9)$$

Поглощение: переданный поверхности импульс равен

$$\Delta p_{погл} = p_0 \cos\vartheta \cdot \Delta s \cdot c\Delta t \cos\vartheta \cdot (1-\rho);$$

и соответствующее давление, оказываемое поглощенной части волны:

$$\boldsymbol{P}_{погл} = \frac{\Delta p_{погл}}{\Delta t \Delta s} = c(1-\rho) \cdot p_0 \cos^2 \vartheta = (1-\rho) \cdot w \cos^2 \vartheta . \qquad (1.3.10)$$

Таким образом, полное давление, оказываемое электромагнитной волной, падающей под углом ϑ на среду с коэффициентом отражения ρ, равно сумме давлений

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{отр} + \boldsymbol{P}_{погл} = (1+\rho) \cdot w \cos^2 \vartheta . \qquad (1.3.11)$$

Примечание 1. Заметим, что если электромагнитная волна проходит сквозь среду, не поглощаясь и не отражаясь, то она не оказывает давления на среду.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть нормально падающая волна полностью отражается ($\vartheta = 0$, $\rho = 1$): тогда давление равно $\boldsymbol{P} = 2w$.

2. Нормально падающая волна полностью поглощается ($\vartheta = 0$, $\rho = 0$): тогда для давления имеем $\boldsymbol{P} = w$.

Давление, которое оказывают электромагнитные волны, отражаясь или поглощаясь в телах, можно рассматривать как результат воздействия магнитного поля волны на электрические токи, возбуждаемые электрическим полем той же волны. В самом деле, пусть электромагнитная волна распространяется в однородной среде, поглощающей излучение. Наличие поглощения означает, что $\sigma \neq 0$, т. е. поглощающая среда обладает проводимостью. Электрическое поле волны в такой среде возбуждает электрический ток плотностью $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. На единицу объема среды с током действует сила Ампера, при этом *плотность действующей силы* равна

$$f = \frac{1}{c}\left[\vec{j}, \vec{B}\right] = \frac{\sigma}{c}\left[\vec{E}, \vec{B}\right].$$

Сила Ампера направлена в сторону распространения волны. Этой силой и обусловлено давление электромагнитной волны.

Отсутствие поглощения означает, что проводимость $\sigma = 0$ и $f = 0$, т. е. в этом случае электромагнитная волна не оказывает давления на среду. В рамках этой модели отражение можно рассматривать как поглощение с дальнейшим переизлучением электромагнитной волны в обратную сторону.

1.3.3. Опыты П. Н. Лебедева

П. Н. Лебедев экспериментально показал, что свет оказывает давление на поверхность тел. В вакууме помещалась кварцевая нить, на которую наклеивались лепестки из материалов, полностью отражающих (светлые кружки на рис. 1.7) и полностью поглощающих (~90%) свет (на рис. 1.7 темные кружки). На образец направлялся пучок света от электрической дуги. Величина передаваемого импульса и, соответственно, оказываемое давление определялись по углу α скручивания нити, который измерялся с помощью простой оптической системы. Если известна жесткость нити на закручивание k, то момент вращающей силы находится как $M = -k\alpha$, а сила, действующая на лепесток, определяется $F = M/l$, где l — плечо силы.

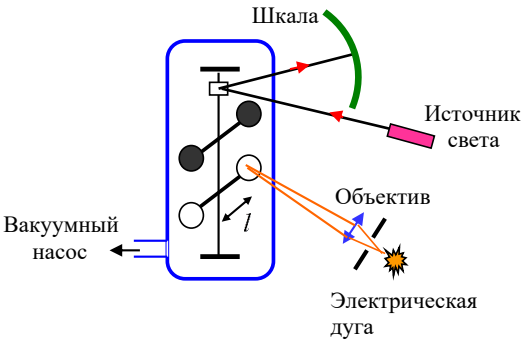


Рис. 1.7

Результаты опытов П. Н. Лебедева оказались в согласии с выводами теории Максвелла. Давление электромагнитного излучения обычно бывает очень малым. Например, при потоке солнечной энергии на орбите Земли приблизительно 1,4 кВт/м^2 световое давление составляет 5 мкПа, что в 10^{10} раз меньше атмосферного давления. Точность опыта по измерению давления света удалось повысить, используя модулированное электромагнитное излучение. Частота модуляции выбирается равной частоте собственных колебаний механической системы. Чувствительность установки возрастает при этом в Q раз, где Q — добротность механической системы.

Давление и импульс излучения проявляются в двух противоположных по масштабам областях: астрономической и субатомной. Например, притяжение верхних слоев звезд к их центру в значительной степени уравновешивается давлением излучения, идущего от центра звезды наружу. Световое давление приводит к некоторому предельному значению массы, при котором звезда еще остается устойчивой. Этот вывод согласуется с астрономическими данными,

согласно которым звезды с массой, превосходящей некоторый известный предел, не наблюдаются.

Из явлений микромира отметим эффект Комптона (который подробнее будет рассмотрен в части курса, посвященной атомной физике), когда рентгеновское излучение передает часть своего импульса электронам, на которых оно рассеивается, и тем самым сообщает этим «электронам отдачи» большие скорости. Импульс излучения обнаруживает себя также в «отдаче», которую испытывает атомное ядро при испускании гамма-лучей.

Примечание 2. *Петр Николаевич Лебедев, русский физик, 1866–1912.*

1.4. Суперпозиция электромагнитных волн

1.4.1. Простейший случай сложения плоских волн

Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля равны соответственно сумме напряженностей и сумме магнитных индукций всех полей в данной точке независимо от их происхождения. Если эти поля принадлежат плоским электромагнитным волнам, распространяющимся в произвольных направлениях, то, вообще говоря, полученная в результате сложения совокупность электрического и магнитного полей не всегда дает плоскую электромагнитную волну. Более того, как правило, при сложении плоских монохроматических волн получаем сложную электромагнитную волну. Исключение составляет простейший частный случай суперпозиции двух волн, рассмотренный ниже.

Сложим две плоские монохроматические волны одинаковой частоты ω, распространяющихся вдоль одного направления, и векторы напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ электрических полей в этих волнах коллинеарны $\vec{E}_1 \| \vec{E}_2$. Чтобы не загромождать изложение, мы будем, как правило, следить за поведением электрического вектора $\vec{E}$, поскольку поведение вектора $\vec{B}$ в плоской волне может быть определено с помощью соотношений между векторами волны.

Удобнее записать уравнения волн в комплексной форме:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} \quad \text{и} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}. \tag{1.4.1}$$

Поскольку волны распространяются в одном направлении, то можно складывать просто модули векторов напряженности:

$$E = E_1 + E_2 = E_{01} e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} + E_{02} e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = \left(\left|E_{01}\right| e^{i\delta_1} + \left|E_{02}\right| e^{i\delta_2}\right) e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = E_0 e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}. \tag{1.4.2}$$

То есть в результате сложения получаем снова плоскую монохроматическую волну с комплексной амплитудой, равной сумме амплитуд:

$$\left|E_{01}\right| e^{i\delta_1} + \left|E_{02}\right| e^{i\delta_2} = \left|E_0\right| e^{i\delta} = E_0 .$$

Таким образом, *две плоские монохроматические волны одинаковой частоты, распространяющиеся в одном направлении, дают в результате сложения плоскую монохроматическую волну той же частоты и распространяющуюся в том же направлении*.

Однако если складываемые волны распространяются в разных направлениях или различаются по частоте, то результат их сложения может быть совершенно иным.

1.4.2. Биения

Рассмотрим результат сложения двух плоских монохроматических волн различной частоты ω_1 и ω_2, рапространяющихся в одном направлении, например вдоль оси x. Пусть $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ и для простоты $E_{01} = E_{02} = E_0$, т. е. электрические векторы параллельны и амплитуды волн одинаковы.

$$E_1 = E_0\, cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{и} \quad E_2 = E_0\, cos(\omega_2 t - k_2 x). \tag{1.4.3}$$

Как и в предыдущем случае будем складывать просто модули векторов напряженности:

$$E = E_1 + E_2 = E_0\left[cos(\omega_1 t - k_1 x) + cos(\omega_2 t - k_2 x)\right] =$$

$$= 2E_0\, cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right).$$

Так как $k_1 = \omega_1/c$ и $k_2 = \omega_2/c$, результирующую волну можем записать в виде

$$E = 2E_0\, cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]. \tag{1.4.4}$$

Из этого выражения видно, что в результате сложения получаем плоскую немонохроматическую волну.

Наглядную интерпретацию этого выражения можно дать, если складываемые волны имеют близкие друг к другу частоты ω_1 и ω_2: $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$. В этом случае первый сомножитель в (1.4.4) $\cos\left[1/2 \cdot (\omega_1 - \omega_2)(t - x/c)\right]$ представляет собой медленно меняющуюся по сравнению со вторым сомножителем функцию времени или координаты. Поэтому можно считать, что мы имеем дело с распространением гармонических колебаний, частота которых определяется полусуммой частот $(\omega_1 + \omega_2)/2$, а амплитуда которых равна

$$A_0 = \left|2E_0\, cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\right|. \tag{1.4.5}$$

То есть амплитуда медленно меняется со временем от 0 до значения $2E_0$. Зависимость суммарных колебаний напряженности поля (1.4.4) от времени или от координаты качественно представлена на рисунке 1.8. Такие колебания называются *биениями* (см. биения в § 4.3, гл. 4 «Механика» [1]).

Частота биений равна

$$\Omega = |\omega_1 - \omega_2| = \Delta\omega .$$

Частота Ω в 2 раза больше, чем следует из (1.4.5), так как те области, которые заполнены колебаниями более высокой частоты, появляются на каждый полупериод (рис. 1.8). Соответственно, период биений в 2 раза меньше времени полного колебания из (1.4.5) и равен

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \qquad (1.4.6)$$

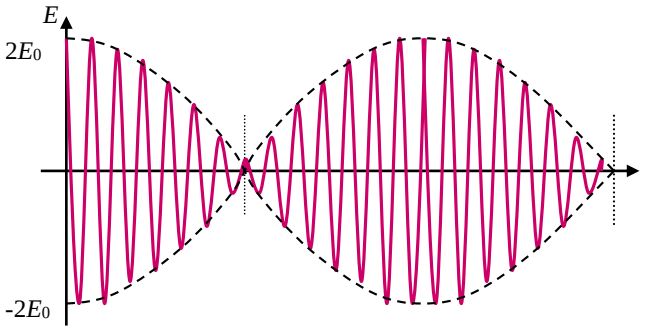


Рис. 1.8

Если $E_{01} \neq E_{02}$, то амплитуда колебаний (огибающая) изменяется в пределах от $|E_{01} - E_{02}|$ до $E_{01} + E_{02}$. Таким образом, в результате сложения двух сонаправленных плоских гармонических волн с близкими частотами мы получаем «гармоническую» волну с медленно изменяющейся амплитудой (термин «медленно» означает, что за много периодов колебаний с частотой $(\omega_1 + \omega_2)/2$ их амплитуда меняется незначительно).

1.4.3. Стоячие волны

Важный результат получается при рассмотрении суперпозиции двух плоских монохроматических волн одинаковой частоты, распространяющихся навстречу друг другу по оси x (рис. 1.9). Будем по-прежнему считать, что векторы напряженности электрического поля в этих волнах коллинеарны $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ и колеблются с одинаковой амплитудой $E_{01} = E_{02} = E_0$.

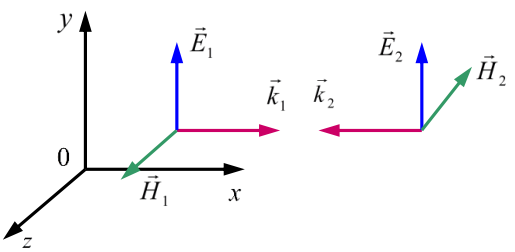


Рис. 1.9

Итак, пусть направление распространения волн определяется осью x, а ось y выберем вдоль направления колебаний вектора $\vec{E}$. Начало отсчета на оси x выберем в точке, где колебания напряженностей обеих волн происходят в одинаковой фазе. Тогда электрические вектора обеих волн можем записать через компоненты в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \left(0, E_0 e^{-i(\omega t - kx)}, 0\right) \\ \vec{E}_2 &= \left(0, E_0 e^{-i(\omega t + kx)}, 0\right) \end{aligned}. \qquad (1.4.7)$$

Аналогично для векторов $\vec{H}$ имеем

$$\vec{H}_1 = \left(0,0,H_0 e^{-i(\omega t - kx)}\right), \qquad \vec{H}_2 = \left(0,0,-H_0 e^{-i(\omega t + kx)}\right). \tag{1.4.8}$$

Отметим, что если в обеих волнах проекции векторов $\vec{E}$ имеют одинаковые знаки, то у проекций $\vec{H}$ знак изменяется на противоположный знак. Складывая векторы $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ и $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, получаем результирующее электромагнитное поле:

$$\vec{E} = \left(0,\ 2E_0 e^{-i\omega t}\cos kx,\ 0\right) \quad \text{и} \quad \vec{H} = \left(0,0,\ 2iH_0 e^{-i\omega t}\sin kx\right) \tag{1.4.9}$$

или в вещественном виде

$$\vec{E} = \left(0, 2E_0 \cos kx \cos \omega t,\ 0\right) \quad \text{и} \quad \vec{H} = \left(0,0,\ 2H_0 \sin kx \sin \omega t\right). \tag{1.4.10}$$

Таким образом, в результате суперпозиции двух бегущих волн образуется электромагнитная волна, которую можно рассматривать как совокупность волн электрического и магнитного полей (рис. 1.10). Векторы напряженностей этой совокупности полей не содержат характерного для бегущей волны множителя $\cos\left(t \pm x/c\right)$ или $\sin\left(t \pm x/c\right)$. Имеется только множитель $\cos\omega t$ (или $\sin\omega t$), описывающий колебания векторов во времени с частотой ω. Сомножители $2E_0 \cos kx$ и $2H_0 \sin kx$ с точностью до знака представляют собой амплитуды колебаний напряженности, соответственно, электрического и магнитного полей, которые от точки к точке по оси x изменяются по гармоническому закону. Колебания напряженностей полей во времени во всех точках изменяются с одной и той же частотой. Такая волна называется *стоячей*.

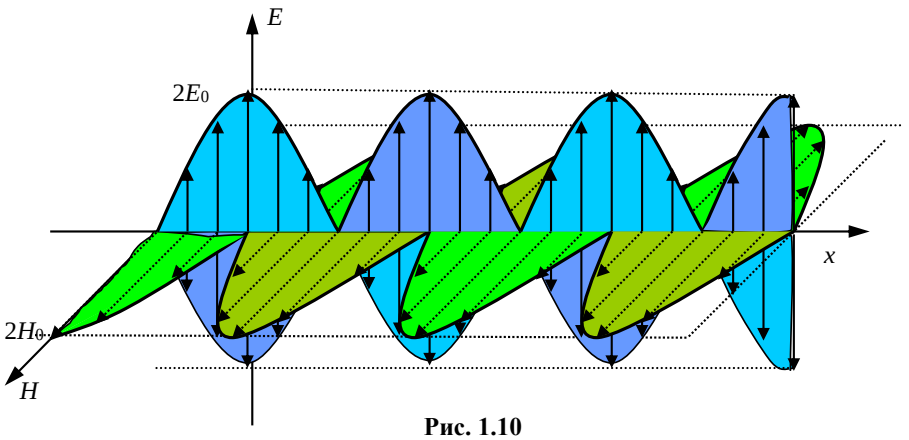


Рис. 1.10

Амплитуда колебаний напряженности электрического поля волны изменяется от максимального значения $2E_0$ до нуля. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна в плоскостях:

$$\left(\cos kx = 1\right), \qquad x = \frac{\pi}{k} n = \frac{\lambda}{2} n, \ \left(n = 0,1,2,...\right), \tag{1.4.11}$$

называются *пучностями* электрического поля. Точки, в которых амплитуда падает до нуля в плоскостях:

$$(\cos kx = 0), \qquad x = \frac{\pi}{k}\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (n = 0,1,2,...), \tag{1.4.12}$$

называются *узлами*.

Фаза колебаний вектора $\vec{E}$ во всех точках между соседними узлами одинакова, а колебания по разные стороны от узла происходят в противофазе. Пучности и узлы стоячей волны магнитного поля сдвинуты вдоль оси *x* на четверть длины волны по отношению к пучностям и узлам электрического поля. Колебания магнитного поля отстают по времени на четверть периода от колебаний электрического поля. Таким образом, узлы вектора $\vec{E}$ совпадают с пучностями вектора $\vec{H}$ и наоборот. Это означает, например, что при достижении максимума напряженности электрического поля индукция магнитного поля обращается в нуль. И наоборот, при достижении максимума напряженности магнитного поля напряженность электрического поля равна нулю. Таким образом получаем, что если одна из величин находится в фазе роста, то другая — в фазе уменьшения.

В рассмотренных ранее *бегущих электромагнитных волнах* электрическое и магнитное поля в каждой пространственной точке изменяются во времени совершенно одинаково. Так, в монохроматической волне они совершают гармонические колебания в одинаковой фазе. Стоячие волны, как мы видим, обладают существенно иными свойствами. Для таких волн характерны *пространственное разнесение и сдвиг во времени колебаний электрического и магнитного полей*.

Рассмотрим энергию в стоячей электромагнитной волне. Вектор Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ в стоячей волне отличен от нуля для всех координат за исключением узловых точек обоих полей. Следовательно, поток энергии отсутствует через те точки, где либо $\vec{E}$, либо $\vec{H}$ обращаются в нуль. Другими словами, отсутствует поток энергии в стоячей электромагнитной волне через узлы и пучности волны, поскольку пучности электрического поля совпадают с узлами магнитного поля и наоборот. Поэтому энергия стоячей волны заключена между соседними узлами и пучностями и при этом испытывает превращения из электрической энергии в магнитную энергию и обратно. Из выражения для объемной плотности энергии

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}\right) \tag{1.4.13}$$

следует, что энергия стоячей волны, заключенная между соседними узлами и пучностями с течением времени сохраняет постоянное значение.

Таким образом, *стоячая волна, обладая энергией, не переносит и не излучает её*. В самом деле, если проинтегрировать поток электромагнитной энергии за период, то получим 0: $\int_0^T \vec{S}dt = 0$, где T — период колебаний.

1.4.4. Эксперименты со стоячими волнами

На эксперименте стоячие волны создаются в результате сложения волн падающего и отраженного света (или других электромагнитных волн). Стоячие волны образуются, в частности, в резонаторах лазеров (в оптических квантовых генераторах). Для видимого света стоячие волны трудно непосредственно наблюдать из-за малой длины волны.

Рассмотрим кратко опыт О. Винера, выполненный в 1890 г.

Стеклянная пластинка, покрытая тонким фоточувствительным слоем, проводилась в соприкосновение с металлическим зеркалом, образуя малый угол α (~1°) (рис. 1.11). Падающий луч света и отраженный от зеркала свет образуют стоячую волну для определенной длины волны. Пучности стоячих волн обнаруживались в фотослое после проявления фотопластинки в виде почерненных полос. Опыты Винера показали, что фотохимическое действие на фоточувствительный слой обусловлено напряженностью электрического поля $\vec{E}$, а не $\vec{B}$. Это удалось показать, поскольку граничные условия для этих векторов вблизи металлической пластины различны.

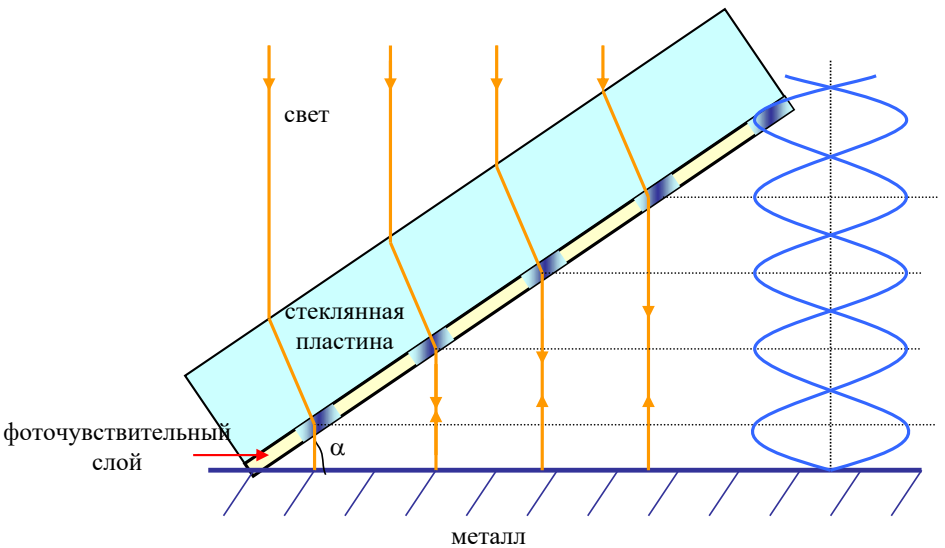


Рис. 1.11

Метод стоячих волн использовался Г. Липпманом в 1891 г. для получения цветной фотографии. Для получения высококачественных цветных фотографий Г. Липпман помещал достаточно толстую (несколько десятков микрон)

фоточувствительную эмульсию на ртуть, поверхность которой использовалась как отражающее зеркало (рис. 1.12). Цветное изображение проецировалось на эту эмульсию, проходило сквозь нее и отражалось зеркалом. В результате интерференции падающей и отраженной световой волны в объеме эмульсии возникали светлые и темные области, примерно параллельные плоскости фоточувствительного слоя. Так как расстояние между интерференционными областями оказывалось порядка половины длины волны света, то в фоточувствительном слое помещались десятки таких областей.

После фотографического проявления и фиксации в объеме фоточувствительного слоя оказывались зарегистрированными светлые области интерференционного поля в виде слабо отражающих поверхностей. Расстояние между этими поверхностями однозначно определялось локальным цветом регистрируемого изображения. Теперь если убрать зеркало и осветить этот слой белым светом (рис. 1.13), то отражаться от каждого участка слоя будет только свет того цвета (длины волны), для которого расстояние между отражающими поверхностями в этом месте равно половине длины волны. Таким образом, глаз наблюдателя видит цветное изображение в отраженном свете.

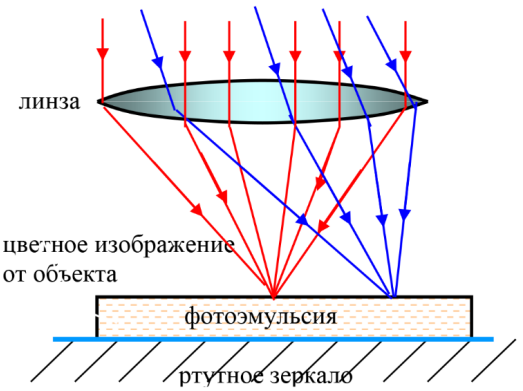


Рис. 1.12

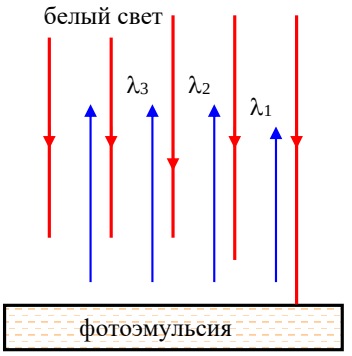


Рис. 1.13

Примечание 1. *Отто Генрих Винер, немецкий физик, 1862–1927.*
Габриэль Липпман, французский физик, 1845–1921, Нобелевская премия 1908 г. за цветную фотографию солнечного спектра.

1.5. Поляризация электромагнитных волн

1.5.1. О поляризации волн

Под поляризацией электромагнитных волн понимают физическую характеристику излучения, описывающую поперечную анизотропию электромагнитных волн, т. е. неэквивалентность различных направлений в плоскости, перпендикулярной волновому вектору $\vec{k}$.

Первые указания на поперечную анизотропию светового луча были получены голландским ученым Х. Гюйгенсом в 1690 г. при опытах с кристаллами исландского шпата. Понятие «*поляризация света*» было введено в оптику И. Ньютоном в 1704–1706 гг.

Поскольку векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в плоской электромагнитной волне перпендикулярны друг другу, для полного описания состояния поляризации волны требуется знание поведения лишь одного из них. Как правило, для этой цели выбирается вектор $\vec{E}$. Волна, испускаемая каким-либо отдельно взятым элементарным излучателем (атомом, молекулой), в каждом акте излучения всегда поляризована. Однако макроскопические источники состоят из огромного числа таких частиц-излучателей. Пространственные ориентации векторов $\vec{E}$ в моменты актов испускания волн отдельными частицами в большинстве случаев распределены хаотически. Поэтому в общем излучении ансамбля частиц направление вектора $\vec{E}$ в каждый момент времени непредсказуемо. Такое излучение называют *неполяризованным*, или *естественным светом*.

О *поляризованном* излучении говорят в том случае, когда изменение со временем пространственной ориентации вектора напряженности электрического поля волны $\vec{E}$ подчиняется некоторому закону. Свет называют полностью поляризованным, если две взаимно перпендикулярные компоненты (проекции) вектора $\vec{E}$ электромагнитной волны совершают колебания с постоянной во времени разностью фаз. *Плоскостью поляризации*, или *плоскостью колебаний*, называют плоскость, в которой лежат вектор напряженности электрического поля волны и волновой вектор $\vec{k}$ (в некоторых книгах, особенно старых, плоскостью поляризации называют плоскость, содержащую магнитный вектор $\vec{H}$).

До сих пор мы рассматривали *линейно поляризованный* свет или *плоско поляризованный* свет. Это относится к волнам, в которых вектор $\vec{E}$ колеблется в одном и том же направлении. Так, в § 1.4 мы рассматривали суперпозицию двух волн с одинаковой линейной поляризацией.

1.5.2. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим теперь также суперпозицию двух монохроматических волн одинаковой частоты, распространяющихся в одном направлении, задаваемом осью z. Пусть векторы напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ электрических полей этих волн

совершают колебания во взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 1.14*а*) с относительным сдвигом фазы колебаний, равным δ. Итак, имеем

$$E_{1x} = E_{01}\,cos(\omega t - kz), \qquad E_{1y} = E_{1z} = 0\,,$$

$$E_{2y} = E_{02}\,cos(\omega t - kz + \delta), \qquad E_{2x} = E_{2z} = 0\,. \qquad (1.5.1)$$

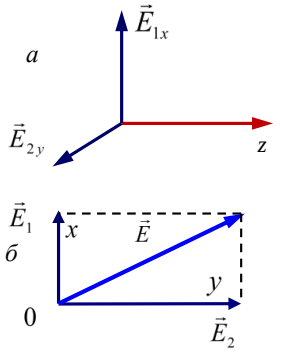


Рис. 1.14

Найдем уравнение траектории, описываемой концом вектора $\vec{E}$ волны, образовавшейся в результате суперпозиции двух таких волн, в плоскости *x*0*y*, перпендикулярной направлению её распространения (рис. 1.14*б*). Перепишем компоненту второй волны в виде

$$E_{2y} = E_{02}\,cos(\omega t - kz)cos\,\delta - E_{02}\,sin(\omega t - kz)sin\,\delta \qquad (1.5.2)$$

и выразим из уравнения первой волны:

$$cos(\omega t - kz) = \frac{E_{1x}}{E_{01}} \quad \text{и} \quad sin(\omega t - kz) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2}\,.$$

Тогда после подстановки получаем связь между текущими значениями напряженности поля обеих волн:

$$E_{2y} = \frac{E_{02}}{E_{01}} E_{1x}\,cos\,\delta - E_{02}\sqrt{1 - \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2}\,sin\,\delta\,. \qquad (1.5.3)$$

Выделим слагаемое уравнения, содержащее радикал, и избавимся от иррациональности, возводя все выражение в квадрат:

$$\frac{E_{2y}}{E_{02}} - \frac{E_{1x}}{E_{01}}\,cos\,\delta = -\sqrt{1 - \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2}\,sin\,\delta\,,$$

$$\left(\frac{E_{2y}}{E_{02}}\right)^2 - 2\frac{E_{2y}}{E_{02}}\frac{E_{1x}}{E_{01}}\cos\delta + \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2\cos^2\delta = \left[1 - \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2\right]\sin^2\delta\,. \qquad (1.5.4)$$

Окончательно получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_{2y}}{E_{02}}\right)^2 - 2\frac{E_{1x}}{E_{01}}\frac{E_{2y}}{E_{02}}\,cos\,\delta = sin^2\,\delta\,. \qquad (1.5.5)$$

Получили уравнение кривой второго порядка — *эллипса*, ориентация которого в плоскости *x*0*y* определяется значением угла δ.

Таким образом, кривая, описывающая траекторию конца проекции вектора $\vec{E}$ результирующей волны, в общем случае имеет вид эллипса с правым или левым направлением вращения вектора $\vec{E}$ во времени. Такая электромагнитная волна называется *эллиптически поляризованной*.

Наблюдение за направлением движения вектора $\vec{E}$ ведется со стороны, в которую распространяются колебания, иначе говоря, против направления вектора $\vec{k}$ (в нашем случае — против оси z). Рассмотрим важные частные случаи.

(1). Пусть разность фаз $\delta = \pm\pi/2 + \pi n$; т. е. $\cos\delta = 0$; $\sin\delta = \pm 1$, тогда из (1.5.5) имеем

$$\left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_{2y}}{E_{02}}\right)^2 = 1. \qquad (1.5.6)$$

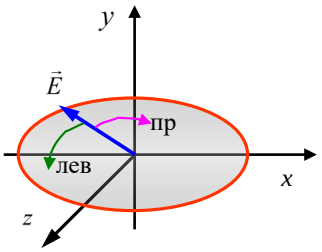


Рис. 1.15

При неравенстве $E_{01} \neq E_{02}$ получаем уравнение эллипса с центром в начале координат и осями, ориентированными вдоль осей системы координат (рис. 1.15).

Если разность фаз равна $\delta = +\pi/2 + 2\pi n$, то колебания, совершаемые вдоль оси y (E_{2y}), на четверть периода опережают колебания вдоль оси x (E_{1x}), что следует из формул (1.5.1). При этом вектор $\vec{E}$ вращается по часовой стрелке, это — *правая эллиптически поляризованная волна*.

Если $\delta = -\pi/2 + 2\pi n$, то опережающим колебанием является E_{1x}, поэтому вращение вектора напряженности $\vec{E}$ результирующей волны происходит против часовой стрелки — *левая эллиптически поляризованная волна*.

Наибольший интерес представляют другие предельные случаи эллиптической поляризации.

(2). *Линейная поляризация*: появляется тогда, когда разность фаз равна $\delta = \pi n$, $n = 0,1,2,...$; при этом $\cos\delta = \pm 1$ и $\sin\delta = 0$. Тогда из (1.5.5) имеем

$$\left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_{2y}}{E_{02}}\right)^2 \pm 2\frac{E_{1x}}{E_{01}}\frac{E_{2y}}{E_{02}} = 0; \qquad \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}} \pm \frac{E_{2y}}{E_{02}}\right)^2 = 0; \text{ и отсюда далее}$$

$$E_{2y} = \pm\frac{E_{02}}{E_{01}}E_{1x}. \qquad (1.5.7)$$

Получаем уравнение прямой, т. е. эллиптическая поляризация вырождается в колебания, происходящие вдоль этой прямой линии, наклон которой к оси x определяется соотношением амплитуд E_{01} и E_{02}.

(3). *Циркулярная поляризация*: появляется, когда амплитуды волн одинаковы $E_{01} = E_{02} = E_{00}$, а разность фаз равна $\delta = \pm\pi/2 + \pi n$, при $n = 0,1,2,...$; тогда $\cos\delta = 0$; $\sin\delta = \pm 1$. При этом имеем

$$\left(\frac{E_{1x}}{E_{00}}\right)^2 + \left(\frac{E_{2y}}{E_{00}}\right)^2 = 1. \qquad (1.5.8)$$

Получаем уравнение окружности, которую описывает конец вектора $\vec{E}$ в плоскости $x0y$. Направление вращения вектора $\vec{E}$ определяется так же, как и для эллиптической поляризации, т. е. результирующая волна может быть *право-* или *левоциркулярно поляризованной* в зависимости от направления вращения вектора $\vec{E}$.

Можно сделать важное утверждение: *монохроматическое векторное поле всегда поляризовано*, в общем случае эллиптически. Волну с произвольной (в общем случае эллиптической) поляризацией всегда можно разложить на две составляющие. Ее всегда можно представить в виде суммы двух линейно поляризованных волн с ортогональными направлениями поляризации. Верно и обратно, всякую линейно поляризованную волну можно представить как суперпозицию двух поляризованных по кругу волн: с правой и левой поляризациями. То есть электромагнитные волны обладают *двумя независимыми состояниями поляризации*. Так, при изучении распространения света в анизотропных средах (кристаллах) удобно разложить падающую волну на сумму двух линейно поляризованных волн, а при изучении естественного и магнитного вращения плоскости поляризации в веществе удобно использовать разложение на две волны с круговой поляризацией.

Итак, можно считать *независимыми состояниями* волны как с левой и правой циркулярными поляризациями, так и с линейными взаимно перпендикулярными поляризациями, поскольку их можно выразить друг через друга.

Рассмотрим пример. Задаем первую волну — левую циркулярно поляризованную волну ($\delta = -\pi/2$):

$$\begin{cases} E_{1x} = E_0 cos(\omega t - kz); \\ E_{1y} = E_0 sin(\omega t - kz). \end{cases}$$

Задаем вторую волну — правую циркулярно поляризованную волну ($\delta = \pi/2$):

$$\begin{cases} E_{2x} = E_0 cos(\omega t - kz); \\ E_{2y} = E_0 sin(\omega t - kz). \end{cases}.$$

Их суперпозиция дает:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = 2E_0(cos(\omega t - kz),$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 0.$$

Таким образом, суперпозиция левой и правой циркулярно поляризованных волн дает линейно поляризованную волну.

Примечание 1. *Христиан Гюйгенс, голландский физик, 1629–1695.*

1.6. Момент импульса в бегущей плоской электромагнитной волне

Свет круговой поляризации наряду с энергией и импульсом обладает также *моментом импульса*. В 1898 г. А. И. Садовский впервые теоретически показал, что электромагнитное поле волны обладает *моментом количества движения* (эффект Садовского), теоретически доказав вращающее действие поляризованных электромагнитных волн. Для его определения рассмотрим движение точечного заряда в поле плоской монохроматической электромагнитной волны. Это движение происходит по замкнутой траектории (в общем случае — эллиптической).

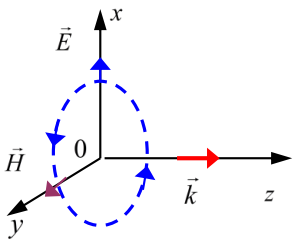


Рис. 1.16

Для простоты и определенности рассмотрим левую циркулярно поляризованную волну (рис. 1.16). Пусть вектор $\vec{E}$ $(\vec{H})$ вращается с угловой скоростью ω, равной круговой частоте электромагнитных колебаний. Если в пространстве, где распространяется волна, оказывается точечный заряд q, то на него будет действовать сила Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\left[\vec{v},\vec{H}\right]. \qquad (1.6.1)$$

Под действием этой силы заряд начинает двигаться в плоскости $x0y$. В *установившемся* режиме заряд вращается со скоростью v вокруг оси z, при этом электрическая компонента $q\vec{E}$ сообщает ему центростремительное ускорение. Под действием магнитного поля волны $\frac{q}{c}\left[\vec{v},\vec{H}\right]$ заряд смещается вдоль оси z (достаточно медленно, если $v << c$, как аналог рассмотренного ранее в § 1.3 механизма давления электромагнитных волн). Момент силы, действующей на заряд q, равен

$$\vec{M} = \left[\vec{r},\vec{F}\right] = q\left[\vec{r},\vec{E}\right] + \frac{q}{c}\left[\vec{r}\left[\vec{v},\vec{H}\right]\right], \qquad (1.6.2)$$

Смещение заряда из *положения равновесия*, характеризуемое радиус вектором $\vec{r}$, не совпадает с направлением действующей на него силы $q\vec{E}$. Модуль скорости заряда можно записать как $|\vec{v}| = |\omega\vec{r}|$, так как установившееся движение заряда под действием электрического поля циркулярно поляризованной волны будет происходить по окружности с угловой скоростью ω, равной частоте падающей волны. Для левой циркулярно поляризованной волны вектор $\left[\vec{v},\vec{H}\right]$ направлен по оси z, т. е. вдоль вектора $\vec{n} = \vec{k}/k$ (см рис. 1.17*a*); тогда направление вектора $[r,\vec{n}]$ противоположно направлению вектора скорости $\vec{v}$

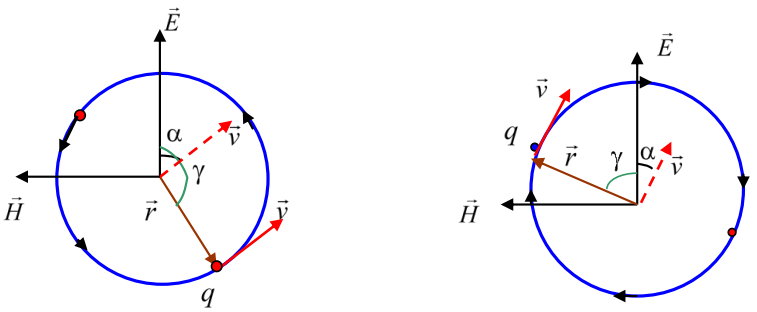
движения заряда q. Рассмотрим второе слагаемое в выражении для момента силы $\vec{M}$ (1.6.2):

$$\frac{q}{c}\left[\vec{r}\left[\vec{v},\vec{H}\right]\right]=\frac{q}{c}\vec{v}\left(\vec{r},\vec{H}\right)-\frac{q}{c}\vec{H}\left(\vec{r},\vec{v}\right)=\frac{q}{c}rH\cos\beta\cdot\vec{v}\,, \qquad (1.6.3)$$

где $\left(\vec{r},\vec{v}\right)=0$, β — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{H}$. Далее, усредняя за период, находим, что среднее значение скорости за один оборот заряда (или векторов поля) $\langle\vec{v}\rangle=0$, так как скорость через половину периода меняет свое направление на противоположное. Таким образом, получаем, что вклад в среднее значение момента силы, действующей со стороны магнитного поля волны на заряд (от слагаемого, содержащего вектор $\vec{H}$), равен нулю. Другими словами, магнитная компонента волны не дает вклада в среднее значение момента силы. Из формулы (1.6.2) имеем тогда для момента силы:

$$\left\langle\vec{M}\right\rangle=q\left\langle\left[\vec{r},\vec{E}\right]\right\rangle. \qquad (1.6.4)$$

Вектор $\left[\vec{r},\vec{E}\right]$ направлен вдоль волнового вектора $\vec{k}$ (или $\vec{n}=\vec{k}/k$) при левой поляризации волны (рис. 1.17*а*) и в противоположную сторону, если волна правополяризованная (рис. 1.17*б*).



а) Левая поляризация

б) Правая поляризация

Рис. 1.17

Модуль векторного произведения в (1.6.4) запишем через скалярное произведение скорости заряда и напряженности светового поля:

$$\left|\left[\vec{r},\vec{E}\right]\right|=rE\sin\gamma=rE\cos\alpha=\frac{\omega rE\cos\alpha}{\omega}=\frac{vE\cos\alpha}{\omega}=\frac{\left(\vec{v},\vec{E}\right)}{\omega};$$

$$\left\langle\left[\vec{r},\vec{E}\right]\right\rangle=\frac{\left\langle\left(\vec{v},\vec{E}\right)\right\rangle}{\omega}\vec{n}\,. \qquad (1.6.5)$$

Тогда среднее значение момента сил, действующих на заряд q со стороны плоской электромагнитной волны левой круговой поляризации, равно

$$\left\langle\vec{M}\right\rangle=\vec{n}\frac{q}{\omega}\left\langle\left(\vec{v},\vec{E}\right)\right\rangle. \qquad (1.6.6)$$

В случае правой поляризации получаем среднее значение момента сил с другим знаком:

$$\left\langle \vec{M} \right\rangle = -\vec{n}\,\frac{q}{\omega}\left\langle \left(\vec{v},\vec{E}\right)\right\rangle. \qquad (1.6.7)$$

Мощность, передаваемая волной заряду q, равна

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\vec{F},\vec{v}\right) = \left(q\vec{E} + \frac{q}{c}\left[\vec{v},\vec{H}\right]\right)\cdot\vec{v} = q\left(\vec{E},\vec{v}\right) + \frac{q}{c}\left[\vec{v},\vec{H}\right]\cdot\vec{v} = q\left(\vec{E},\vec{v}\right).$$

Здесь мы учли, что $\left[\vec{v},\vec{H}\right]\cdot\vec{v} = 0$. Усредним полученную мощность за период обращения

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = q\left\langle \left(\vec{E},\vec{v}\right)\right\rangle. \qquad (1.6.8)$$

Вспомним уравнение моментов из курса механики $\vec{M} = d\vec{L}/dt$, связывающее момент силы и изменение во времени момента импульса $\vec{L}$. Тогда используя уравнения (1.6.8), (1.6.6) и (1.6.7), для усредненного вектора момента силы можем записать

$$\left\langle \vec{M} \right\rangle = \left\langle \frac{d\vec{L}}{dt} \right\rangle = \frac{\pm\vec{n}}{\omega}\,q\left\langle \left(\vec{E},\vec{v}\right)\right\rangle = \frac{\pm\vec{n}}{\omega}\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle. \qquad (1.6.9)$$

Отсюда с очевидностью получаем выражение для переданного заряду момента импульса:

$$\vec{L} = \pm\vec{n}\,\frac{W}{\omega} = W\,\frac{\vec{\omega}}{\omega^2}. \qquad (1.6.10)$$

Таким образом, основываясь на универсальном законе сохранения момента импульса, можно заключить, что в единицу времени заряд q вместе с энергией dW/dt получил механический момент импульса $\vec{L}$ от электромагнитного поля действующей на него световой волны круговой поляризации. Таким образом, электромагнитная волна левой круговой поляризации с энергией W переносит момент импульса W/ω, направленный вдоль волнового вектора $\vec{k}$. Правополяризованный свет обладает противоположно направленным моментом импульса.

Можно ввести *плотность момента импульса* в электромагнитной волне, которая определяется:

$$\vec{l} = \frac{\vec{L}}{V}, \qquad (1.6.11)$$

или, подставляя (1.6.10), получаем

$$\vec{l} = \pm\vec{n}\,\frac{w}{\omega} = w\,\frac{\vec{\omega}}{\omega^2}, \qquad (1.6.12)$$

где w, как и ранее, плотность энергии электромагнитной волны.

Понятно, что для линейно поляризованной электромагнитной волны, которую можно представить как суперпозицию двух поляризованных по кругу волн с противоположным по направлению вращением вектора $\vec{E}$, момент импульса $\vec{L}$ равен нулю.

В области макроскопических явлений экспериментальное измерение момента импульса света представляет очень трудную задачу из-за ничтожной величины связанных с ним эффектов. Тем не менее в исключительно тонких экспериментах, выполненных в 1936 г. Р. Бетом, удалось обнаружить момент импульса электромагнитной волны. Им измерялся момент импульса, передаваемый светом полуволновой кристаллической пластинке, при прохождении через которую правополяризованный свет становится левополяризованным, или наоборот. При этом пластинке передается удвоенный момент импульса.

В области атомных явлений обмен моментом импульса между светом и веществом имеет существенное значение. Например, при испускании света круговой поляризации возбужденным атомом момент импульса электронов в атоме изменяется на величину, сравнимую с моментом импульса всего атома.

Примечание 1. *Александр Иванович Садовский, российский педагог-физик, 1859–1923.*
Ричард Бет (Richard A. Beth), американский физик.

1.7. Модуляция

1.7.1. Модуляция. Модуляция амплитуды

Гармонические колебания, описывающие волну, характеризуются амплитудой, частотой и фазой:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0); \qquad \text{или} \qquad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \tag{1.7.1}$$

Изменение этих параметров в процессе колебания называется *модуляцией*, а волны, получающиеся в процессе модуляции, называются *модулированными*. Рассмотренные ранее биения (§ 1.4) — пример амплитудной модуляции.

Гармоническое колебание не может нести информацию. Для того чтобы передать определенную информацию, необходимо волну «промодулировать», т. е. изменить какой-либо параметр волны в соответствии с изменением смыслового сигнала.

Итак, различают *амплитудную*, *частотную* и *фазовую* модуляции.

Рассмотрим вначале амплитудную модуляцию на примере следующей бегущей волны:

$$E(t) = (E_0 + E_1(t))cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \tag{1.7.2}$$

где функция времени $E_1(t)$ дает модуляцию амплитуды и представляет собой огибающую колебаний вектора E ($|E_1(t)| < E_0$, рис. 1.18). Можно провести *спектральный анализ* модуляции.

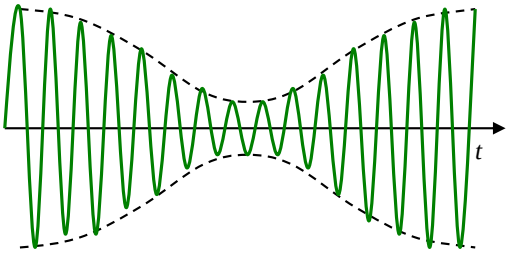


Рис. 1.18

Если функция $E_1(t)$ является периодической функцией, то она может быть представлена в виде ряда Фурье по частотам, кратным спектральной частоте Ω, где $\Omega = 2\pi/T$, а T — период функции. В математике доказывается теорема, по которой периодическую функцию можно разложить в ряд:

$$E_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\Omega t}, \qquad (1.7.3)$$

где a_n — амплитуда монохроматических колебаний с частотой $n\Omega$. Или разложение в ряд Фурье альтернативно можно представить в виде

$$E_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n cos\, n\Omega t + b_n sin\, n\Omega t). \qquad (1.7.4)$$

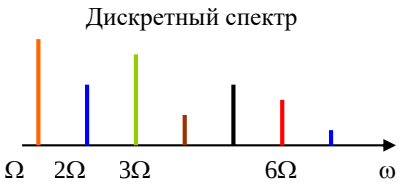


Рис. 1.19

Выражения (1.7.3) и (1.7.4) представляют собой разложение (суперпозицию) периодической функции по бесконечному набору монохроматических колебаний (плоских монохроматических волн). Иначе говорят о разложении периодического колебания в спектр, в данном случае в *дискретный спектр*. На рисунке 1.19 показан пример дискретного спектра разложения, где высота отрезка показывает величину амплитуды колебания a_n (b_n) данной частоты.

Примечание 1. В выражении (1.7.3) присутствуют отрицательные частоты, что это такое? Проделаем следующую выкладку, стартуя с (1.7.4):

$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos\, n\Omega t + b_n sin\, n\Omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} (e^{in\Omega t} + e^{-in\Omega t}) - \frac{ib_n}{2} (e^{in\Omega t} - e^{-in\Omega t}) \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{in\Omega t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n) e^{-in\Omega t} \right) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n^{+} e^{in\Omega t} + C_n^{-} e^{-in\Omega t} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\Omega t}.$$

Таким образом, отрицательные частоты в (1.7.3) — это обычные частоты, но сдвинутые по фазе на $\pi/2$ по отношению к другим частотам, т. е. синусы и косинусы, получаемые в спектральном разложении. Если раскладываемая функция $E(t)$ вещественна, то из условия $E^*(t) = E(t)$ получаем, что $C_{-n}^{*} = C_n$.

Рассмотрим конкретный пример периодической функции $E_1(t) = E_{01}cos\Omega t$, т. е. рассматриваем огибающую колебаний в виде гармонической функции. Тогда полное колебание (здесь для простоты рассматриваем волну в одной выбранной точке — $\vec{r} = 0$, например) имеет вид

$$E(t) = (E_0 + E_{01}cos\Omega t)cos\omega t. \qquad (1.7.5)$$

Разложим эту функцию по гармоническим колебаниям:

$$E(t) = E_0 cos\,\omega t + \frac{E_{01}}{2}cos(\omega - \Omega)t + \frac{E_{01}}{2}cos(\omega + \Omega)t. \qquad (1.7.6)$$

Таким образом, в разложении получаем спектр колебания (1.7.5) (волны), состоящий из трех компонент: колебаний с основной частотой ω и двух сателлитов с частотами $\omega \pm \Omega$ и с соответствующими амплитудами. Этот спектр схематично изображен на рисунке 1.20.

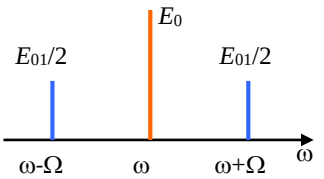


Рис. 1.20

Если в (1.7.2) огибающая $E_1(t)$ является непериодической функцией времени, то ее можно разложить в интеграл Фурье:

$$E_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \qquad (1.7.7)$$

Напомним, что можно записать обратное разложение или, что то же, формулу для определения амплитуд $E(\omega)$ разложения:

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-i\omega t}dt. \qquad (1.7.8)$$

Здесь функция $E(\omega)$ определяет *непрерывный* или *сплошной спектр* колебаний (рис. 1.21). Сложив все эти колебания частоты ω с соответствующими амплитудами $E(\omega)$, мы обратно получаем зависящий от времени модулирующий сигнал $E_1(t)$.

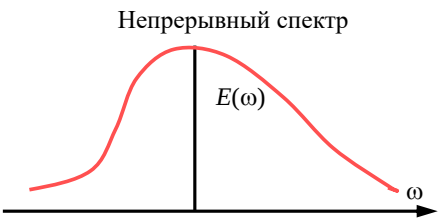


Рис. 1.21

Примечание 2. Если $E_1(t)$ — вещественная функция, то можно избавиться от отрицательных частот (т. е. от синусов). В самом деле, представим

$$E(t) = \int_{0}^{\infty} E(\omega)e^{i\omega t}d\omega + \int_{-\infty}^{0} E(\omega)e^{i\omega t}d\omega =$$

Заменяя во втором интеграле ω на –ω, имеем

$$= \int_{0}^{\infty} E(\omega)e^{i\omega t}d\omega - \int_{\infty}^{0} E(-\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \int_{0}^{\infty}\left(E(\omega)e^{i\omega t} + E(-\omega)e^{-i\omega t}\right)d\omega.$$

Пользуясь вещественностью $E(t)=E^*(t)$, легко получить равенство $E^*(-\omega)=E(\omega)$. Тогда

$$E(t)=\int_0^\infty\left[E(\omega)e^{i\omega t}+\left(E(\omega)e^{i\omega t}\right)^*\right]d\omega=2\,Re\int_0^\infty E(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Реальную часть интеграла очень часто можно опустить в процессе выкладок, подразумевая брать ее в конце решения.

1.7.2. Модуляция частоты и фазы

Модуляция частоты и фазы определяется зависимостью этих параметров волны от времени $\omega=\omega(t)$ или $\varphi_0=\varphi_0(t)$. Часто изменение этих параметров во времени удобно описывать одной общей зависимостью фазы $\Phi(t)$ от времени. Однако в общем случае временные изменения частоты и фазы приводят к различным спектральным следствиям.

Частотная и фазовая модуляции полностью эквивалентны, когда они изменяются по гармоническому закону. В самом деле, пусть $\Delta\omega$ — амплитуда колебаний частоты, а Ω — частота этих колебаний. Тогда имеем частотную модуляцию:

$$\omega=\omega_0+\Delta\omega Cos\Omega t\,. \tag{1.7.9}$$

Колебания за время t (т. е. волна рассмотренная в точке $\vec{r}=0$, например) наберут следующую фазу:

$$\Phi(t)=\int_0^t\omega(t)dt=\omega_0 t+\frac{\Delta\omega}{\Omega}Sin\Omega t=\omega_0 t+\Delta\Phi Sin\Omega t=\omega_0 t+\varphi_0(t). \tag{1.7.10}$$

Получаем, таким образом, что при гармонических изменениях частоты фаза в (1.7.10) промодулирована по гармоническому закону.

То же можно сказать о спектральном составе промодулированных по частоте или фазе колебаний. Рассматривая тот же пример (1.7.10), запишем уравнение колебаний при условии $\Delta\omega/\Omega<<1$. Как и ранее, в (1.7.1) ограничимся одной точкой $\vec{r}=0$, а вместо *cos* удобнее волну записать через *sin* (т. е. положим $\varphi_0=\pi/2$). Затем разложим в ряд $E(t)$ по малому параметру $\frac{\Delta\omega}{\Omega}Sin\Omega t<<\omega_0 t$ и ограничимся первыми членами разложения:

$$E(t)=E_0 sin\left(\omega_0 t+\frac{\Delta\omega}{\Omega}sin\Omega t\right)\approx E_0 sin\omega_0 t+E_0\frac{\Delta\omega}{\Omega}sin\Omega t cos\omega_0 t+...\approx$$

$$\approx E_0\left[sin\omega_0 t+\frac{\Delta\omega}{2\Omega}sin(\omega_0+\Omega)t-\frac{\Delta\omega}{2\Omega}sin(\omega_0-\Omega)t\right].$$

В принципе получаем бесконечный ряд и, следовательно, бесконечный спектр. В первом приближении присутствуют частоты $\omega_0, \omega_0 \pm \Omega$. Эта ситуация похожа на амплитудную модуляцию (например, (1.7.6)), но эта «похожесть» только при малых глубинах модуляции.

В общем случае при негармонической модуляции структура сигналов, промодулированных по частоте и фазе, различна.

1.8. Волновые пакеты. Групповая скорость

1.8.1. Волновые пакеты. Формула Рэлея

Суперпозиция двух и большего числа волн с различными частотами составляет *группу волн*, или *волновой пакет*. Часто под волновым пакетом понимают образование из волн, ограниченное в пространстве (рис. 1.22). К примеру, пакет волн, распространяющийся вдоль оси x, аналитически может быть записан в виде

$$E(x,t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} E(\omega) cos(\omega t - k_\omega x + \varphi_\omega) d\omega, \quad (1.8.1)$$

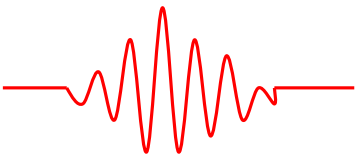


Рис. 1.22

где $\Delta\omega$ — диапазон частот складываемых волн; $E(\omega)$ — амплитуды этих волн. Часто волновой пакет записывают, вводя волновое число k в качестве переменной, а частота рассматривается как функция волнового числа $\omega = \omega(k)$:

$$E(x,t) = \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} E_k e^{-i(\omega t - kx)} dk\,. \quad (1.8.2)$$

Представленные в § 1.4 биения также можно рассматривать как пример простейшего волнового пакета. Напомним выражение (1.4.4), которое получили при сложении двух волн с частотами ω_1 и ω_2 (1.4.3):

$$\begin{aligned} E &= 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) = \\ &= 2E_0 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

В § 1.4 мы считали, что скорости распространения этих двух волн одинаковы, что и справедливо в вакууме

$$c = \omega_1 / k_1 = \omega_2 / k_2\,.$$

Это фазовые скорости волн. Однако в среде скорость электромагнитных волн меньше скорости света $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ и в принципе зависит от частоты, поскольку

реакция среды, т. е. проницаемости ε и μ могут зависеть от частоты электромагнитного поля. Зависимость фазовой скорости волны от частоты называется *дисперсией*. Поэтому в пакетах волн (1.8.1) скорости складываемых волн могут быть различными. В частности, в биениях фазовые скорости двух волн могут быть разными:

$$v_1 = \frac{\omega_1}{k_1}, \qquad v_2 = \frac{\omega_2}{k_2}. \tag{1.8.4}$$

Если дисперсии нет, то огибающая амплитуд движется вместе с волнами, т. е. со скоростью света. Если дисперсия есть, то огибающая движется с иной скоростью, чем скорости движения отдельных волн.

Определение: *скорость движения максимума огибающей амплитуды группы волн или волнового пакета называется групповой скоростью*.

Простейший случай нахождения групповой скорости — для биений — определяется условием постоянства фазы огибающей амплитуды (см. из (1.8.3)):

$$\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2) = \text{const}. \tag{1.8.5}$$

Дифференцируя последнее выражение, находим групповую скорость:

$$v_{гр} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \tag{1.8.6}$$

Если дисперсии нет, то $k_1 - k_2 = (\omega_1 - \omega_2)/c$ и тогда $v_{гр} = c$.

Итак, при наличии дисперсии групповая скорость отличается от фазовой скорости. В результате огибающая амплитуд и слагаемые волны движутся с различными скоростями, что приводит к изменению формы огибающей в процессе распространения волны, т. е. при наличии дисперсии волновой пакет распространяется с изменением своей формы.

Если частоты слагаемых волн ω_1 и ω_2 близки друг к другу, то групповая скорость равна:

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk}, \tag{1.8.7}$$

где $\omega = \omega(k)$. Эта формула справедлива не только для двух волн с бесконечно близкими частотами, но и для произвольного волнового пакета, образованного суперпозицией бесконечного числа волн с близкими частотами, поскольку является дифференциальной.

Найдем связь между групповой и фазовой скоростями. Воспользуемся определениями (1.8.4) и (1.8.7) и подставим частоту из фазовой скорости $\omega = kv$ в групповую скорость:

$$v_{гр} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk}. \qquad (1.8.8)$$

Подставляя $k = 2\pi/\lambda$ и $dk = -2\pi d\lambda/\lambda^2$, получаем окончательно связь групповой скорости и фазовой:

$$v_{гр} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}. \qquad (1.8.9)$$

Это *формула Рэлея*. В зависимости от знака $dv/d\lambda$ групповая скорость может быть меньше, так и больше фазовой (но всегда меньше скорости света в вакууме).

Когда дисперсии нет: $dv/d\lambda = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой $v_{гр} = v$.

Максимум интенсивности (энергии) приходится на максимум огибающей в волновом пакете волн. Поэтому в тех случаях, когда понятие групповой скорости имеет смысл, скорость переноса энергии (и информации) волной равна групповой скорости.

Примечание 1.

1. Понятие групповой скорости неприменимо, когда поглощение среды очень велико (область аномальной дисперсии).
2. При распространении пакета волн в среде с дисперсией в первом приближении можно считать, что максимум и огибающая движутся с одной скоростью — групповой. Однако, в принципе, в пакете волн присутствуют разные частоты, тогда групповые скорости для соседних частот разные. Это приводит к изменению формы огибающей волнового пакета. В среде с дисперсией пакет может меняться по форме с уменьшением по амплитуде, расплываться и т. д.

Примечание 2. *Джон Уильям Рэлей (лорд Рэлей), английский физик, 1842–1919,* Нобелевская премия 1904 г. за открытие аргона.

1.8.2. Пример спектрального разложения

Рассмотрим один из важных примеров спектрального разложения: *цуг синусоидальных волн* или, что то же самое, «оборванная» синусоида (рис. 1.23). Цуг волн — это модельное представление процесса излучения источника электромагнитных волн в виде волнового пакета длительностью τ.

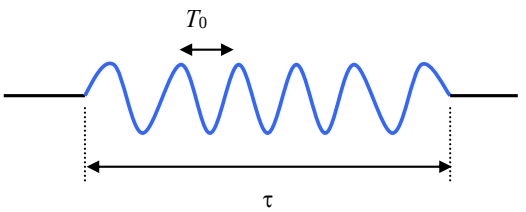


Рис. 1.23

Например, атом, находящийся в возбужденном состоянии, испытывает колебания в течение некоторого времени τ, при этом излучает электромагнитную

энергию и, таким образом, участвует в создании переменного электромагнитного поля.

Для простоты пусть имеем синусоидальную волну

$$E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t),$$

проходящую через фиксированную данную точку ($\vec{r} = 0$) пространства. Пусть также синусоидальные колебания длятся в течение конечного времени τ, при этом T_0 и $\omega_0 = 2\pi/T_0$ — период колебаний и частота колебаний, соответственно (см. рис. 1.23).

Запишем спектральное разложение цуга волн, следуя (1.7.7) и (1.7.8):

$$E(t) = 2\int_0^\infty E(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{1.8.10}$$

с амплитудами, определяющими спектр по формуле

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt\,. \tag{1.8.11}$$

Очевидно, что мы имеем дело со сплошным спектром частот. В нашем случае (1.8.11) запишется в пределах

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{E_0}{2\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} sin\omega_0 t\, e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{4\pi i}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{E_0}{2\pi i}\left(\frac{sin\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau}{\omega_0 - \omega} - \frac{sin\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\tau}{\omega_0 + \omega}\right). \end{aligned} \tag{1.8.12}$$

Подставляя $E(\omega)$ в (1.8.10) и умножая числитель и знаменатель на τ, получаем для реальной части сигнала $E(t)$:

$$E(t) = \frac{\tau E_0}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{sin\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau} - \frac{sin\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\tau}\right) sin\omega t d\omega.$$

При условии $|\omega_0 - \omega| << |\omega_0 + \omega|$ (или иначе в области частот $\omega \sim \omega_0$) вторым слагаемым в (1.8.12) можно пренебречь. Тогда спектр в аналитической форме приобретает следующий вид:

$$E(\omega) \sim \frac{sin\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau} \equiv \frac{sin\alpha}{\alpha}. \tag{1.8.13}$$

Спектр $E(\omega)$ графически изображен на рисунке 1.24. В точках

$$\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau = \pi n$$

происходит обращение в нуль зависимости $E = E(\omega)$. Основная часть спектра находится в области около основной частоты ω_0, причем разброс частот спектра $\Delta\omega$ подчиняется условию (иначе говоря, ширина максимума на его полувысоте):

$$\Delta\omega = |\omega_0 - \omega| \geq \frac{2\pi}{\tau}. \qquad (1.8.14)$$

Таким образом, получаем, что основная часть спектрального диапазона сигнала в виде оборванной синусоиды (цуга волн) определяется условием

$$\Delta\omega \cdot \tau \geq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu \cdot \tau \geq 1. \qquad (1.8.15)$$

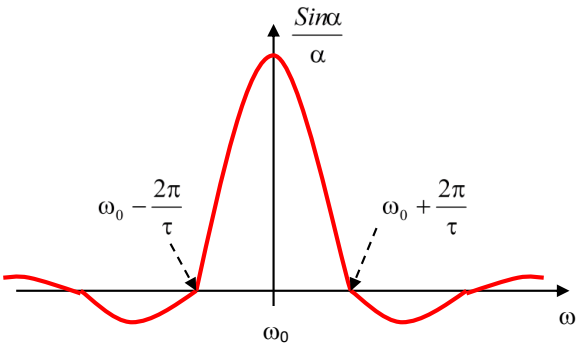


Рис. 1.24

Это важное соотношение между шириной спектра $\Delta\omega$ и длительностью цуга волн τ. Оно имеет самый общий характер (прообраз соотношения неопределенностей в квантовой физике). Чем больше длительность волны τ, т. е. чем ближе синусоида к монохроматической зависимости, тем уже спектр, сосредоточенный около основной частоты ω_0. Наоборот, чем меньше длительность цуга, тем шире спектральный состав волнового пакета.

Аналогичная формула имеет место и для пространственного распределения волнового поля, когда рассматриваем его в определенный зафиксированный момент времени t. В этом случае снова можно рассматривать оборванную синусоиду длительностью Δx, но в координатном пространстве x (рис. 1.25):

$$E(x,t) = E_0 \sin(\omega_0 t - k_0 x).$$

Тогда, разлагая волновое поле $E(x,t)$ по векторам k — волновым числам, получаем соотношения, аналогичные приведенным выше, в которых можно просто поменять частоту ω на волновое число k ($\omega = kv$), а время t — на координату x. Также легко найти, что длина цуга Δx и интервал волновых чисел Δk связаны соотношением неопределенностей:

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq 2\pi. \qquad (1.8.16)$$

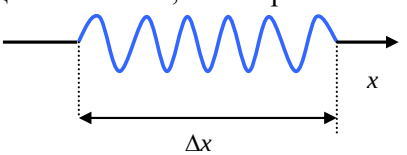


Рис. 1.25

Эти соотношения (1.8.15) и (1.8.16) выражают *принцип неопределенности*, который был также получен В. Гейзенбергом в квантовой механике.

Примечание 3. *Вернер Карл Гейзенберг (Werner Karl Heisenberg), немецкий физик-теоретик, 1901–1976,* один из создателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике (1932) «за создание квантовой механики, приложения которой, в числе прочего, привели к открытию аллотропных форм водорода».

1.9. Преобразования векторов электромагнитного поля

1.9.1. Преобразования компонент электромагнитного поля

Полученные и изученные нами законы электродинамики применимы для описания явлений, которые происходят в инерциальных системах отсчета (ИСО). Известно, что все инерциальные системы отсчета равноправны, поэтому законы всех физических, в том числе электромагнитных, явлений не изменяются при переходе от одной ИСО к другой. Однако легко заметить, что конкретные физические величины, характеризующие электромагнитное поле ($\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$, плотности зарядов ρ и токов $\vec{j}$ и т. д.), будут изменяться при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Поэтому теория электромагнитных явлений должна:

во-первых, установить правила изменения электромагнитных величин при переходе из одной системы отсчета (ИСО) в другую;

во-вторых, показать, что установленные правила пересчета физических величин обеспечивают инвариантность законов электродинамики при изменении системы отсчета;

в-третьих, отыскать инварианты электромагнитного поля.

Пусть имеются две ИСО: система отсчета К и движущаяся относительно нее со скоростью $\vec{v}$ система отсчета К′. При этом оси x и x' координатных систем совмещены и вектор $\vec{v}$ направлен вдоль оси x. Предположим, что в некоторой пространственно-временной точке К системы известны значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Определим, какими будут значения полей $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ в К′ системе отсчета в одной и той же пространственно-временной точке. Напомним, что одной и той же пространственно-временной точкой называют такую точку, координаты и время которой в обеих системах отсчета связаны между собой преобразованиями Лоренца.

Электромагнитные потенциалы, скалярный $\varphi(\vec{r},t)$ и векторный $\vec{A}(\vec{r},t)$, образуют 4-х вектор, что следует из инвариантности уравнений для потенциалов

относительно преобразований Лоренца. Итак, рассмотрим 4-х вектор $\left(\varphi,\vec{A}\right)$ и его преобразования при переходе из системы К в систему К′:

$$\varphi=\frac{\varphi'+\frac{v}{c}A'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma\left(\varphi'+\frac{v}{c}A'_x\right),\ A_y=A'_y,$$
$$A_x=\frac{A'_x+\frac{v}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma\left(A'_x+\frac{v}{c}\varphi'\right),\ A_z=A'_z, \tag{1.9.1}$$

где $\beta=v/c$, $\gamma=\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$. При переходе из системы К′ в К-систему в преобразованиях (1.9.1) меняется направление скорости ($v\to -v$). Вектора электромагнитного поля определяются через потенциалы, как и раньше:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t};\qquad \vec{B}=rot\vec{A}. \tag{1.9.2}$$

Поскольку в (1.9.2) входят частные производные, то, вспоминая преобразования Лоренца для координат и времени:

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma\left(x'+vt'\right),\qquad y=y',$$
$$t=\frac{t'+x'v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma\left(t'+\frac{x'v}{c^2}\right),\qquad z=z' \tag{1.9.3}$$

получим заготовку для частных производных:

$$\frac{\partial x}{\partial x'}=\gamma,\quad \frac{\partial x}{\partial t'}=v\gamma,\quad \frac{\partial t}{\partial t'}=\gamma,\quad \frac{\partial t}{\partial x'}=\frac{v}{c^2}\gamma. \tag{1.9.4}$$

Этими соотношениями воспользуемся при рассмотрении компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при переходе из одной ИСО в другую.

а) Рассмотрим x-ю компоненту магнитного поля $\vec{B}$, пользуясь (1.9.1) и (1.9.3):

$$B'_x=\frac{\partial A'_z}{\partial y'}-\frac{\partial A'_y}{\partial z'}=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=B_x.$$

Таким образом, x-я компонента магнитного поля при переходе из системы К в систему К′ не меняется:

$$B'_x=B_x. \tag{1.9.5}$$

б) Рассмотрим x-ю компоненту электрического поля $\vec{E}$ (пользуясь (1.9.4)):

$$E'_x = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} - \frac{1}{c}\frac{\partial A'_x}{\partial t'} =$$

$$= -\gamma\left\{\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi - \frac{v}{c}A_x\right) + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{v}{c}A_x\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}\left(A_x - \frac{v}{c}\varphi\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}\left(A_x - \frac{v}{c}\varphi\right)\right\} =$$

$$= -\gamma^2\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \cancel{\frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{v}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}} - \frac{v^2}{c^3}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \cancel{\frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \cancel{\frac{v}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}}\right\} =$$

$$= -\gamma^2\left\{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial A_x}{\partial t}\right\} = -\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = E_x.$$

Таким образом, и x-я компонента электрического поля при переходе из системы К в систему К′ также не меняется:

$$E'_x = E_x. \tag{1.9.6}$$

в) y-я компонента вектора $\vec{B}$:

$$B'_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'};$$

$$A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{v}{c}\varphi\right); \qquad A'_z = A_z; \qquad \partial z' = \partial z.$$

$$B'_y = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\gamma\left(A_x - \frac{v}{c}\varphi\right)\right\} - \left\{\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}\right\}A_z = \gamma\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{v}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right) =$$

$$= \gamma\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \gamma\frac{v}{c}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right) = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c}E_z\right);$$

$$B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c}E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.9.7}$$

г) y-я компонента вектора $\vec{E}$:

$$E'_y = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y'} - \frac{1}{c}\frac{\partial A'_y}{\partial t'}; \qquad \varphi' = \gamma\left(\varphi - \frac{v}{c}A_x\right); \qquad A'_y = A_y; \qquad \partial y' = \partial y.$$

$$E'_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\gamma\left(\varphi - \frac{v}{c}A_x\right)\right\} - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}\right)A_y = \gamma\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{v}{c}\frac{\partial A_y}{\partial x}\right) =$$

$$= \gamma\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right) - \gamma\frac{v}{c}\left(-\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \gamma\left(E_y - \frac{v}{c}B_z\right);$$

$$E'_y = \frac{E_y - \frac{v}{c}B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.9.8}$$

д) z-компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ получаем аналогично:

$$E'_z = \frac{E_z + \frac{v}{c}B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c}E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.9.9}$$

Формулы преобразования векторов электромагнитного поля можно также представить через преобразования параллельных и перпендикулярных составляющих поля (относительно движения) в виде:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}; \qquad B'_{\parallel} = B_{\parallel};$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right]}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \qquad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{E}\right]}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{1.9.10}$$

Из уравнений, определяющих законы преобразования векторов электромагнитного поля, следует, что каждый из векторов $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ выражается через комбинацию векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Это свидетельствует о *единой природе электрического и магнитного полей*. Каждая из компонент электромагнитного поля не имеет абсолютного смысла, поэтому разговор об электрическом и магнитном полях может идти лишь в том случае, когда для них указана система отсчета. *Раздельное рассмотрение этих полей возможно тогда и только тогда, когда оба поля являются статическими*.

1.9.2. Электрическое поле движущегося точечного заряда

Рассмотрим задачу о нахождении поля равномерно движущегося точечного заряда, используя для ее решения, полученные в предыдущем пункте формулы.

Свяжем К′ систему отсчета с точечным зарядом q, поместив его в начало координат. В этой системе отсчета напряженность электрического поля $\vec{E}'$ заряда q описывается законом Кулона, а магнитное поле отсутствует:

$$\vec{E}' = \frac{q\vec{r}'}{r'^3},$$

$$\vec{B}' = 0, \tag{1.9.11}$$

где $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ — квадрат расстояния до точки наблюдения.

В К системе отсчета заряд q движется со скоростью v в положительном направлении оси x. Найдем поле заряда q в системе отсчета К, преобразуя чисто кулоновское сферическое поле $\vec{E}'$ по полученным выше правилам. Пусть соответствующие оси координатных систем К и К′ в момент $t' = t = 0$ совпадают. Тогда, согласно формулам преобразования (1.9.6) и (1.9.3), имеем

$$E_x = E'_x = \frac{qx'}{r'^3} = \frac{q\gamma(x - vt)}{\left[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \tag{1.9.12}$$

С другой стороны, $vt = x_q$ — координата заряда q в К системе, поэтому

$$E_x = q\frac{\gamma(x - x_q)}{\left[\gamma^2(x-x_q)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \tag{1.9.13}$$

Другие компоненты поля в К системе (при $\vec{B}' = 0$ в (1.9.10)) равны, соответственно:

$$E_y = \gamma E'_y = \frac{q\gamma y}{\left[\gamma^2 (x - x_q)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}},$$

$$E_z = \gamma E'_z = \frac{q\gamma z}{\left[\gamma^2 (x - x_q)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \qquad (1.9.14)$$

Таким образом, в К системе отсчета поле заряда q, движущегося равномерно и прямолинейно, не меняет свою конфигурацию, а меняется лишь положение этой конфигурации относительно неподвижной К системы, т. е. поле неизменной конфигурации движется вместе с создающим его зарядом.

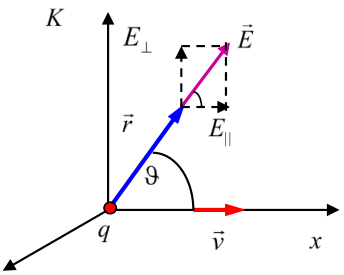


Рис. 1.26

Определим конфигурацию поля для момента времени, когда заряд находится в начале координат К системы отсчета, т. е. при $x_q = 0$:

$$\vec{E} = q\frac{\gamma \vec{r}}{\left[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}, \qquad (1.9.15)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, направленный из местонахождения заряда q, в точку, в которой определяется поле $\vec{E}$. Напряженность поля $\vec{E}$ направлена вдоль вектора $\vec{r}$, и ее значение зависит от направления вектора $\vec{r}$. Пусть ϑ — угол между направлениями скорости $\vec{v}$ движения заряда q в K системе и радиус-вектора $\vec{r}$. Тогда

$$x = r\cos\vartheta; \quad y^2 + z^2 = r^2 \sin^2\vartheta.$$

Отсюда получаем

$$\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 r^2 \left(\cos^2\vartheta + \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\vartheta\right) =$$

$$= \gamma^2 r^2 [1 - (1 - 1 + \beta^2)\sin^2\vartheta] = \gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2\vartheta).$$

Поэтому выражение для электрического поля свободно движущегося заряда принимает вид

$$\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3}\frac{1 - \beta^2}{\left(1 - \beta^2 \sin^2\vartheta\right)^{3/2}}. \qquad (1.9.16)$$

Отличие электрического поля свободно движущегося заряда q от сферически симметричного поля такого же неподвижного заряда сводится к появлению зависимости поля $\vec{E}$ движущегося заряда от направления, задаваемого радиус-вектором $\vec{r}$.

Поле в направлении движения заряда ($\vartheta = 0$; π) равно

$$E_{||} = \frac{q}{r^2}\left(1 - \beta^2\right). \qquad (1.9.17)$$

В направлении, перпендикулярном вектору скорости $\vec{v}$ $(\vartheta = \pm\pi/2)$:

$$E_{\perp} = \frac{q}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.9.18)$$

Очевидно, что зависимость напряженности поля $\vec{E}$ от направления тем сильнее, чем выше скорость движения заряда. При релятивистских скоростях ($\beta \approx 1$) поле концентрируется вблизи плоскости, проведенной через заряд q и перпендикулярной скорости его движения $\vec{v}$ (рис. 1.27).

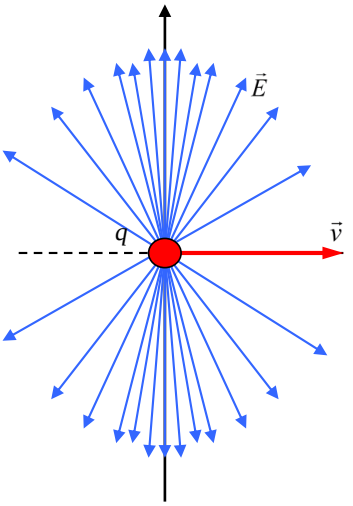


Рис. 1.27

В К′ системе отсчета индукция магнитного поля $\vec{B}' = 0$. В системе отсчета К магнитное поле $\vec{B}$ определяется с помощью полученных выше формул преобразования. В нерелятивистском случае ($\gamma \approx 1$):

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{E}\right]. \qquad (1.9.19)$$

При скоростях порядка скорости света поле вектора $\vec{B}$ определяется выражением

$$\vec{B} = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left[\vec{v},\vec{E}\right]. \qquad (1.9.20)$$

Видно, что линии вектора магнитной индукции образуют концентрические окружности с центром на оси x, вдоль которой движется заряд.

1.9.3. Инварианты электромагнитного поля

Итак, при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую векторы электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изменяются. Как мы видели выше, мыслима такая ситуация, когда в некоторой системе отсчета отличны от нуля обе компоненты электромагнитного поля, а в другой имеется только электрическое поле.

В то же время плоская электромагнитная волна характеризуется вполне определенными свойствами: векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны, а их модули связаны соотношением $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$ (в вакууме $E = H$). Можно задать вопрос — сохраняются ли свойства векторов электромагнитного поля при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую? Это принципиальный вопрос. Если сохраняются, то понятие плоской электромагнитной волны является релятивистски инвариантным, отражающим внутренние свойства электромагнитного поля волны. В противном же случае, это понятие не определяет объективно существующего физического объекта, а зависит от случайного выбора системы отсчета.

Полученные нами правила преобразований позволяют убедиться, что векторы напряженности электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, удовлетворяющие условиям, вытекающим из свойств плоской волны, в одной системе отсчета, удовлетворяют этим условиям и в другой системе отсчета.

Таким образом, *плоская электромагнитная волна является релятивистки инвариантным понятием, определяющим объективно существующий физический объект.*

Мы не будем останавливаться на проверке этого частного утверждения, а проанализируем общий вопрос об инвариантах электромагнитного поля, ответ на который, наряду с обоснованием инвариантности плоской волны, позволит получить многие другие важные выводы. Другими словами, возникает вопрос об инвариантных, т. е. не зависящих от выбора системы отсчета, количественных характеристиках электромагнитного поля. Безусловно, первым в числе таких характеристик следует отметить электрический заряд q, величина которого не зависит от выбора системы отсчета.

Далее под инвариантами преобразований электромагнитного поля мы будем понимать величины, составленные из векторов поля и не изменяющие своих значений при переходах между инерциальными системами отсчета. Вообще говоря, есть способы нахождения инвариантов преобразований. Однако, мы поступим иначе и прямым вычислением покажем, что *инвариантами электромагнитного поля* являются приведенные ниже комбинации векторов поля.

$$I_1 = B^2 - E^2; \qquad I_1' = H^2 - D^2. \tag{1.9.21}$$

$$I_2 = \vec{B}\cdot\vec{E}; \qquad I_2' = \vec{H}\cdot\vec{D}. \tag{1.9.22}$$

$$I_3 = \vec{H}\cdot\vec{B} - \vec{D}\cdot\vec{E}. \tag{1.9.23}$$

Убедимся в этом, используя правила преобразования полей. Например, рассмотрим (1.9.21), при этом воспользуемся преобразованиями (1.9.7)–(1.9.9):

$$B^2 - E^2 = \left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right) - \left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) = B_x'^2 + \frac{\left(B_y' - \frac{v}{c}E_z'\right)^2 + \left(B_z' + \frac{v}{c}E_y'\right)^2}{1 - v^2/c^2} -$$

$$-E_x'^2 - \frac{\left(E_y' + \frac{v}{c}B_z'\right)^2 + \left(E_z' - \frac{v}{c}B_y'\right)^2}{1 - v^2/c^2} = B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2 + \frac{-2\frac{v}{c}B_y'E_z' + 2\frac{v}{c}B_z'E_y'}{1 - v^2/c^2} -$$

$$-E_x'^2 - E_y'^2 - E_z'^2 - \frac{2\frac{v}{c}E_y'B_z' - 2\frac{v}{c}E_z'B_y'}{1 - v^2/c^2} = B'^2 - E'^2 = inv.$$

Далее получим (1.9.22):

$$\vec{B}\cdot\vec{E}=B_xE_x+B_yE_y+B_zE_z=B'_xE'_x+\frac{\left(B'_y-\frac{v}{c}E'_z\right)\left(E'_y+\frac{v}{c}B'_z\right)}{1-v^2/c^2}+$$

$$+\frac{\left(B'_z+\frac{v}{c}E'_y\right)\left(E'_z-\frac{v}{c}B'_y\right)}{1-v^2/c^2}=B'_x\cdot E'_x+\frac{B'_yE'_y-\frac{v^2}{c^2}B'_yE'_y}{1-v^2/c^2}+\frac{B'_zE'_z-\frac{v^2}{c^2}B'_zE'_z}{1-v^2/c^2}+$$

$$+\frac{\frac{v}{c}\left(B'_yB'_z-E'_yE'_z\right)}{1-v^2/c^2}+\frac{-\frac{v}{c}\left(B'_yB'_z-E'_yE'_z\right)}{1-v^2/c^2}=\vec{B}'\cdot\vec{E}'=inv.$$

Аналогично устанавливается инвариантность комбинации векторов электромагнитного поля (1.9.23).

Анализ инвариантов электромагнитного поля позволяет сделать следующие выводы:

1) если в некоторой инерциальной системе отсчета (ИСО) $B^2>E^2$ и $\vec{E}\perp\vec{B}$, то можно выбрать такую систему отсчета, где электрическое поле отсутствует, а магнитное поле отлично от нуля. Если же условие $\vec{E}\perp\vec{B}$ не выполняется, то такой ИСО не существует;
2) если в некоторой ИСО $B^2<E^2$ и $\vec{E}\perp\vec{B}$, то можно выбрать такую систему отсчета, где магнитное поле отсутствует, а электрическое поле отлично от нуля. Если же условие $\vec{E}\perp\vec{B}$ не выполняется, то такой ИСО не существует;
3) если в какой-либо ИСО имеется только электрическое (магнитное) поле, то при переходе в другую ИСО наблюдаются, вообще говоря, как электрическое, так и магнитное поля, которые перпендикулярны друг другу;
4) плоская волна, для которой $E=B$ и $\vec{E}\perp\vec{B}$ ($I_1=0$ и $I_2=0$), остается плоской волной во всех ИСО.

Из последнего вывода — об инвариантности плоской волны — следует, что если поле в некоторой пространственно-временной точке равно нулю, то это утверждение объективно и не зависит от того, в какой ИСО рассматривается эта точка. Иначе говоря, векторы электромагнитного поля в данной пространственно-временной точке во всех системах отсчета равны нулю, т. е. *фаза волны во всех системах отсчета одинакова, что доказывает ее инвариантность*.

Инвариантность фазы также следует из формул преобразования векторов поля. Фаза волны может быть представлена в виде

$$\omega t-\vec{k}\vec{r}=\underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k_0}\cdot\underbrace{ct}_{x_0}-k_xx-k_yy-k_zz=inv. \qquad (1.9.24)$$

Выражение (1.9.24) для фазы представляет собой скалярное произведение двух четырех векторов: 4-мерного волнового вектора $\left(\omega/c, \vec{k}\right)$ и 4-мерного радиус-вектора $\left(ct, \vec{r}\right)$. Скалярное произведение двух 4-мерных векторов, как и квадрат 4-мерного вектора, есть инвариантная величина, не меняющаяся при переходе из одной ИСО в другую.

Ранее мы уже вводили 4-мерный волновой вектор $\left(\omega/c, \vec{k}\right)$, когда рассматривали эффект Доплера в курсе «Механика» (§ 2.5 в [1]), а также когда вводили 4-мерный вектор фотона $\left(\hbar\omega/c, \vec{p} = \hbar\vec{k}\right)$ (§ 2.8 в [1]). Компоненты этих векторов отличаются только постоянным множителем — постоянной Планка. Поэтому так же как для фотона квадрат 4-мерного вектора $\left(\omega/c, \vec{k}\right)$ есть инвариантная величина, равная нулю:

$$\omega^2/c^2 - k^2 = inv = 0\,.$$

При переходе из одной системы отсчета в другую величины, образующие 4^x-вектор, будут изменяться в соответствии с преобразованиями Лоренца. Если система отсчета K′ движется со скоростью v в направлении оси x неподвижной K системы, то получаем следующие преобразования компонент 4-мерного вектора:

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c}k_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad k'_x = \frac{k_x - \frac{v}{c}\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad k'_y = k_y; \qquad k'_z = k_z. \qquad (1.9.25)$$

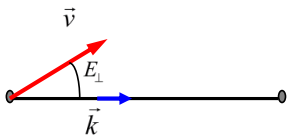


Рис. 1.28

Пусть ϑ — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{k}$, т. е. между направлением движения системы-источника и направлением наблюдения волны (см. рис. 1.28 и 1.29), тогда из (1.9.25) имеем

$$\omega' = \frac{\omega - vk\cos\vartheta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (1.9.26)$$

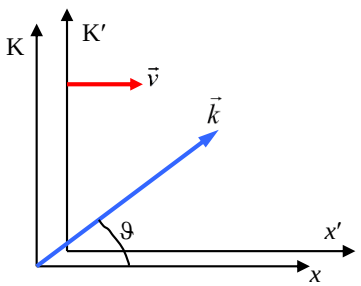


Рис. 1.29

где $k = \omega/c$. Таким образом получаем, что если ω — частота электромагнитных колебаний, излучаемых неподвижным в K системе отсчета источником, то ω' — частота колебаний, воспринимаемых приемником, движущимся вместе с системой K′ со скоростью v. Излучаемая источником частота ω может быть найдена по измеренной приемником частоте ω' в системе K′ по формуле

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c} cos\vartheta}. \qquad (1.9.27)$$

Получили снова эффект Доплера, который ранее нами рассматривался в релятивистской механике (§ 2.5 в [1]).

Напомним, например, продольный эффект Доплера. Пусть свет распространяется вдоль положительного направления оси x, тогда $cos\vartheta = 1$. Тогда, если частота света в системе К равна ω, то воспринимаемая в системе К′ частота равна

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}, \qquad (1.9.28)$$

т. е. меньше, чем излучаемая частота.

Пусть свет распространяется вдоль отрицательного направления оси x, тогда $cos\vartheta = -1$, т. е. свет распространяется навстречу приемнику в системе К′. Тогда воспринимаемая частота в системе К′ равна

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \qquad (1.9.29)$$

Воспринимаемая частота в К′ системе больше излучаемой в системе К.

Поперечный эффект Доплера, когда направления движения системы К′ перпендикулярно распространению света:

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (1.9.30)$$

Стоит напомнить также, что если продольный эффект Доплера проявляется и в нерелятивистской механике, то поперечный эффект — чисто релятивистский эффект.

1.10. Испускание электромагнитных волн

1.10.1. Излучение точечного заряда

До сих пор, изучая свойства электромагнитных волн, мы не задавались вопросом, как возникают такие волны. Рассматривая поле свободно движущегося заряда, мы нашли, что такой заряд не излучает — всегда в любом направлении имеются только тангенциальные составляющие поля вектора $\vec{E}$ ($E_\perp$ отсутствует).

Испускание электромагнитных волн происходит при ускоренном движении электрических зарядов.

Это утверждение, строго говоря, относится к движению заряда в вакууме. В веществе излучение возможно и при равномерном движении заряда, когда скорость заряженной частицы больше фазовой скорости света в данной среде. Это так называемый *эффект Вавилова — Черенкова*.

Рассмотрим точечный заряд q, который до момента времени $t = 0$ ($-\infty < t < 0$) покоился вначале координат. При этом его электрическое поле изображалось радиальными силовыми линиями, выходящими из начала координат. Пусть в момент времени $t = 0$ этот заряд под действием какой-либо внешней силы начинает двигаться с постоянным ускорением a в направлении оси x. По истечении короткого промежутка времени τ действие этой силы прекращается, так что дальнейшее движение заряда происходит равномерно со скоростью $v = a\tau$, приобретенной к концу периода ускорения.

Представим картину силовых линий электрического поля, которое создается движущимся зарядом, спустя большой, по сравнению со временем ускорения τ, промежуток времени t ($t >> \tau$). В точки, лежащие за пределами сферы радиусом ct (т. е. на расстояниях $r > ct$, центр сферы в начале координат), еще не дошла «информация» о том, что в момент времени $t = 0$ заряд начал движение. Поэтому за пределами этой сферы поле такое же, каким оно было при неподвижном заряде.

$$\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3}. \qquad (1.10.1)$$

Внутри сферы радиусом $c(t - \tau)$ электрическое поле является полем равномерно движущегося заряда, так как, начиная с момента времени $t = \tau$, заряд движется уже с постоянной скоростью v и согласно (1.9.16) имеем

$$E = \frac{q}{r'^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2 \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}}, \qquad (1.10.2)$$

где r' — расстояние, отсчитываемое от мгновенного положения заряда, движущегося со скоростью v. Рассмотрим для простоты случай малых скоростей заряда $v << c$, т. е. пренебрежем релятивистскими поправками. Тогда поле внутри сферы можно положить равным $E = q/r'^2$. То есть при нерелятивистских скоростях движения заряда электрическое поле в момент времени t может быть найдено как поле неподвижного точечного заряда q, находящегося в той точке, через которую в момент времени t проходит движущийся заряд. В моменты времени $t >> \tau$ можно считать, что движущийся заряд находится на расстоянии vt от начала координат (пренебрегая величиной $v\tau/2$ — малым путем, пройденным за время ускорения).

Таким образом, все изменения электрического поля, связанные с ускоренным движением заряда в течение времени τ, заключены внутри тонкого шарового слоя толщиной $c\tau$ (рис. 1.30). В интересующий нас момент времени t наружный радиус слоя равен ct, а внутренний — $c(t - \tau)$.

Картину электрического поля во внутренней области шарового слоя можно найти, учитывая непрерывность силовых линий (так как теорема Гаусса остается справедливой, то число линий сохраняется). Для этого достаточно соединить соответствующие радиальные силовые линии. Вызванная ускоренным движением заряда сферическая область излома силовых линий поля «убегает» от заряда со скоростью c. Изломы на силовых линиях, расположенные между сферами $r = ct$ и $r = c(t - \tau)$, — это и есть поле излучения заряда, т. е. испускаемая ускоренно движущимся зарядом волна, распространяющаяся со скоростью c от источника.

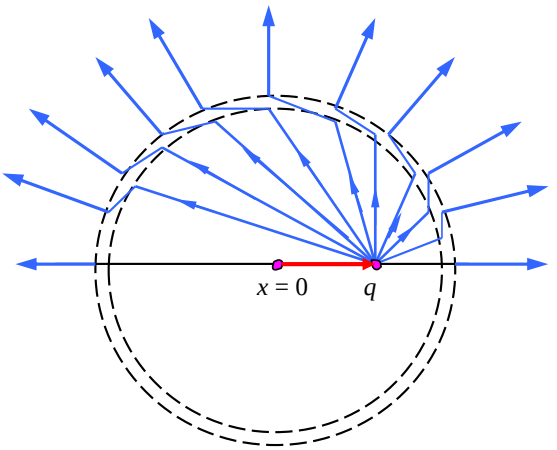


Рис. 1.30

Рассмотрим одну из силовых линий, составляющую угол ϑ с направлением движения заряда (рис. 1.31). Вектор напряженности электрического поля в области излома разложим на две составляющие: радиальную $E_{\parallel}$ и поперечную $E_{\perp}$. Радиальная составляющая $E_{\parallel}$ — это статическое поле, создаваемое неподвижным зарядом q, находящимся в начале координат. Напряженность этого поля на расстоянии $r = ct$ определяется выражением $E_{\parallel} = q/r^2$.

Поперечная составляющая напряженности $E_{\perp}$ — это поле, излучаемое электрическим зарядом во время его ускоренного движения. Поскольку волна распространяется в радиальном направлении, то вектор $\vec{E}_{\perp}$ перпендикулярен направлению распространения волны.

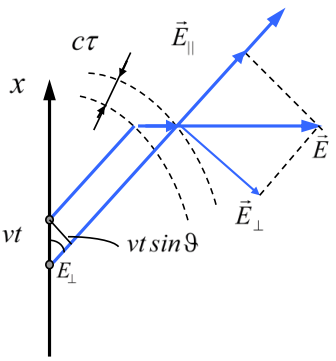


Рис. 1.31

Из подобия треугольников, изображенных на рисунке 1.32, видно, что

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{v_\perp t}{c\tau} = \frac{vt\sin\vartheta}{c\tau}.$$

Учитывая, что $r = ct$, и подставляя $E_\parallel$, получаем

$$E_\perp = \frac{qv\sin\vartheta}{\tau \cdot c^2 r}.$$

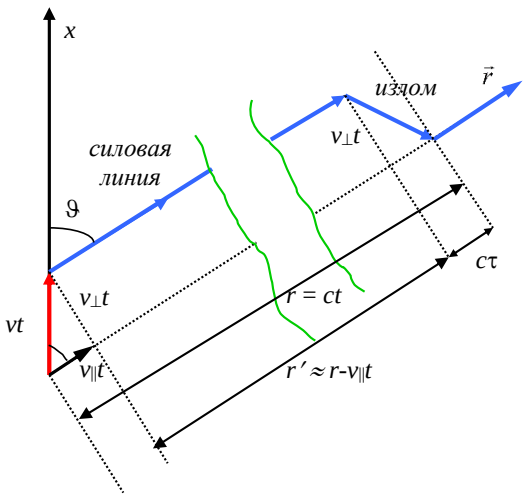


Рис. 1.32

Отношение $v/\tau = a$ представляет собой ускорение, с которым заряд двигался в течение времени от момента 0 до τ, а $a\sin\vartheta = a_\perp$, где $a_\perp$ — поперечная компонента полного ускорения заряда. Тогда для поперечной составляющей поля получаем

$$E_\perp = \frac{qa\sin\vartheta}{c^2 r} = \frac{qa_\perp}{c^2 r}. \quad (1.10.3)$$

Приведенный вывод основан на предположении, что в пустоте (вакууме) любое электромагнитное возмущение распространяется со скоростью c.

Во-первых, обратим внимание на то, что напряженность электрического поля волны $E_\perp$ убывает обратно пропорционально первой степени расстояния r от центра в отличие от напряженности $E_\parallel$ электростатического поля точечного заряда, убывающего как $1/r^2$.

Во-вторых, напряженность $E_\perp$ поля волны в момент времени t в точке наблюдения, находящейся на расстоянии r от источника, зависит от ускорения a заряда q в более ранний $t = 0$ момент времени. Другими словами, волна, излученная движущимся с ускорением зарядом в момент времени $t = 0$, достигает точки наблюдения через промежуток времени, равный r/c.

Предположим, что заряд q все время движется вдоль оси x с некоторым переменным ускорением $a(t)$, оставаясь при этом вблизи начала координат (движение заряда в антенне или в атоме). Тогда электромагнитная волна будет излучаться непрерывно. Напряженность электрического поля волны в точке наблюдения, находящейся на расстоянии r от начала координат, по-прежнему, будет определяться полученным выше выражением, причем поле $E_{изл} = E_\perp$ в момент времени t зависит от ускорения a заряда в более ранний момент времени $t' = t - r/c$:

$$E_{изл}(r,t) = q\frac{a_{\perp}(t')}{c^2 r}. \qquad (1.10.4)$$

Вектор $\vec{E}_{\perp}$ в точке, задаваемой радиус-вектором $\vec{r}$ в момент времени t, направлен противоположно направлению поперечной компоненты ускорения $\vec{a}_{\perp}$ заряда q в момент времени t'. Учтем эти обстоятельства в формуле для излучения:

$$\vec{E}_{изл}(\vec{r},t) = -q\frac{\vec{a}_{\perp}(t')}{c^2 r}; \qquad (1.10.5)$$

$$t' = t - r/c.$$

Так как «время запаздывания» r/c, равное времени прохождения волны от начала координат до точки наблюдения, остается *неизменным*, то для справедливости полученной формулы существенным является предположение, что совершающий ускоренное движение заряд все время остается вблизи начала координат.

Итак, радиальная составляющая поля $E_r = E_{\parallel}$ в перегибе такая же, как и радиальное поле перед перегибом и после перегиба, поэтому она не несет информации. Это поле не излучается и не является частью бегущей волны. Иначе говоря, если бы детектор был настроен на $E_{\parallel}$, то он бы не заметил движение заряда. Поэтому излучение заряда происходит только за счет перпендикулярной составляющей $E_{\perp}$.

Можно рассмотреть излучение заряда q, совершающего гармонические колебания с частотой ω. Тогда для координаты и ускорения заряда имеем:

$$x(t') = x_0 \cos\omega t';$$

$$a(t') = \ddot{x}(t') = -\omega^2 x_0 \cos\omega t' = -\omega^2 x(t'). \qquad (1.10.6)$$

При таком движении заряд излучает монохроматическую волну частоты ω. Поверхности постоянной фазы

$$\omega \cdot t' = \omega \cdot (t - r/c) = \omega t - kr = \text{const},$$

где $k = \omega/c$, представляют собой сферы с центрами в начале координат, расширяющиеся со скоростью $c = \omega/k$. Расстояние, на которое перемещается поверхность постоянной фазы за время, равное периоду колебаний заряда $T = 2\pi/\omega$, является длиной волны $\lambda = cT = 2\pi/k$.

Выражение (1.10.5), определяющее поле излучения ускоренно движущегося заряда, применимо для описания излучения осциллирующего заряда, если амплитуда его осцилляций x_0 мала по сравнению с длиной волны: $x_0 << \lambda$. Только в этом случае время запаздывания можно считать неизменным и полагать равным r/c. Это же условие можно сформулировать как требование, чтобы скорость заряда была много меньше скорости света $v << c$. Такое требование позволяет избежать трудностей, связанных с наложением в точке наблюдения

вкладов в поле излучения волн, испущенных в различные более ранние моменты времени t'.

Такой излучатель принято называть *электрическим дипольным осциллятором*, а испускаемые им волны — *дипольным* излучением.

1.10.2. Мощность излучения

Рассмотрим ускоренно движущийся (нерелятивистский $v << c$) заряд в некоторой окрестности своего начального положения. Это может быть заряд в антенне или в атоме. В то же время считаем, что точка наблюдения находится далеко от этой области. Например, наблюдаем на расстоянии 10^{-5} см при размерах атома ~10^{-8} см.

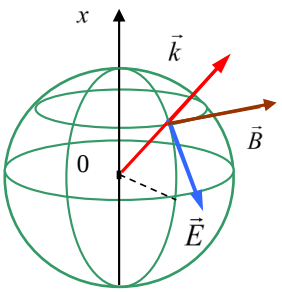


Рис. 1.33

Как мы видели в предыдущем пункте, при таком движении заряда испускается сферически симметричная волна, которую можно записать в виде (рис. 1.33):

$$E(\vec{r},t)=\frac{E_0}{r}e^{-i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)}. \qquad (1.10.7)$$

Однако на больших расстояниях от $\vec{E}$ источника, т. е. в волновой зоне, где $r >> \lambda$, можно отдельные небольшие участки сферической поверхности рассматривать как плоскости. Если размеры этих участков велики по сравнению с длиной волны, то к ним применимы результаты, полученные при рассмотрении плоских волн. В частности, это позволяет сразу же определить магнитное поле $\vec{B}$ в интересующей нас области пространства. Если для каждой точки пространства ввести волновой вектор $\vec{k}$, направленный радиально из начала координат, то векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{k}$ образуют правую тройку векторов в соответствии с соотношением для плоской волны (1.1.24) $\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\frac{\vec{k}}{k},\vec{E}\right]$. В вакууме ε = μ = 1 и $\vec{B}=\vec{H}$; поэтому можно записать

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\left[\frac{\vec{r}}{r},\vec{E}\right],$$

где вектор $\vec{r}$ задает направление распространения волны.

Таким образом, вектор $\vec{E}$ направлен по касательной к меридиану, а вектор $\vec{B}$ — по касательной к параллели. В сферической системе координат векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ имеют следующие проекции (рис. 1.34):

$$E_r=0; \quad E_\vartheta=\frac{q\ddot{x}\sin\vartheta}{c^2 r}; \quad E_\varphi=0. \qquad (1.10.8)$$

$$B_r=0; \quad B_\vartheta=0; \quad B_\varphi=\frac{q\ddot{x}\sin\vartheta}{c^2 r}. \qquad (1.10.9)$$

Вектор плотности потока энергии, переносимой волной, определяется вектором Пойнтинга $\vec{S}(\vec{r},t)$:

$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{B}\right]=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\left[\frac{\vec{r}}{r},\vec{E}\right]\right]=\frac{c}{4\pi}E^2\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (1.10.10)$$

Вектор плотности потока энергии направлен, как и ожидалось, по радиус-вектору. Подставляя $E=E_{изл}$ из (1.10.5), получаем

$$\vec{S}(\vec{r},t)=\frac{c}{4\pi}\left[-q\frac{a_\perp(t')}{c^2 r}\right]^2\frac{\vec{r}}{r}=\frac{q^2}{c^3}\left[a_\perp(t')\right]^2\frac{\vec{r}}{4\pi r^3}. \qquad (1.10.11)$$

Таким образом, поток энергии в волновой зоне осциллятора имеет в каждой точке радиальное направление (т. е. направление вектора Пойнтинга $\vec{S}$ в каждой точке волновой зоны совпадает с направлением радиус-вектора $\vec{r}$) и убывает с расстоянием пропорционально обратному квадрату радиуса.

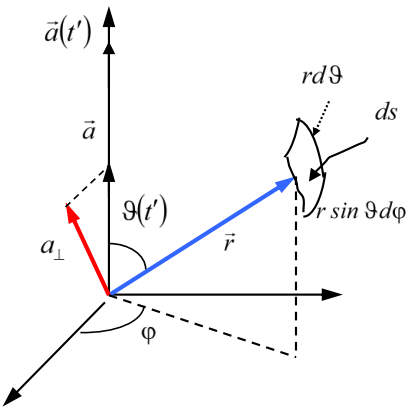


Рис. 1.34

Если записать выражение (1.10.11) в виде (рис. 1.34):

$$\vec{S}(\vec{r},t)=\frac{q^2}{c^3}a^2(t')\sin^2\vartheta\frac{\vec{r}}{4\pi r^3}, \qquad (1.10.12)$$

то становится очевидным, что зависимость интенсивности от направления определяется множителем $\sin^2\vartheta$.

Максимальная интенсивность наблюдается при угле $\vartheta=\pi/2$ в экваториальной плоскости, т. е. *максимум интенсивности излучения соответствует направлению, перпендикулярному направлению ускорения (осцилляций) заряда, а вдоль этого направления* ($\vartheta = 0$) *энергия не излучается*.

Угловое распределение энергии, излучаемой движущимся или осциллирующим зарядом, можно проиллюстрировать с помощью «*диаграммы направленности*» (рис. 1.35). Длина отрезка, проведенного из начала координат до пересечения с линией $r\cdot\sin^2\vartheta$ (пунктирный отрезок на рис. 1.35), пропорциональна интенсивности распространяющейся в данном направлении волны. Распределение интенсивности по направлениям в пространстве. Характеризуется поверхностью, которая получается вращением кривой $r\cdot\sin^2\vartheta$ вокруг оси x.

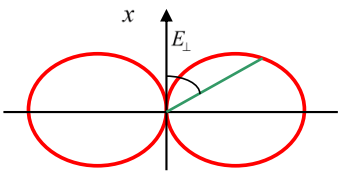


Рис. 1.35

Найдем значение мощности осциллятора, излучаемой в направлении, задаваемом углом ϑ. Рассмотрим площадку, расположенную на расстоянии r и под углом ϑ от начала координат. Поток энергии через выбранную площадку равен $\vec{S}d\vec{s} = dP$, где dP — мощность излучения, т. е. энергия, проходящая через элементарную площадку ds в единицу времени.

$$dP(\vec{r},t) = \left|\vec{S}(\vec{r},t)\right| ds = \frac{q^2}{c^3}\left[a_\perp(t')\right]^2 \frac{ds}{4\pi r^2}. \qquad (1.10.13)$$

Пусть $\vartheta(t')$ — угол между мгновенным значением ускорения $a(t')$ в «ранний» момент времени t' и постоянным направлением $\vec{r}$, проведенным из окрестности заряда q в точку наблюдения (на площадку ds). Тогда $a_\perp^2(t') = a^2(t') sin^2\,\vartheta(t')$. Таким образом, мощность, излучаемая осциллятором в определенном направлении $\vartheta(t')$, и проходящая через площадку ds в момент времени t' равна

$$dP(\vec{r},t) = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') sin^2\,\vartheta(t') \frac{ds}{4\pi r^2}. \qquad (1.10.14)$$

Сосчитаем полную (мгновенную) мощность, излучаемую осциллятором во всех направлениях (фиксируем t' и r и интегрируем по всем направлениям):

$$P(r,t) = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} r d\varphi \int_0^{\pi} r\, sin^2\,\vartheta\, sin\,\vartheta d\vartheta = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(1 - cos^2\,\vartheta\right) d\left(-cos\,\vartheta\right) = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3} a^2(t').$$

Итак, мы получаем знаменитую формулу, определяющую полную мощность излучения ускоренного заряда:

$$P(t) = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3} a^2(t'); \qquad (1.10.15)$$

$$t' = t - \frac{r}{c}.$$

Основные полученные результаты можно сформулировать следующим образом:

1) мощность излучения пропорциональна квадрату ускорения заряда;
2) мощность излучения не зависит от расстояния до заряда, т. е. через любую охватывающую осциллятор замкнутую поверхность за единицу времени протекает одинаковая энергия. Этот результат может быть объяснен тем, что площадь поверхности $\sim r^2$, а плотность потока $\sim 1/r^2$ (поперечная составляющая напряженности поля $E_\perp$ убывает обратно пропорционально расстоянию r);
3) мощность излучения в данном направлении зависит от угла между этим направлением и направлением ускорения заряда.

Примечание 1. На самом деле точное решение уравнений Максвелла дает излучение полей, которые спадают не только как ~1/r, но и как ~1/r^2 и ~1/r^3 и т. д., которые на больших расстояниях не вносят большого вклада. Однако эти поля вносят свой вклад, и часто преобладающий на малых расстояниях, в так называемой ближней зоне.

1.10.3. Излучение электрического диполя

Наряду с осциллирующим зарядом q в начале координат может быть находится покоящийся заряд $-q$, образующий вместе с зарядом q нейтральную систему — электрический диполь с осциллирующим дипольным моментом $p(t) = qx(t)$. Внесение неподвижного заряда $-q$ приведет к изменению радиальной составляющей поля $E_{\|}$, которая будет убывать с расстоянием быстрее, чем в уже рассмотренной нами картине поля, создаваемого одним зарядом q. Однако на больших расстояниях от источника, где сравнительно медленно (~1/r) убывающее поперечное поле излучения $E_{\perp}$ значительно превосходит радиальное поле $E_{\|}$ (в волновой зоне, т. е. при $r >> \lambda$) формула (1.10.5) применима и к полю излучения диполя с дипольным моментом $p(t) = qx(t)$:

$$E_{изл}(r,t) = \frac{\ddot{p}(t')}{c^2 r} \sin\vartheta . \qquad (1.10.16)$$

При этом безразлично, чем обусловлены осцилляции дипольного момента: изменением расстояния между зарядами q и $-q$ по закону

$$x(t') = x_0 \cos\omega t' ,$$

при неизменной их величине или изменением зарядов по закону

$$q(t') = q_0 \cos\omega t'$$

при неизменном расстоянии между ними.

Первый случай важен как классическая модель электромагнитного излучателя света в оптике. Оказывается, что электрический дипольный осциллятор как модель излучающей атомной системы в ряде случаев приводит к подтверждающимся на опыте результатам.

Второй случай соответствует простым антеннам, применяемым в радиотехнике. Поле излучения в волновой зоне можно находить, заменяя антенну эквивалентным дипольным осциллятором.

Важно отметить, что поле излучения дипольного осциллятора, представляя собой сферическую волну, в то же время сферической симметрией не обладает. В волновой зоне поверхности постоянной фазы действительно сферические, однако, модули векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в разных точках сферы различны, так как они зависят от полярного угла ϑ. Поэтому *поле поперечной сферической волны не может быть сферически симметричным*.

Осциллирующий диполь излучает в единицу времени в элементарный телесный угол dΩ энергию

$$dP = \frac{q^2}{c^3}\left\langle a^2(t')\right\rangle sin^2\,\vartheta\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{q^2}{c^3}\omega^4\left\langle x^2(t')\right\rangle sin^2\,\vartheta\frac{d\Omega}{4\pi}. \qquad (1.10.17)$$

Тогда полная излучаемая диполем мощность

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\omega^4\left\langle x^2(t')\right\rangle = \frac{2}{3}\frac{1}{c^3}\left\langle \ddot{p}^2(t')\right\rangle = \frac{2}{3}\frac{\ddot{p}^2(t)}{c^3}. \qquad (1.10.18)$$

Полученный результат заслуживает обсуждения. Излучаемая осциллятором мощность пропорциональна квадрату амплитуды его дипольного момента и четвертой степени частоты, или обратно пропорциональна четвертой степени длины волны. Этот закон позволяет объяснить многие явления, связанные с рассеянием электромагнитных волн в веществе. Например, голубой цвет неба объясняется тем, что короткие волны рассеиваются сильнее, чем длинные. А красный цвет Солнца на закате появляется из-за того, что при прохождении прямого пучка света через толщу атмосферы голубые лучи рассеиваются значительно сильнее, чем красные.

Примечание 2. *Сергей Иванович Вавилов, русский физик, 1891–1951.*

Павел Алексеевич Черенков, русский физик, 1904–1990, Нобелевская премия за открытие эффекта свечения веществ под действием заряженных частиц сверхсветовой скорости в веществе, 1958 г. Совместно с И. Е. Таммом и И. М. Франком.

Глава 2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ

2.1. Интерференция когерентных волн

2.1.1. Условия проявления интерференции

Интерференция волн — сложение в пространстве двух или нескольких волн, при котором в разных точках пространства получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны.

Сложение электромагнитных волн рассматривалось ранее в главе 1 (§ 1.4, 1.5) как суперпозиция волн, распространяющихся в одном направлении (биения, стоячие волны). Под интерференцией рассматривается исследование или наблюдение не по распределению амплитуды E, а по распределению энергии, причем усредненному по времени. Поэтому *под интерференцией света (или э/м волн) часто понимают пространственное перераспределение энергии светового излучения при наложении двух или нескольких волн*. В этой главе мы в основном будем касаться оптического диапазона электромагнитных волн, хотя общие соотношения справедливы для всего диапазона.

Электромагнитная энергия, приходящая на единичную площадку за единицу времени определяется вектором Пойнтинга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right].$$

С плотностью потока электромагнитной энергии связаны другие энергетические величины такие как лучистый и световой поток, яркость, освещенность, которые часто используются в фотометрии. Однако в этой части курса при описании явлений интерференции нас будет интересовать в основном относительное распределение (перераспределение) световой энергии W или плотности потока энергии $\vec{S}$, которое наблюдается при сложении электромагнитных волн.

В исследовании явления интерференции вводят энергетическую величину — *интенсивность* света или электромагнитных колебаний. Вводят ее поразному: либо как среднее по времени от вектора плотности потока $<\vec{S}>$, либо без всяких дополнительных коэффициентов как величину пропорциональную $\sim<E^2>$. Поскольку в этой главе нас интересуют относительные интенсивности света, то в настоящем рассмотрении коэффициентами можно пренебречь и положить, что интенсивность с точностью до постоянных просто равна среднему квадрату напряженности электромагнитного поля:

$$I = <E^2>.$$

Пусть в некоторой точке одновременно возбуждаются два колебания от двух электромагнитных волн $E_1(\vec{r},t)$ и $E_2(\vec{r},t)$. Результирующее поле определяется как сумма напряженностей электрических полей, а интенсивность — как квадрат суммы:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad E^2 = \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2 . \qquad (2.1.1)$$

Усредним по времени, так как приборы обладают инерционностью и поэтому показывают картину, усредненную за время их инерционности, которое значительно больше времени атомных процессов:

$$< E^2 > = < E_1^2 > + < E_2^2 > + 2 < \vec{E}_1\vec{E}_2 > . \qquad (2.1.2)$$

Последнее слагаемое в этом выражении представляет собой усредненное по времени наблюдения скалярное произведение напряженностей складывающихся волн и называется обычно *интерференционным членом*. При усреднении по времени возможно два случая.

1. Интерференционный член $2\left\langle \vec{E}_1\vec{E}_2 \right\rangle$ обращается в нуль, при этом результирующая интенсивность равна сумме интенсивностей отдельных волн, иначе говоря, *интерференция отсутствует*:

$$I = \left\langle \vec{E}_1^2 \right\rangle + \left\langle \vec{E}_2^2 \right\rangle = I_1 + I_2 . \qquad (2.1.3)$$

2. Если интерференционный член отличен от нуля $2\left\langle \vec{E}_1\vec{E}_2 \right\rangle \neq 0$, то *имеет место интерференция*. В этом случае полная интенсивность в точке наблюдения равна:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}, \qquad \text{где } I_{12} = 2\left\langle \vec{E}_1\vec{E}_2 \right\rangle . \qquad (2.1.4)$$

Иначе говоря, наличие интерференционного члена приводит к перераспределению интенсивности электромагнитных волн (света) в наблюдаемом пространстве.

Примечание 1. Скалярное произведение $\vec{E}_1\vec{E}_2$ равно нулю, если складываемые волны линейно поляризованы в ортогональных направлениях. Отсутствие интерференции у волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, было обнаружено О. Френелем и Д. Араго в 1816 г. и интерпретировано в 1817 г. Т. Юнгом как доказательство поперечности электромагнитных волн.

Огюстен Жан Френель, французский физик, 1788–1827.
Доменик Франсуа Араго, французский физик, 1786–1853.
Томас Юнг, английский физик, 1773–1829.

Рассмотрим случай, когда интерференция имеет место, т. е. интерференционный член не равен нулю. Пусть складываются две волны с одинаковым направлением колебаний вектора E и одинаковой частоты ω = const, причем амплитуды E_0 и фазы φ зависят от времени (рассматриваем сложение волн в

одной пространственной точке, поэтому можно не писать полностью бегущий множитель или положить $\vec{r} = 0$):

$$E_1(t) = E_{10}(t)\cos(\omega t - \varphi_1(t)),$$

$$E_2(t) = E_{20}(t)\cos(\omega t - \varphi_2(t)). \qquad (2.1.5)$$

Сложим эти колебания в точке наблюдения (характеризуемой радиус-вектором $\vec{r}$). Тогда, как ранее рассматривали в § 1.4, получаем гармоническое колебание той же частоты:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_0(t)cos(\omega t - \varphi_0(t)). \qquad (2.1.6)$$

Выражение для амплитуды и для фазы можно получить, если разложить косинусы в формулах (2.1.5) и (2.1.6):

$$E_{10}\cos\omega t \cdot \cos\varphi_1 + E_{10}\sin\omega t \cdot \sin\varphi_1 + E_{20}\cos\omega t \cdot \cos\varphi_2 + E_{20}\sin\omega t \cdot \sin\varphi_2 =$$
$$= E_0\cos\omega t \cdot \cos\varphi_0 + E_0\sin\omega t \cdot \sin\varphi_0.$$

Далее, в силу произвольности рассматриваемого времени t для выполнения последнего равенства необходимо приравнять отдельно слагаемые при $cos\omega t$ и $sin\omega t$. При этом получим систему двух уравнений, из которых находим амплитуду результирующих колебаний E_0 и фазу φ_0.

Однако амплитуду результирующего колебания проще всего найти, если воспользоваться векторной диаграммой (рис. 2.1), в которой угол между горизонтальной осью и вектором $\vec{E}$ дает значение фазы колебаний в данный момент времени (аналогично диаграммам, рассмотренным в главе 4 «Колебания» [1]). Из рисунка 2.1 получаем:

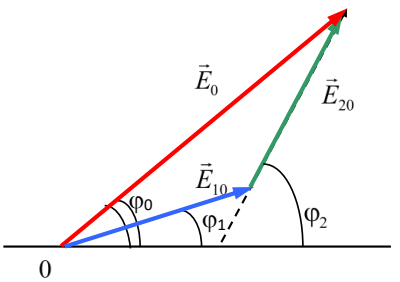


Рис. 2.1

$$E_0^2(t) = E_{10}^2(t) + E_{20}^2(t) + 2E_{10}(t)E_{20}(t)cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)); \qquad (2.1.7a)$$

$$tg\varphi_0 = \frac{E_{10}(t)sin\,\varphi_1(t) + E_{20}(t)sin\,\varphi_2(t)}{E_{10}(t)cos\,\varphi_1(t) + E_{20}(t)cos\,\varphi_2(t)}. \qquad (2.1.7б)$$

Если колебания случайно обрываются или происходит хаотическое изменение их фазы за время измерения (усреднения), то на эксперименте получим всегда сумму интенсивностей (2.1.3). В самом деле, даже если амплитуды складывающихся волн неизменны за время усреднения, то в результате усреднения имеем

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{t}\int_0^t E^2 dt = \langle E_{10}^2 \rangle + \langle E_{20}^2 \rangle + 2E_{10}E_{20}\frac{1}{t}\int_0^t cos[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]dt. \qquad (2.1.8)$$

И при хаотическом изменении фаз $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ получаем, что

$$\int_0^t cos[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]dt = 0\,,$$

и тогда интерференция отсутствует.

Отсюда получаем *необходимое условие* существования (наблюдения) интерференции, а именно: за время усреднения разность фаз $[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]$ должна сохранять свое значение.

Одно из фундаментальных понятий в физике — *когерентные колебания — это колебания, для которых разность фаз за время наблюдения остается неизменной*:

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \text{const}. \qquad (2.1.9)$$

В общем, *когерентностью называют согласованное протекание во времени и в пространстве нескольких колебательных или волновых процессов, протекающее при их сложении*. Степень согласованности может быть различной в пространстве и во времени, поэтому и различают временную и пространственную когерентность. Эти понятия подробнее рассмотрим в следующем параграфе.

2.1.2. Оптическая разность хода

Рассмотрим распространение световых волн в среде. Скорость их распространения зависит от характеристик среды, диэлектрической и магнитной проницаемостей, и определяется

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}\,, \qquad (2.1.10)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ — *показатель преломления* среды.

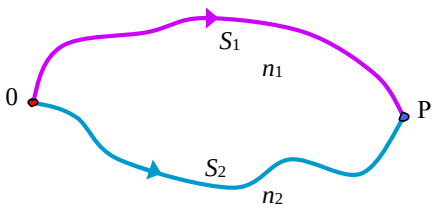


Рис. 2.2

Пусть имеем две когерентные волны. В реальной ситуации для наблюдения интерференции обычно одна волна разделяется на две волны. Например, в точке 0 волны разделяются (рис. 2.2), идут разными путями, а затем они встречаются в точке наблюдения P. Пусть одна волна распространяется в среде с показателем преломления n_1 и проходит путь S_1, а вторая проходит путь S_2 в среде с n_2. Если фазу волны в исходной точке 0 положить равной ωt, то в точке P имеем следующие две волны:

$$\text{первая волна — } E_{10}\cos\left[\omega\left(t - \frac{S_1}{v_1}\right)\right],$$

$$\text{вторая волна — } E_{20}\cos\left[\omega\left(t - \frac{S2}{v_2}\right)\right],$$

где $v_1 = c/n_1$ и $v_2 = c/n_2$ — скорости распространения волн в двух средах. При сложении волн получаем следующее выражение для интерференционного члена:

$$2E_{10}E_{20}\cos[\varphi_2(t)-\varphi_1(t)] = 2E_{10}E_{20}\cos\delta, \qquad (2.1.11)$$

где разность фаз записывается

$$\delta = \varphi_2(t)-\varphi_1(t) = \omega\left(\frac{S_2}{v_2}-\frac{S_1}{v_1}\right) = \frac{\omega}{c}(S_2n_2 - S_1n_1) = \frac{\omega}{c}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta. \qquad (2.1.12)$$

Здесь величина

$$\Delta \equiv n_2S_2 - n_1S_1 \qquad (2.1.13)$$

носит название *оптической разности хода*. В результате сложения волн в точке P в зависимости от величины разности хода получаем различную интенсивность освещенности, например максимум или минимум:

$$\max \quad I = I_{max} \quad \text{при} \quad \cos\delta = 1, \quad \Delta\frac{2\pi}{\lambda} = 2m\pi, \quad \Delta = 2m\frac{\lambda}{2}; \qquad (2.1.14)$$

$$\min \quad I = I_{min} \quad \text{при} \quad \cos\delta = -1, \quad \Delta\frac{2\pi}{\lambda} = (2m+1)\pi, \quad \Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (2.1.15)$$

Таким образом, если оптическая разность хода равна четному числу полуволн, получаем в точке наблюдения максимум интенсивности, а в случае нечетного числа полуволн, имеем минимум.

В дальнейшем при решении задач на определение положений максимумов и минимумов достаточно определять оптическую разность хода волн от двух источников.

2.1.3. Интерференция от двух источников

Рассмотрим случай интерференции волн от двух одинаковых синфазных монохроматических точечных источников S_1 и S_2, расположенных на расстоянии d друг от друга. Точечные источники излучают сферические волны, поэтому направление волнового вектора совпадает с направлением радиус-вектора (см. рис. 2.3). На экране волновые поля перекрываются, и при этом образуется устойчивая картина распределения интенсивности — *интерференционная картина* или интерференционное поле. Если расстояние l до экрана много больше расстояния между источниками ($l >> d$), то амплитуды обеих волн в точке наблюдения практически одинаковы, и напряженность поля в точке P описывается выражением

$$E = E_0\cos(\omega t - k_1r_1) + E_0\cos(\omega t - k_2r_2) = 2E_0\cos\left[\frac{k(r_2-r_1)}{2}\right]\cos\left[\omega t - \frac{k(r_2+r_1)}{2}\right], \qquad (2.1.16)$$

где r_1 и r_2 — расстояния от источников до точки наблюдения. Здесь мы воспользовались тем, что при условии $l >> d$ направления векторов $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ практически одинаковы, а по модулю они равны.

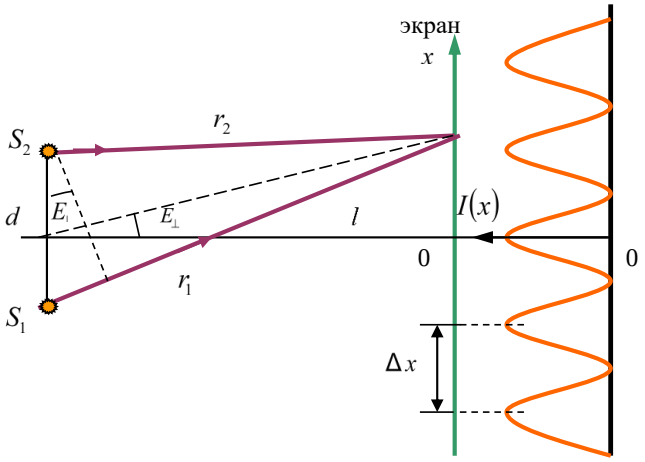


Рис. 2.3

Введем угол ϑ, образуемый направлением на точку наблюдения с «оптической осью» рассматриваемой схемы (перпендикуляром к линии, соединяющей источники). В силу условия $l >> d$ угол ϑ (см. рис. 2.3) практически одинаков для всех векторов, тогда оптическая разность хода этих волн определяется

$$\Delta = nr_2 - nr_1 \approx nd\sin\vartheta.$$

Интенсивность результирующих колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому имеем

$$I = 4I_0\cos^2\left(k_0\Delta/2\right) = 2I_0\left(1+\cos k_0\Delta\right), \qquad (2.1.17)$$

где I_0 — интенсивность колебаний, приходящих от одного источника, а волновое число $k_0 = \omega/c$. Из полученного выражения следует, что минимальная освещенность экрана равна нулю, а максимальная — учетверенному значению освещенности, создаваемой одним источником. Положение максимумов определяется условием

$$k_0\Delta = \pm 2\pi m, \qquad (2.1.18)$$

где целое число $m = 0, 1, 2,...$ называется *порядком интерференции*. Учитывая, что $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, где λ_0 — длина волны в вакууме, условие образования максимумов можно записать в виде

$$\Delta = m\lambda_0, \qquad (2.1.19)$$

т. е. разность хода интерферирующих волн равна целому числу длин волн.

Положение минимумов находится из условия

$$\Delta = nd\sin\vartheta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}. \qquad (2.1.20)$$

Для определения зависимости освещенности экрана от координаты x (см. рис. 2.3) нужно выразить разность хода Δ интерферирующих волн через координату x точки наблюдения P. Практически важным является случай малых значений угла наблюдения ϑ. При $\vartheta << 1$

$$\sin\vartheta \approx tg\vartheta = \frac{x}{l}$$

и разность хода можно представить как

$$\Delta = nd\sin\vartheta \approx \frac{nxd}{l}. \qquad (2.1.21)$$

Подставляя теперь в (2.1.17), получаем

$$I(x) = 2I_0\left[1+\cos\left(k_0 nd\cdot x/l\right)\right]. \qquad (2.1.22)$$

В точке $x = 0$ расположен максимум освещенности, соответствующий нулевой разности хода. Это *центр интерференционной картины*. Для него порядок интерференции $m = 0$.

Пространственный период интерференционной картины, или *ширина интерференционной полосы* Δx, — это расстояние между соседними максимумами или минимумами. Например, координата m-го максимума определяется из условия

$$x_m = \frac{\Delta_m l}{nd} = \frac{m\lambda_0 l}{nd} = m\frac{l\lambda}{d}, \qquad (2.1.23)$$

где $\lambda = \lambda_0/n$ — длина волны в среде. Соседний (m + 1)-й максимум определяется координатой:

$$x_{m+1} = (m+1)\frac{\lambda l}{d}. \qquad (2.1.24)$$

Откуда получаем ширину интерференционной полосы:

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \lambda\frac{l}{d}. \qquad (2.1.25)$$

Примечание 2. Ширину интерференционной полосы (2.1.25) можно получить сразу, исходя из условия $kd\Delta x/l = 2\pi$ учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$.

Рассмотрим далее интерференцию двух плоских волн. На самом деле это то же самое, что интерференция волн от двух точечных источников, но при этом рассматриваются две плоские волны и задается угол между направлениями их распространения. Предположим, что обе плоские монохроматические волны имеют одинаковые частоты, для простоты имеют одинаковые амплитуды и характеризуются волновыми векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$, задающими направления их распространения. Рассмотрим эти волны в плоскости x и y. На рисунке 2.4 ось x направлена симметрично относительно векторов $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ интерферирующих волн, ось y лежит в плоскости рисунка, а ось z — перпендикулярна плоскости рисунка. Поскольку угол между векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ лежит в плоскости (x, y) и от оси z ничего не зависит, то тогда эти волны записываются:

$$E_1 = E_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}_1\vec{r}\right) = E_0 \cos\left(\omega t - k\cos\frac{\alpha}{2}\cdot x - k\sin\frac{\alpha}{2}\cdot y\right),$$

$$E_2 = E_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}_2\vec{r}\right) = E_0 \cos\left(\omega t - k\cos\frac{\alpha}{2}\cdot x + k\sin\frac{\alpha}{2}\cdot y\right). \qquad (2.1.26)$$

Суммарная волна в точке (x, y) определяется сложением волн (2.1.26):

$$E = 2E_0 \cos\left(k\sin\frac{\alpha}{2}\cdot y\right)\cos\left(\omega t - k\cos\frac{\alpha}{2}\cdot x\right) \qquad (2.1.27)$$

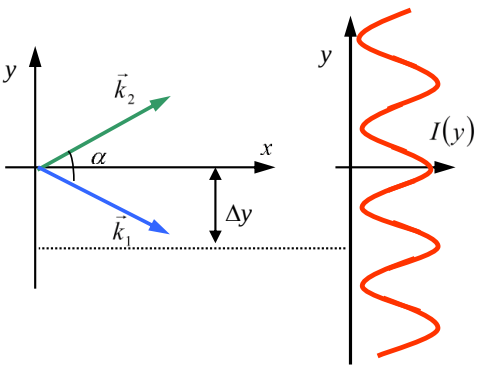


Рис. 2.4

Таким образом, получаем стоячую волну по оси y и бегущую волну по оси x. То есть максимумы и минимумы, распределенные по оси y, распространяются по оси x. Если перпендикулярно биссектрисе угла α между направлениями волн поместить плоский экран (рис. 2.4), то на нем будут наблюдаться чередующиеся светлые и темные *интерференционные полосы*.

Ширина интерференционной полосы по оси y определяется положением соседних максимумов, т. е. определяется условием

$$k\sin\alpha/2\cdot\Delta y = \pi.$$

Откуда получаем

$$\Delta y = \frac{\pi}{k\sin\alpha/2} = \frac{\lambda}{2\sin\alpha/2}. \qquad (2.1.28)$$

Для волн, распространяющихся под малым углом друг к другу ($\alpha << 1$), ширина интерференционной полосы определяется соотношением $\Delta y \approx \lambda/\alpha$.

Если начало отсчета по оси x выбрать в одном из максимумов, то зависимость освещенности (интенсивности) экрана от координаты y дается выражением

$$I(y) = 2I_0\left[1 + cos(2\pi y/\Delta y)\right] = 4I_0\, cos^2(\pi y/\Delta y). \qquad (2.1.29)$$

Освещенность экрана изменяется от минимального значения, равного нулю, до максимального значения, равного учетверенному значению освещенности, которая создается одной волной. Если экран наклонить на угол β, то ширина полосы увеличится и станет равной $\Delta y/\cos\beta$.

Примечание 3. Если для случая интерференции двух точечных источников ввести угол схождения лучей $\alpha \approx d/l$ (т. е. угол, под которым видны источники из точки наблюдения P), то расстояние между соседними экстремумами можно представить как $\Delta y \approx \lambda/\alpha$. Этот результат совпадает с полученным выше для интерференции плоских волн, распространяющихся под углом α по отношению друг к другу. Таким образом, как уже было замечено, на большом расстоянии от источников сферические волны на небольших участках можно приближенно рассматривать как плоские, угол между направлениями которых при $\vartheta << 1$ может быть принят приближенно равным d/l.

2.2. Пространственная и временная когерентность

2.2.1. Когерентность

При рассмотрении интерференции мы предполагали, что распространяющиеся от источников волны являются строго монохроматическими. Если же свет испускается реальным источником, то за время измерения (усреднения) колебания могут случайно обрываться или может происходить хаотическое изменение их фазы. В таком случае интерференция будет отсутствовать, т. е. на опыте всегда будем иметь простое сложение интенсивностей $I = I_1 + I_2$.

В самом деле, повторим, что мы получали в предыдущем параграфе. Даже при одинаковых и постоянных во времени амплитудах колебаний векторов электрических полей складываемых волн, описываемых формулами (2.1.5), за время наблюдения получаем соотношение (2.1.8):

$$\left\langle E^2 \right\rangle = \frac{1}{t}\int_0^t E^2 dt = \left\langle E_1^2 \right\rangle + \left\langle E_2^2 \right\rangle + 2E_{10}E_{20}\frac{1}{t}\int_0^t cos\left[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right]dt\,. \qquad (2.2.1)$$

Если фазы $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ изменяются хаотически, то за время измерения получаем

$$\int_0^t cos\left[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right]dt = 0,$$

т. е. интерференционный член отсутствует. Отсюда вытекает необходимое условие существования интерференции: *за время наблюдения разность фаз складываемых колебаний должна сохранять свое значение*.

Если для двух колебаний выполняется условие $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \text{const}$, то такие колебания называют *когерентными*. В общем случае *когерентностью называют согласованное протекание во времени и в пространстве нескольких колебательных или волновых процессов*, проявляющееся при их сложении. Степень согласованности процессов может быть различной — *пространственной* и *временной*.

Строго монохроматические волны одинаковой частоты всегда когерентны. Однако интерференционные явления от двух независимых источников света (например, электрических ламп) недоступны для наблюдения невооруженным глазом. Более того, даже если имеются две очень узкие спектральные линии, излучаемые разными источниками, то глаз не фиксирует интерференционную картину. Это указывает на тот факт, что излучение реальных источников света никогда не бывает строго монохроматическим.

Рассмотрим излучение реального источника света, состоящего из большого числа атомов — элементарных излучателей. В основе математической модели излучения обычного (не лазерного) источника света лежит статистическая гипотеза о том, что в случае спонтанного излучения различные атомы источника испускают отдельные *цуги волн* независимо друг от друга в *случайные моменты* времени. Фазы колебаний электромагнитного поля излучения различных атомов *не скоррелированы* друг с другом. Поэтому распределение интенсивности излучения источника при такой некогерентной суперпозиции определяется суммированием распределений интенсивностей отдельных атомов. В частности, если цуги волн, испускаемых различными элементарными излучателями в различные моменты времени, одинаковы, то распределение интенсивности излучателя будет таким же, как распределение интенсивности излучения изолированного атома.

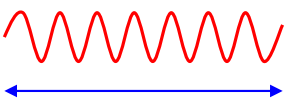


Рис. 2.5

Атом излучает при переходе из возбужденного состояния в основное (или другое возбужденное). Время жизни атома в возбужденном состоянии $\sim 10^{-8}$ с. За это время атом излучает, т. е. испускает цуг волн (рис. 2.5). Работу источника излучения можно представить как последовательность процессов возбуждения атома за счет столкновений или другими способами с последующим переходом его в нижележащие энергетические состояния с испусканием цуга волн. Таким образом, возникает последовательность цугов, излучаемых атомом через нерегулярные промежутки времени. Поэтому через точку наблюдения в течение конечного промежутка времени проходит большое число цугов конечной длины со случайным значением фазы колебаний, т. е. немонохроматическая волна.

Пусть на экран приходят волны от двух независимых источников света. При наложении двух цугов получаем интерференционную картину, которая зависит от разности фаз складываемых колебаний. Однако разность фаз при переходе от одной пары складываемых цугов волн к другой меняется хаотически. Поскольку среднее время жизни такой интерференционной картины $\tau \leq 10^{-8}$ с, то за время наблюдения $t >> \tau$ интерференционная картина многократно изменяется. Приемник в силу своей инерционности не в состоянии отследить хаотическую смену интерференционных картин. Поэтому за время измерения интерференционный член обращается в нуль, т. е. интерференция от двух независимых источников излучения оптического спектра не наблюдается.

Можно ли вообще наблюдать явление интерференции от обычных (не лазерных) источников света?

Да, возможно, если свет от одного источника разделить на два или несколько пучков, а затем наложить их друг на друга соответствующим образом. При этом, несмотря на хаотическое изменение фаз у отдельных цугов, разность фаз в расщепленных волнах остается постоянной, при условии, что разность хода этих пучков от источника до точки наблюдения не превышает длины отдельного цуга. Поэтому случайные изменения фазы и амплитуды световых колебаний в этих волнах протекают согласованно, и интерференционная картина будет устойчивой. О таких пучках говорят, что они когерентны.

Опыты по наблюдению интерференции от обычных источников называют интерференционными опытами *по методу деления волнового фронта* или *по методу деления амплитуды*. Наиболее известные оптические опыты по интерференции проводили Т. Юнг; О. Френель; Х. Ллойд; Р. Поль.

Рассмотрим некоторые из них.

Впервые экспериментальная установка для демонстрации интерференции света была создана Томасом Юнгом в начале XIX в. Рассмотрим схему опыта Юнга (1807), изображенную на рисунке 2.6, поскольку в дальнейшем мы часто будем обращаться к подобной схеме.

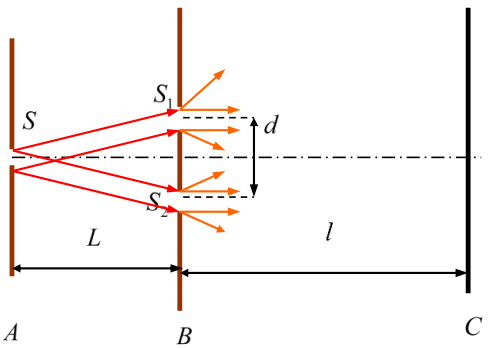


Рис. 2.6

Прошедший через отверстие S свет образует расходящийся пучок, который падает на экран B с двумя малыми отверстиями S_1 и S_2, расположенными близко друг к другу на равном расстоянии от отверстия S. Эти отверстия действуют как вторичные точечные синфазные источники. Исходящие от них волны, пе-

рекрываясь, создают интерференционную картину, наблюдаемую на удаленном экране C. Положение светлых и темных полос в ней можно находить, пользуясь монохроматической идеализацией. Расстояние Δx между соседними полосами, как было показано выше (2.1.25), равно $\lambda l/d$.

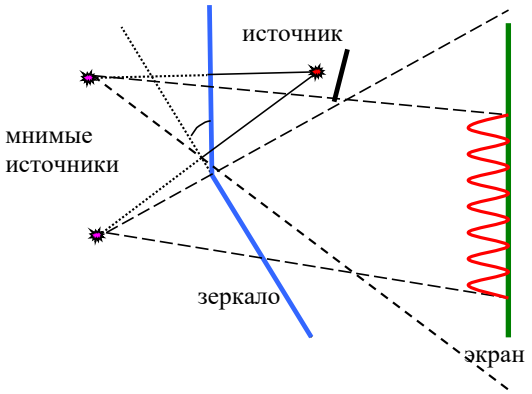


Рис. 2.7

В 1816 г. О. Френель наблюдал интерференцию, используя два зеркала, расположенные под очень маленьким углом друг к другу (рис. 2.7). Поместив источник (щель) перед зеркалами, Френель наблюдал интерференционные полосы на экране, создаваемые отраженными (мнимыми источниками) щелями в обоих зеркалах. Малый угол между зеркалами создавал малое расстояние между мнимыми источниками.

Для аналогичного разделения волн от одного источника и наблюдения интерференции в другом опыте Френель использовал бипризму, проходя через которую, свет разлагался на два пучка, создавая тем самым два мнимых источника.

Х. Ллойд применял плоское зеркало также для создания двух источников. Один источник являлся реальным и от него свет шел прямо на экран. Другой был мнимым источником, поскольку он появлялся за счет отражения реального источника в зеркале.

Примечание 1. *Томас Юнг, английский физик, 1773–1829.*
Огюстен Жан Френель, французский физик, 1788–1827.
Хэмфри Ллойд, ирландский физик, 1800–1881.
Роберт Вихард Поль, немецкий физик, 1884–1976.

2.2.2. Интерференция квазимонохроматического света. Временная когерентность

Рассмотрение спектра излучения реальных источников приводит к выводу об ограниченности использования монохроматической идеализации и вынуждает обратиться к изучению характера интерференционных явлений в квазимонохроматическом свете. Оказывается, что интерференционные полосы (например, от одной из линий спектра излучения разреженного газа) видны наиболее отчетливо, когда длины путей обеих интерферирующих волн

примерно одинаковы. Увеличение оптической разности хода Δ приводит сначала к ухудшению контрастности полос (в общем случае немонотонно), а затем и к их исчезновению.

Введение оптической разности хода Δ эквивалентно задержке одной из волн во времени, поэтому способность световых колебаний к интерференции после разделения исходной волны на две и последующего их соединения с некоторой разностью хода называется *временной когерентностью*.

Максимальная разность хода, при которой возможна интерференция, называется *длиной когерентности излучения* $l_{ког}$, а соответствующее ей время запаздывания одного из пучков — *временем когерентности*:

$$\tau_{ког} = \frac{l_{ког}}{c}. \qquad (2.2.2)$$

Условие временной когерентности световых колебаний можно записать в виде

$$\Delta < l_{ког} = c\tau_{ког}. \qquad (2.2.3)$$

Этот эффект связан с немонохроматичностью интерферирующих волн, что, в свою очередь, является следствием *конечной ширины* δω *спектральной линии* источника света. Такое излучение можно рассматривать как совокупность нескоррелированных между собой отдельных монохроматических волн, частоты которых заполняют некоторый интервал δω, малый по сравнению со средней частотой ω рассматриваемой спектральной линии (δω << ω).

Каждая монохроматическая волна, будучи разделенной на две волны, а затем, встречаясь в интерферометре, создает свою картину полос. Полное распределение освещенности экрана определяется простым наложением этих картин. При малых разностях хода интерферирующих волн (от нуля до нескольких длин волн) положение полос в картинах, создаваемых отдельными монохроматическими составляющими, практически одинаково. Поэтому полосы наблюдаемой интерференционной картины видны отчетливо. По мере увеличения разности хода из-за различия в длинах волн происходит как смещение картин отдельных полос относительно друг друга. В конце концов, при дальнейшем увеличении разности хода суммарная картина оказывается полностью размытой.

Эффект исчезновения полос в интерференционных опытах, связанный с немонохроматичностью интерферирующих волн, можно объяснить на основе конечной длительности цугов волн. Чем больше длительность цуга, тем лучше выполняется монохроматическое приближение и, соответственно, проще удовлетворить условиям когерентности.

Пусть излучаемый источником свет состоит из следующих друг за другом цугов волн с беспорядочно изменяющимися фазами. Разделим свет от этого

источника на две волны, которые, проходя разные пути, затем собираются вместе в точке наблюдения. Интерференционная картина будет наблюдаться в том случае, когда складываются колебания, полученные из одного цуга (рис. 2.8). Если разность оптических длин этих путей превышает протяженность цуга, то один из цугов минует точку наблюдения раньше, чем второй дойдет до нее. В точке наблюдения идет наложение колебаний от разных цугов в излучении источника. Результат будем тем же, как при наложении волновых цугов от разных источников: за время наблюдения проходит большое число цугов, фазы колебаний в которых никак не связаны друг с другом, поэтому интерференционный член в среднем обращается в нуль и происходит простое сложение интенсивностей. Фактически время когерентности и есть временная длительность цуга.

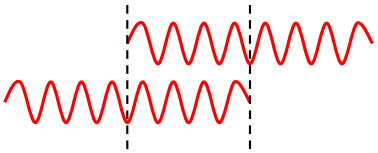


Рис. 2.8

Оценим разность хода складываемых волн, при которой происходит исчезновение интерференционных полос. Для этого примем спектральный интервал шириной δω равномерно заполнен отдельными монохроматическими компонентами. Сложим в точке наблюдения два колебания от пришедших волн с частотами ω и ω + δω:

$$E_1 cos(\omega t+\alpha_1)+E_2 cos[(\omega+\delta\omega)t+\alpha_2]=E_1 cos(\omega t+\alpha_1)+E_2 cos(\omega t+\delta\omega t+\alpha_2).$$

Разность фаз, возникающая при их сложении, равна $\delta(t)=\delta\omega\cdot t+\alpha_2-\alpha_1$, и она меняется со временем. Временем когерентности $\tau_{ког}$ будет время, за которое эта разность фаз меняется на 2π (при этом интерференционные полосы полностью «замазываются»):

$$\delta(t+\tau_{ког})-\delta(t)=\delta\omega\cdot\tau_{ког}\sim 2\pi. \qquad (2.2.4)$$

Откуда время когерентности обратно пропорционально ширине спектрального интервала $\delta\omega=-2\pi c\delta\lambda/\lambda^2$:

$$\tau_{ког}\sim\frac{2\pi}{\delta\omega}=\frac{1}{\delta\nu}=\frac{\lambda^2}{c\delta\lambda}. \qquad (2.2.5)$$

Для длины когерентности получаем

$$l_{ког}=c\tau_{ког}=\frac{c}{\delta\nu}=\frac{\lambda^2}{\delta\lambda}. \qquad (2.2.6)$$

Итак, когда разность хода равна длине когерентности $\Delta_{max}\sim l_{ког}$, то интерференционной картины не наблюдается. Длине когерентности соответствует максимально возможный (предельный наблюдаемый) порядок интерференции (см. формулу (2.1.19)), равный

$$m_{max} \sim \frac{\Delta_{max}}{\lambda} = \frac{l_{ког}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\omega}{\delta\omega}. \qquad (2.2.7)$$

Дополнение 1. Если имеется два дискретных источника с разбросом длин волн от λ' до λ, то исчезновение интерференционных полос происходит тогда, когда на светлую полосу (2.1.19) накладывается темная (2.1.20). При этом выполняется следующее условие:

$$m\lambda' = (2m+1)\lambda/2.$$

Откуда предельный порядок интерференции равен:

$$m = \frac{\lambda}{2(\lambda'-\lambda)} = \frac{\lambda}{2\delta\lambda}. \qquad (2.2.8)$$

Отличие в 2 раза от непрерывного источника с тем же разбросом длин волн. Кстати, для непрерывного распределения длин волн от λ до $\lambda + \delta\lambda$ можно разбить источник на множество пар бесконечно узких спектральных линий, находящихся на расстоянии $\delta\lambda/2$ друг от друга. И тогда максимальный порядок интерференции $m_{\max} \sim \lambda/\delta\lambda$.

Ширины лучших по качеству (монохроматичности) спектральных линий в лаборатории составляют величину $\delta\nu \sim 10^8$ Гц. Поэтому время когерентности равно $\tau_{ког} \sim 10^{-8}$ *с*. Поэтому длина когерентности не превышает 1–2 м ($l_{ког} \sim 1$ м). Лазеры — источники излучения с высокой степенью монохроматичности: ширина линии $\delta\nu \sim 10^2$ Гц. Поэтому время когерентности и длина когерентности значительно выше: $\tau_{ког} \sim 10^{-2}$ с и $l_{ког} \sim 10^6$ м, соответственно.

2.2.3. Пространственная когерентность. Роль конечных размеров источников света

При описании интерференционных явлений первичный источник света предполагался точечным. Однако все реальные источники имеют конечные размеры. Увеличение размеров источника, как и расширение спектра излучаемого им света, приводит к ухудшению контрастности интерференционных полос и даже полному их исчезновению.

Выясняя роль конечных размеров источника, мы будем снова считать излучение монохроматическим. Протяженный спонтанно излучающий источник можно рассматривать как совокупность большого числа точечных взаимно некогерентных элементов. Поэтому наблюдаемая в любом месте интенсивность равна сумме интенсивностей интерференционных картин, создаваемых отдельными точечными элементами протяженного источника.

Временная когерентность происходит от разброса частот $\Delta\omega$ или от волнового вектора Δk по модулю. Для пространственно протяженного источника появляется разброс волн по направлениям распространения $\Delta\vec{k}$ (рис. 2.9). Если размеры источника много меньше длины световой волны, то интерференционная картина будет резкой, так как разность хода интерферирующих лучей от любой точки источника до точки наблюдения будет практически одной и той же. Но обычно размеры источника значительно больше длины волны, поэтому

одинаковые интерференционные картины от разных его элементов сдвинуты одна относительно другой. В результате наложения этих картин интерференционные полосы размываются. Поэтому их можно наблюдать лишь при выполнении определенных условий, налагаемых на геометрию эксперимента.

Поясним идею пространственной когерентности на примере.

Пусть источник S имеет какие-то размеры (например, форму диска), и он виден под углом φ из точки, где происходит разделение лучей. На рисунке 2.9 показан источник и щель, через которую проходит свет, при этом угол φ мал. Однако из-за конечных размеров источника свет имеет разброс по волновым векторам $\vec{k}$, и в дальнейшем после первой щели такой свет падает на две щели, от которых можем наблюдать интерференцию. Тогда из-за разброса по волновым векторам (т. е. по направлениям распространения волн) максимумы в интерференции от разных $\vec{k}$ будут расположены в разных местах на экране. Полная интерференционная картина — наложение картин, отдельно создаваемых каждым участком источников.

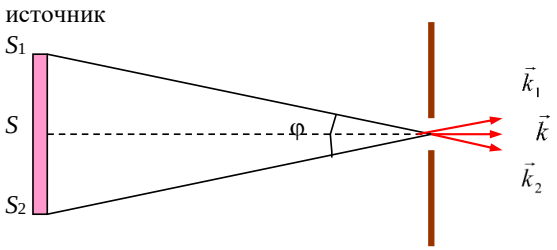


Рис. 2.9

Рассмотрим центральную часть картины, примерно показанную на рисунке 2.10. Пусть x' — расстояние между максимумами, которые появляются в распределении интенсивности от центральной части источника и от его края. При этом если это расстояние значительно меньше ширины интерференционной полосы:

$$x' \ll \Delta x = \frac{l}{d}\lambda,$$

то на экране интерференция видна. Если $x' \sim \Delta x$, то максимум от одной части источника накладывается на минимум от другой, поэтому интерференция не видна. Итак, условие наблюдения интерференции может быть записано в форме

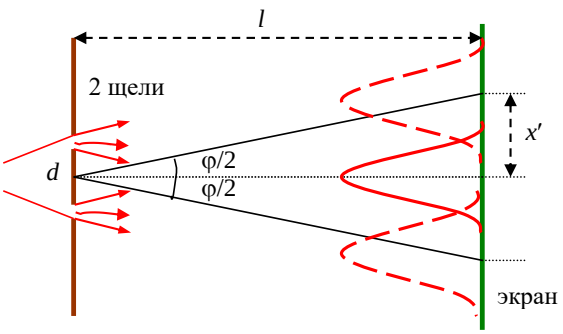


Рис. 2.10

$$x' \le \Delta x \qquad (2.2.9)$$

или иначе: $l \cdot \varphi/2 \le l \cdot \lambda/d$. Тогда получаем для угла разделения (множитель 2 убран из-за оценочного характера):

$$\varphi \le \frac{\lambda}{d}. \qquad (2.2.10)$$

Отсюда видно, что, чтобы улучшить условия наблюдения интерференции, можно уменьшить расстояние между щелями, т. е. можно записать условие для наблюдения интерференции в виде

$$d < \frac{\lambda}{\varphi}. \qquad (2.2.11)$$

Совокупность волн с разными направлениями $\vec{k}$ можно заменить результирующей волной, падающей на экран со щелями. Если нет интерференционной картины, следовательно, волны в щелях не когерентны и на условной «волновой» поверхности разные точки не когерентны, если они отстоят на расстоянии d. Если расстояние между точками на волновой поверхности меньше d, то они когерентны. Итак, длина пространственной когерентности (или радиус когерентности):

$$\rho_{ког} \sim \frac{\lambda}{\varphi}. \qquad (2.2.12)$$

Вывод: для получения интерференционных полос от двух источников (щелей) света недостаточно, чтобы эти источники состояли из попарно когерентных точечных источников. Даже в случае строго монохроматических волн необходимо, чтобы размеры источников не превосходили определенного предела, зависящего от взаимного расположения и расстояния между ними, а также от положения экрана.

Два источника, размеры и взаимное расположение которых позволяет наблюдать интерференционные полосы, называются *пространственно когерентными*.

2.3. Интерференция в тонких пленках

Под тонкими пленками понимаются такие, для которых выполняются условия временной когерентности. При наблюдении интерференции у поверхности тонких пленок большую роль играет также пространственная когерентность.

2.3.1. Плоскопараллельная пластинка

Для рассмотрения интерференции на тонкой плоскопараллельной пластинке воспользуемся законами отражения и преломления, которые мы выведем чуть позже в главе 3 (§ 3.1). Сформулируем эти законы (см. также рис. 2.11) для падения электромагнитной волны из среды *1* с показателем преломления n_1 в среду *2* с показателем n_2:

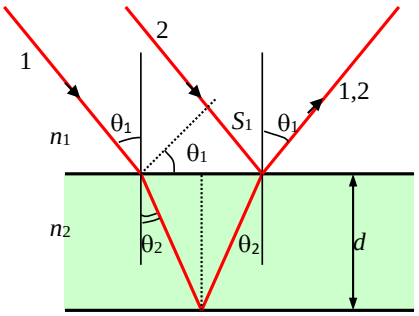


Рис. 2.11

1) угол падения θ_1 равен углу отражения;

2) соотношение между углами падения и преломления имеет вид

$$\frac{n_2}{n_1} = n = \frac{sin\theta_1}{sin\theta_2}, \qquad (2.3.1)$$

где n — относительный показатель преломления;

3) при отражении электромагнитной волны от оптически более плотной среды ($n_2 > n_1$) фаза отраженной волны меняется на π.

Итак, пусть из воздуха (для воздуха $n_1 = 1$) свет (электромагнитная волна) падает под углом θ_1 на поверхность пластины с показателем преломления n_2 и толщины d. Находим оптическую разность хода двух лучей — *1* и *2* (см. рис. 2.11):

$$\Delta = nS_2 - S_1, \qquad (2.3.2)$$

где S_1 — разность хода лучей в воздухе (в среде с показателем преломления n_1)

$$S_1 = 2d \cdot tg\theta_2 sin\theta_1, \qquad (2.3.3)$$

а S_2 — разность хода первого луча при прохождении пластинки:

$$S_2 = \frac{2d}{cos\theta_2}. \qquad (2.3.4)$$

Используя (2.3.1), получаем

$$\Delta = \frac{2dn}{cos\theta_2} - 2d \cdot tg\theta_2 \, sin\theta_1 = 2d\frac{n - sin\theta_2 \, sin\theta_1}{cos\theta_2} = 2d\frac{n^2 - sin^2\theta_1}{\sqrt{n^2 - sin^2\theta_1}} = 2d\sqrt{n^2 - sin^2\theta_1}\,.$$

Кроме того, как покажем ниже в § 3.1, при отражении от оптически более плотной среды ($n_2 > n_1$) фаза волны скачком меняется на угол π. Поскольку мы имеем два акта отражения, то в любом случае одно отражение (либо для луча *1*, либо для луча *2*) происходит от оптически более плотной среды. Поэтому окончательно для разности хода двух лучей получаем

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - sin^2\theta_1} + \frac{\lambda}{2}. \qquad (2.3.5)$$

Из § 2.1 знаем, что при оптической разности хода $\Delta = m\lambda$ (где λ — длина волны в вакууме) получаем максимум в отраженной волне. А при разности хода $\Delta = \frac{1}{2}(2m+1)\lambda$ — минимум.

Для видимого света (например, солнечный свет) интерференционные полосы можно наблюдать для достаточно тонкой пластинки, толщиной d ~ 0,05÷0,06 мм. Эта толщина обусловлена выполнением условий пространственной и временной когерентности. Когда лучи параллельны и падают под одним и тем же углом, то наблюдение интерференционных полос возможно на бесконечности. И наблюдают их с помощью линзы, либо глаза (который работает как линза), аккомодированного на бесконечность. Линза фокусирует параллельные лучи, идущие под одним углом, в одну определенную точку на фокальной плоскости (рис. 2.12).

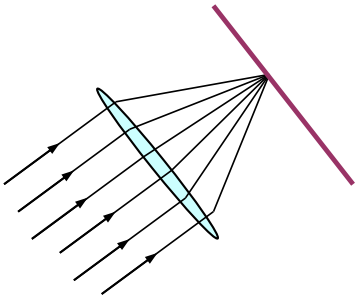


Рис. 2.12

Если падает монохроматический свет рассеянный, т. е. световые лучи падают под разными углами на тонкую плоскопараллельную пластинку, то линза собирает в точки те лучи, которые соответствуют равному наклону или углу падения. Параллельные лучи собираются в точку на фокальной плоскости (экране), как показано на рисунке 2.13. Но если лучи падают со всех сторон, но под одним и тем же углом падения (т. е. для одного угла падения лучи распределяются по конусу над поверхностью пластинки), то на экране после собирающей линзы получаем освещенное кольцо. Получающиеся интерференционные полосы носят название *полос равного наклона*, так как они образованы светом, падающим под одним углом падения к нормали.

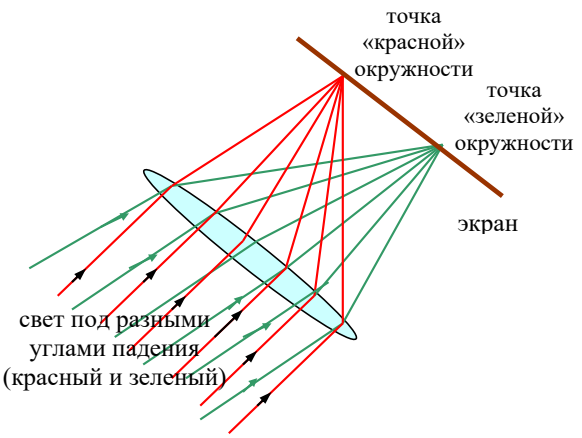


Рис. 2.13

Если имеем белый свет, то полосы окрашены в разные цвета, поскольку для разных длин волн максимумы наблюдаются при различных углах падения. Так, человеческий глаз фиксирует различие в цвете при разности длин волн $\Delta\lambda \approx 0{,}02$ мкм = 20 Å.

2.3.2. Интерференция на клине

Рассмотрим тонкую пластинку переменной толщины, на которую падает параллельный пучок света. Пусть угол φ — угол между верхней и нижней плоскостями (рис. 2.14) — малая величина. Лучи, отраженные от верхней поверхности (на рис. 2.14 — синие (сплошные) лучи) и нижней поверхности (красные пунктирные лучи), — не параллельны.

Интерференционные полосы локализуются на поверхности пластинки. При малых углах φ оптическую разность хода можно также вычислять по формуле для параллельных пластинок (2.3.5), где d — толщина пластинки в данном месте.

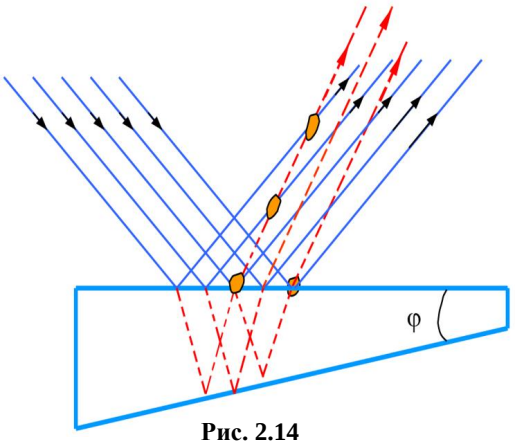


Рис. 2.14

Наблюдают эти полосы также с помощью линзы. На экране получаются *полосы равной толщины*, т. е. получаем интерференционные полосы, где разность хода одна и та же, или одна и та же толщина пластинки d. Интерференционные полосы наблюдают как в отраженном, так и в пройденном свете.

На практике глаз часто видит интерференционную картину при отражении солнечного света от тонких пленок на воде или других материалах (мыльные, нефтяные, бензиновые пленки, цвета побежалости и т. д.). Эти полосы обычно окрашены, поскольку условия для появления полос различны для разных длин волн. Такой вид интерференции используется для определения качества ровной поверхности различных материалов.

Примечание 1. В реальных условиях в создании интерференционной картины обычно участвуют полосы равного наклона и равной толщины. Поэтому это разделение достаточно условно и в современной физике на него не обращают внимание.

2.3.3. Кольца Ньютона

Кольца Ньютона — один из ярких примеров полос равной толщины. Роль тонкой пластинки играет воздушный зазор между линзой большого радиуса и подложкой. Интерференционная картина симметрична относительно оси симметрии и имеет вид светлых и темных колец при освещении монохроматическим светом. Интерференционные полосы можно наблюдать как в отраженном, так и в пройденном свете. В отраженном свете интерферируют лучи, отраженные от подложки и от нижнего края линзы.

Рассмотрим условия интерференции в отраженном свете при условии, что линза помещена в воздухе (см. рис. 2.15). Поскольку радиус линзы достаточно велик, а интерференционная картина разворачивается вблизи точки касания линзы и подложки, то вблизи точки касания ($R >> r$) можно пренебречь кривизной линзы. Тогда оптическая разность хода определяется соотношением (в воздухе $n = 1$):

$$\Delta = 2d + \lambda/2, \qquad (2.3.6)$$

где опять слагаемое λ/2 добавлено из-за потери полуволны при отражении света от оптически более плотной среды. Из геометрического треугольника (рис. 2.15) имеем, учитывая, что $d << R$:

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2 \approx R^2 - 2dR + r^2 .$$

Отсюда получаем толщину воздушного зазора d на радиусе r:

$$d \approx \frac{r^2}{2R} . \qquad (2.3.7)$$

Тогда разность хода равна

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2} . \qquad (2.3.8)$$

Отсюда получаем условие появления максимума и радиусы светлых (освещенных) колец:

$$\Delta = 2m\lambda/2, \quad r_m = \sqrt{\frac{2m-1}{2}\lambda R} , \qquad (2.3.9)$$

где m = 1, 2, 3, ... Аналогично получаем для минимума освещенности и радиусы темных колец:

$$\Delta = (2m+1)\lambda/2 , \quad r_m = \sqrt{2m\lambda R} . \qquad (2.3.10)$$

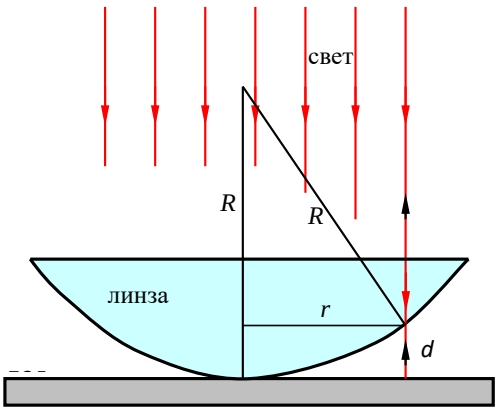


Рис. 2.15

Интересно отметить, что в отраженном свете в центре ($m = 0$) мы имеем темное пятно.

Если рассматривать интерференционную картину в пройденном свете, то светлые и темные полосы поменяются местами — станут соответственно темными и светлыми. Линзу можно помещать в различные среды и ставить на различные подложки, при этом необходимо учитывать показатели преломлений всех сред при вычислении оптической разности хода.

Примечание 2. Покрытие прозрачных поверхностей, в частности линз, тонкими пленками производится для просветления оптики. За счет интерференции на тонкой пленке отражение лучей в определенной области длин волн может быть уменьшено.

2.3.4. Двухлучевые и многолучевые интерферометры

Интерферометрами называют оптические измерительные приборы, основанные на интерференции света. Принцип действия таких приборов состоит в разделении пучка света на два или несколько когерентных пучков, которые про-

ходят различные оптические пути, а затем сводятся вместе. Интерферометры применяются для определения длины волны спектральных линий и их структуры, а также абсолютного показателя преломления сред; для измерения длин и перемещений тел; для контроля формы; микрорельефа и деформаций поверхностей оптических деталей; чистоты металлических поверхностей и т. д.

В основе работы интерферометра лежит пространственное разделение пучка света с помощью какого-либо устройства для получения двух, или более, взаимно когерентных лучей, которые проходят различные оптические пути, а затем сводятся вместе, и наблюдается результат их интерференции. Вид интерференционной картины зависит от способа разделения пучка света на взаимно когерентные лучи, от их числа и их относительной интенсивности, от размеров источника и спектрального состава света.

По техническим характеристикам различают двухлучевые интерферометры, которые в основном являются техническими приборами, и многолучевые интерферометры, которые используются как спектрометры высокого разрешения для исследования тонкой структуры спектральных линий. Ниже приведем принципиальные схемы нескольких наиболее популярных устройств, используемых в интерферометрии.

Двухлучевые интерферометры.

Интерферометр Ж. Жамена (1856) представляет собой одно из наиболее чувствительных интерференционных устройств, что позволяет использовать его для точного определения показателей преломления газов при давлении, близком к атмосферному. Параллельный пучок света падает на плоскопараллельную стеклянную пластину *1* (рис. 2.16), на заднюю поверхность которой нанесено металлическое зеркало. Два отраженных пучка оказываются при достаточной толщине пластины пространственно разделенными и направляются отдельно в две кюветы с исследуемым газом К1 и газом сравнения К2 с показателеми преломления n_1 и n_2, соответственно. Прошедшие пучки отражаются от еще одной такой же стеклянной пластины *2*. Таким образом, оба отраженных пучка оказываются равными по интенсивности и, проходя через трубу, сводятся в фокальной плоскости линзы. В результате возникает интерференционная картина из горизонтальных полос на экране.

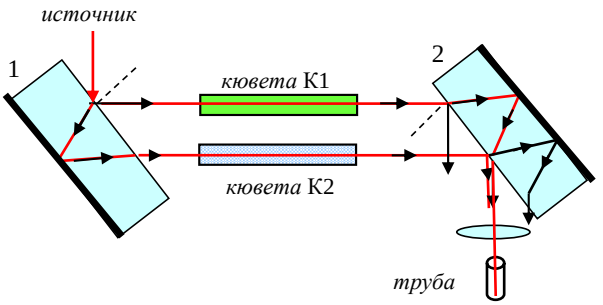


Рис. 2.16

При юстировке одну из пластин слегка наклоняют и в установленной на бесконечность зрительной трубе появляются эквидистантные интерференционные полосы. Если теперь на пути интерферирующих пучков поместить кюветы К1 и К2 с веществами с известным n_1 и неизвестным n_2 показателями преломления, то оптическая разность хода изменится и интерференционная картина сместится на $\Delta = (n_2 - n_1)l$ (l — длина кюветы). Это позволяет определить показатель преломления n_2.

Немногим позже лордом Рэлеем и академиком Д. С. Рождественским были предложены модифицированные интерферометры Жамена.

Интерферометр А. Майкельсона широко используется в физических измерениях и технических приборах. Так, с его помощью впервые была измерена абсолютная величина длины волны света, доказана независимость скорости света от движения Земли. Перемещая одно из зеркал интерферометра Майкельсона, получают возможность анализировать спектральный состав падающего излучения. На этом принципе построены фурье-спектрометры, применяющиеся для длинноволновой инфракрасной области спектра (50–1000 мкм) при решении задач физики твёрдого тела, органической химии и химии полимеров, диагностики плазмы. Интерферометр Майкельсона позволяет измерять длины с точностью 20–30 нм. Устройство используется и в настоящее время в астрономических, физических исследованиях, а также в измерительной технике. В частности, принципиальная схема интерферометра, используемая Майкельсоном определения для эфирного ветра, показана на рисунке 2.17 (см. § 2.2 курса «Механика» [1]). Кроме того, интерферометр Майкельсона лежит в основе оптической схемы современных лазерных гравитационных антенн.

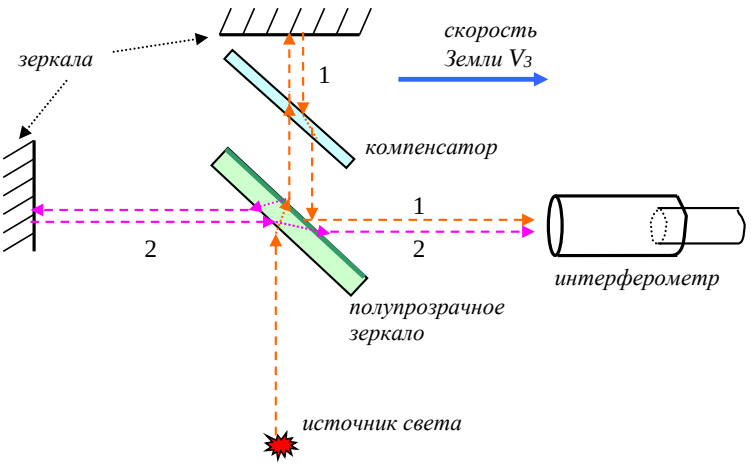


Рис. 2.17

Многолучевые интерферометры.

Многолучевой интерферометр Фабри — Перо (рис. 2.18) состоит из двух стеклянных или кварцевых пластинок *1* и *2*, на обращённые друг к другу и параллельные между собой поверхности которых нанесены зеркальные покрытия с высоким (85–98%) коэффициентом отражения. Параллельный пучок света, падающий из объектива O_1, в результате многократного отражения от зеркал (см. рис. 2.18), образует большое число параллельных когерентных пучков с постоянной разностью хода Δ между соседними пучками, равной

$$\Delta = 2nh \cdot cos\varphi.$$

Здесь h — расстояние между пластинками, а φ — угол падения луча.

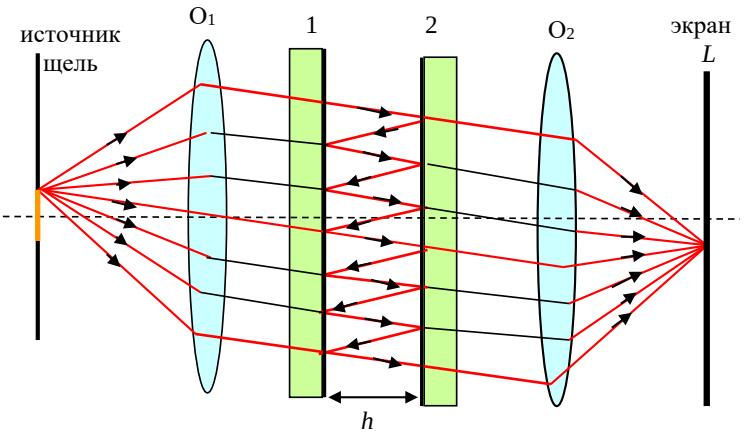


Рис. 2.18

В результате многолучевой интерференции в фокальной плоскости L объектива O_2 образуется интерференционная картина, имеющая форму концентрических колец с резкими интенсивными максимумами, положение которых определяется из условия $\Delta = m\lambda$ (m — целое число), т. е. зависит от длины волны. Поэтому интерферометр Фабри — Перо разлагает сложное излучение в спектр. Применяется такой интерферометр и как интерференционный спектральный прибор высокой разрешающей силы. Последняя зависит от коэффициента отражения зеркал R и от расстояния h между пластинками, возрастая с их увеличением. Специальные сканирующие интерферометры Фабри — Перо с фотоэлектрической регистрацией используются для исследования спектров в видимой, инфракрасной и в сантиметровой области длин волн.

Разновидностью интерферометров Фабри — Перо являются оптические резонаторы лазеров, излучающая среда которых располагается между зеркалами интерферометра.

Другой интерференционный аппарат часто используемый в многолучевой интерфеметрии — это пластинка Луммера — Герке. Световые лучи

направляются внутрь плоскопараллельной пластинки, так чтобы угол падения на границе стекло — воздух был близок к предельному углу полного отражения. Пучки испытывают многократные отражения от плоскостей пластинки и выходят из нее с почти одинаковыми интенсивностями. В пластинках Луммера — Герке наблюдаются интерференционные полосы равного наклона (подробнее об этом интерферометре см.: Д. В. Сивухин «Общий курс физики», том 4 «Оптика», § 36).

Примечание 1. *Жюль Селестен Жамен, французский физик, 1818–1886.*
Дмитрий Сергеевич Рождественский, русский физик, 1876–1940, академик АН СССР, первый директор (1918–1932) государственного оптического института (Петербург, ГОИ).
Альберт Абрахам Майкельсон, американский физик, 1852–1931.
Шарль Фабри, французский физик, 1867–1945.
Альфред Перо, французский физик, 1863–1925.
Эрнст Герке, немецкий физик, 1878–1960.
Отто Рихард Луммер, немецкий физик, 1860–1925.

2.4. Дифракция Френеля

2.4.1. Понятие дифракции. Принцип Гюйгенса —Френеля

К *дифракции* относится совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с разными неоднородностями. *Физического различия между интерференцией и дифракцией нет, и то и другое — перераспределение светового потока в результате суперпозиции волн*. Обычно их различают по количеству источников: интерференция происходит от конечного числа источников света, а дифракция от непрерывного распределения источников.

В историческом аспекте под дифракцией понимали огибание светом препятствий, проникновение света в область геометрической тени. То есть под дифракцией света обычно понимают отклонения от законов распространения света, описываемых геометрической оптикой. *Геометрическая оптика* — закон прямолинейного распространения света в однородной среде — предсказывает существование за экраном области тени, резко отделенной от тех областей, куда попадает свет. Однако исследования показывают, что вместо резкой границы между светом и тенью реализуется довольно сложная картина распределения освещенности, состоящая из темных и светлых участков — дифракционных полос. Дифракционные явления выражены тем сильнее, чем меньше размеры экранов или отверстий в них и чем больше длина волны падающего света. В оптике характерные особенности дифракционных явлений обусловлены тем, что размеры экранов, как правило, много больше длины волны. Поэтому наблюдать дифракцию света можно только на достаточно больших расстояниях от преграды.

Первое объяснение дифракции света было дано О. Френелем в 1818 г. Он показал, что количественное описание дифракционных явлений возможно на основе построения волнового фронта Х. Гюйгенса, если его дополнить принципом интерференции вторичных волн. В 1882 г. Г. Кирхгоф дал строгое математическое обоснование принципу Гюйгенса — Френеля.

В рамках электромагнитной теории света для описания дифракционных явлений не требуется вводить какие-либо новые принципы. Однако точное решение задачи о распространении света на основе уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями представляет большие математические трудности. В большинстве случаев, представляющих практический интерес, вполне достаточным оказывается приближенный метод решения задачи об относительном распределении света вблизи границы между светом и тенью, основанный на принципе Гюйгенса — Френеля.

Гюйгенс предложил способ геометрического построения фронта распространяющейся световой волны. Согласно *принципу* Гюйгенса, каждую точку, в которую пришла волна от источника, можно принять за центр вторичных сферических волн, распространяющихся во все стороны (рис. 2.19). Радиус каждой сферы зависит от скорости распространения электромагнитных волн в данной области среды. Результирующая волна рассматривается как наложение вторичных волн, и вводится понятие *огибающей* этих волн.

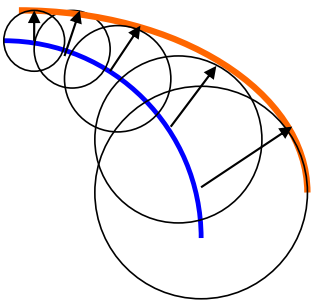


Рис. 2.19

В то же время в этих построениях не используется понятие длины волны и не учитывается периодичность вторичных волн. Кроме того, этот принцип не дает сведений об амплитуде, а следовательно, об интенсивности волн. Не ясно также, почему при таком построении не появляется обратной волны. Поэтому, наглядно объясняя законы прямолинейного распространения, отражения и преломления света, такой способ построения не позволяет определить условия применимости этих законов.

Френель количественно дополнил принцип Гюйгенса учетом амплитуд и фаз вторичных волн и их соответствующим наложением и тем самым вложил в принцип Гюйгенса ясное физическое содержание. Он рассматривал полное световое поле как результат *интерференции вторичных волн*. При этом появляется возможность расчета распределения светового поля в пространстве. Физическое объяснение рецепта Гюйгенса состоит в следующем: к точкам на линии, огибающей все вторичные волны, приходят в одинаковых фазах.

Каждый элемент волновой поверхности dS служит источником вторичных когерентных сферических волн (рис. 2.20). При этом амплитуда испускаемых поверхностью волн пропорциональна площади dS. Напряженность dE_P, создаваемая элементарным участком dS в точке наблюдения P, пропорциональна напряженности поля E_0 на самом участке dS и площади проекции dS_n этого участка на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{k}$, направленного от источника света в элемент площадки dS.

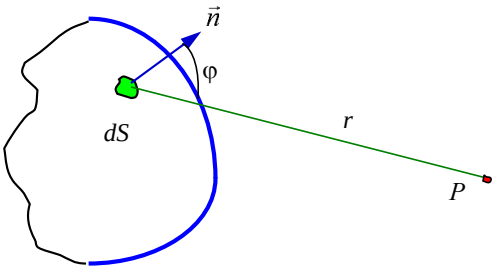


Рис. 2.20

Вычисляя вклад участка dS в поле E_P, нужно учесть изменения амплитуды и фазы вторичной волны при её распространении от элемента dS к точке P. Это приводит к появлению в выражении для dE_P множителя

$$\frac{1}{2}cos(\omega t - kr + \delta_0) \qquad \text{или} \qquad e^{-i(\omega t - kr)}/r,$$

соответствующего распространению сферической волны, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, а r — расстояние от элемента dS до $(\cdot)P$. В принципе, под косинусом (или в показателе экспоненты) можно опустить часть, зависящую от времени, и начальную фазу в силу выбора начального момента рассмотрения (например, опустить множитель $e^{-i\omega t}$). Чтобы учесть зависимость амплитуды вторичных волн от угла α между вектором $\vec{k}$ и направлением на точку наблюдения P — вектором $\vec{r}$, вводится некоторый коэффициент наклона $K(\varphi)$. Тогда электрическое поле, приходящее в точку наблюдения от элемента dS, можно записать в следующем виде:

$$dE_P = K(\varphi)\frac{E_0 dS}{r}cos(\omega t - kr + \delta_0) \qquad \text{или} \qquad dE_P = K(\varphi)E_0\frac{e^{ikR}}{R}dS. \qquad (2.4.1)$$

Здесь E_0 — амплитуда волны на волновой поверхности. Модуль коэффициента $K(\varphi)$ максимален в направлении вектора $\vec{k}$ (первоначальном направлении распространения волны), т. е. при угле $\varphi = 0$, и плавно убывает с увеличением φ, принимая минимальное значение при угле $\varphi = \pi/2$.

Полное электрическое поле, приходящее в точку P, представляет собой суперпозицию полей (2.4.1) вторичных волн от всех элементов dS поверхности S отверстия в экране:

$$dE_P = \int_S K(\varphi)\frac{E_0}{r}cos(\omega t - kr + \delta_0)dS \qquad \text{или} \qquad E_P = \int_S K(\varphi)E\frac{e^{ikr}}{r}dS. \qquad (2.4.2)$$

В рассматриваемом приближении интеграл по поверхности S не зависит от формы этой поверхности. Полученная формула дает математическое выражение *принципа Гюйгенса — Френеля*.

Рассмотрим экран с отверстием, через которое проходит свет от точечного монохроматического источника (рис. 2.21). Пусть размеры отверстия много больше длины световой волны. Поставим задачу определения напряженности электрического поля волны E_p в любой точке за экраном. При приближенном решении задачи по методу Френеля делается предположение, что напряженность поля E волны во всех точках отверстия такая же, какой она была бы при отсутствии экрана, а в точках, находящихся непосредственно за экраном, она равна нулю. Считается, что материал экрана не играет никакой роли, а существенна только форма края отверстия (экрана). Опыт показывает, что такое предположение справедливо, когда размеры отверстия и расстояния от источника до экрана и от экрана до точки наблюдения много больше длины волны, т. е. когда малы отклонения от геометрической оптики. Это предположение теряет силу, например, для узкой щели, ширина которой значительно меньше длины световой волны.

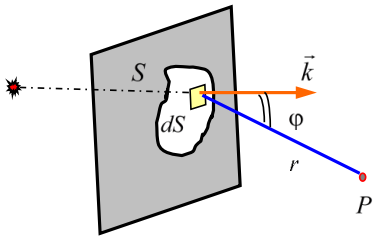


Рис. 2.21

Мысленно проведем произвольную поверхность S, закрывающую отверстие в экране и ограниченную его краями. Разделим эту поверхность на элементарные участки площадью dS, малые по сравнению с размерами отверстия, но большие по сравнению с длиной волны. Будем считать, что каждый участок dS в соответствии с принципом Гюйгенса — Френеля сам становится источником световой волны, распространяющейся во все стороны. И тогда считаем амплитуду и интенсивность в любой точке за экраном по формуле (2.4.2).

Итак, *волновое поле в произвольной точке пространства складывается из вторичных волн, испускаемых некоторыми фиктивными источниками на поверхности* (строго говоря, замкнутой), отделяющей эту точку от первичной падающей волны.

Многие практически важные задачи дифракции можно решить при весьма общих предположениях относительно коэффициента $K(\varphi)$, не уточняя конкретного вида его зависимости от угла α. Из теории Кирхгофа, основанной на том, что напряженность поля световой волны удовлетворяет волновому уравнению, следует

$$K(\varphi) = \frac{k(1+\cos\varphi)}{4\pi i} = \frac{1+\cos\varphi}{2\lambda i}, \qquad (2.4.3)$$

где i — мнимая единица. При малых углах дифракции $(\varphi << 1)$ можно положить $\cos\varphi \approx 1$, и коэффициент равен $K(\varphi) \approx k/2\pi i = -i/\lambda$.

Примечание 1. *Христиан Гюйгенс, голландский физик, 1629–1695.*
Густав Роберт Кирхгоф, немецкий физик, 1824–1887.

2.4.2. Метод зон Френеля. Спираль Френеля

Вычислять прямо по формулам Френеля довольно сложно. Однако в простых и симметричных случаях можно воспользоваться полученным соотношением (2.4.2), чтобы получить оценочные и качественные результаты.

Применим формулу (2.4.2) для определения напряженности поля E в точке P, расположенной на оси симметрии за круглым отверстием в экране (рис. 2.22). Будем считать, что точечный источник 0, находящийся в изотропной среде, и точка наблюдения P лежат на прямой, проходящей через центр отверстия перпендикулярно его плоскости. Рассмотрим волновую поверхность S радиуса a (*пунктир* на рис. 2.22), представляющую часть сферы с центром в источнике 0. В соответствии со сделанным предположением напряженность поля на всех элементах dS поверхности S такая же, как при отсутствии экрана $E \sim E_0 e^{ika}$.

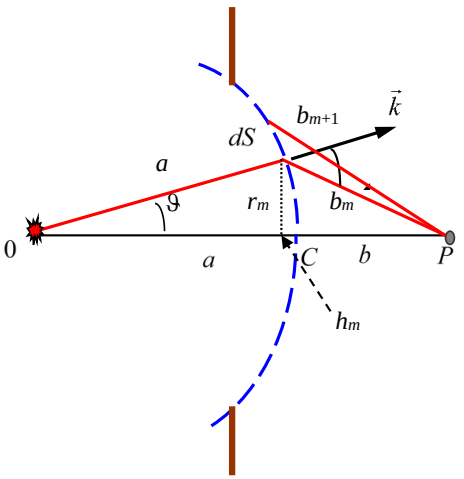


Рис. 2.22

Разобьем волновую поверхность на кольцевые зоны так (рис. 2.22), чтобы расстояния от внутренней части m-й зоны до точки наблюдения P были равны

$$b_m = b + m\frac{\lambda}{2}, \qquad b_{m+1} = b_m + \frac{\lambda}{2}. \tag{2.4.4}$$

Таким образом, расстояние между соседними краями зоны равно $\lambda/2$ по разности хода, т. е. колебания, происходящие от разных краев зон в точке P, находятся в противофазе (отличаются на π).

Основная идея такого разбиения состоит в следующем: будем считать, что усредненный вклад от такой зоны дает колебания в точке наблюдения P в среднем в одной фазе, а от соседней с ней зоны находится в противофазе по отношению к предшествующей. Так как вклад от зоны по (2.4.2) пропорционален площади, можем записать:

$$E_m = \int\limits_{S_m} K(\varphi)\frac{E_0}{r}cos(\omega t - kr + \delta_0)dS = f(b_m)\cdot\Delta S_m, \qquad (2.4.5)$$

где $f(b_m)$ — средний вклад от зоны; ΔS_m — площадь m-й зоны. Вычислим эту площадь через разность площадей сферических сегментов (рис. 2.23):

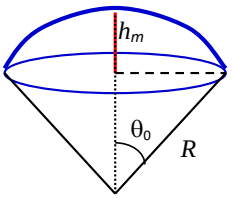


Рис. 2.23

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1};$$

$$S_m = R^2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\theta_0}\sin\theta\, d\theta = 2\pi R\cdot R\left(1-\cos\theta_0\right) = 2\pi R\cdot h_m, \qquad (2.4.6)$$

где θ и φ — углы в сферической системе координат. В нашем случае радиус равен a. Запишем из прямоугольных треугольников следующие соотношения (рис. 2.22 и 2.23):

$$r_m^2 = a^2 - \left(a - h_m\right)^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left(b + h_m\right)^2.$$

Раскрывая квадраты, получаем для высоты сегмента:

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2\dfrac{\lambda^2}{4}}{2(a+b)}. \qquad (2.4.7)$$

Ограничимся рассмотрением m-й зоны при не слишком больших номерах m, т. е. когда выполняется условие $m^2\lambda^2 << mb\lambda$:

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \qquad (2.4.8)$$

Тогда для площади сферического сегмента имеем

$$S_m = 2\pi a h_m = \frac{\pi ab}{a+b}m\lambda. \qquad (2.4.9)$$

Площадь m-й зоны получается вычитанием площадей сегментов:

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab}{a+b}\lambda. \qquad (2.4.10)$$

Таким образом, при небольших номерах зон m их площади ΔS_m не зависят от номера m, т. е. площади зон одинаковы. Аналогично получаем радиусы зон Френеля из равенства $r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 \approx 2ah_m$:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}. \qquad (2.4.11)$$

Итак, имеем следующие результаты:

1) площади зон Френеля примерно одинаковы;

2) расстояние b_m растет медленно при переходе от зоны к зоне;

3) угол между нормалью и направлением на точку наблюдения растет.

Отсюда получаем **важный вывод**: амплитуда E_m, возбуждаемая в точке P от m-й зоны, монотонно убывает с ростом m. Это верно даже для зон с большим номером m, так как несмотря на то, что площадь растет, при этом растет и угол φ. Таким образом, можно записать следующее неравенство для вклада от зон в результирующую амплитуду:

$$E_1 > E_2 > E_3 > \ldots > E_m > E_{m+1} > \ldots$$

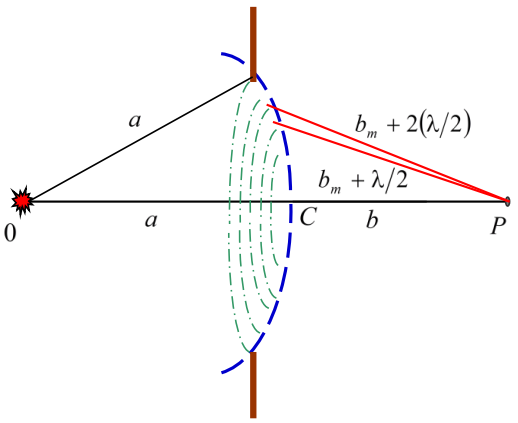


Рис. 2.24

Соседние зоны дают колебания в противофазе, поэтому полное колебание в точке P от всех зон с учетом фаз равно

$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \ldots = \frac{E_1}{2} + \left(\frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2}\right) + \left(\frac{E_3}{2} - E_4 + \frac{E_5}{2}\right) + \ldots . \qquad (2.4.12)$$

Так как монотонное убывание амплитуд, то приблизительно имеем $|E_m| \approx 1/2 \cdot (E_{m+1} + E_{m-1})$, и в среднем выражения в скобках формулы (2.4.12) равны 0. Сумма по m ограничивается количеством кольцевых «светящих» зон, вырезанных отверстием из полностью открытого фронта волны. В случае полностью открытого фронта волны в точке наблюдения получаем амплитуду, равную:

$$E_0 = \frac{1}{2} E_1 . \qquad (2.4.13)$$

Поскольку интенсивность $I \approx E^2$, следовательно, интенсивность полностью открытого фронта волны I_0 может быть записана через амплитуду от первой зоны:

$$I_0 = E^2 = E_0^2 = \frac{1}{4} E_1^2 .$$

Таким образом, одна первая зона Френеля создает интенсивность в 4 раза большую, чем полностью открытый фронт:

$$I_1 = E_1^2 = 4 I_0 . \qquad (2.4.14)$$

Как этим пользоваться? Пусть имеем симметричные экраны и отверстия: круглые, полукруглые, кольцевые и так далее. При данных размерах от источника до отверстия a и от отверстия до точки наблюдения b можно сосчитать, сколько зон Френеля «укладывается» в данном отверстии, через которое проходит электромагнитная волна. Например, имеем круглое отверстие радиусом равным радиусу первой зоны Френеля $r = r_1$, тогда интенсивность в точке наблюдения равна

$$I_P = I_1 = 4I_0.$$

Если круглое отверстие имеет радиус равный радиусу второй зоны $r = r_2$, то интенсивность приблизительно равна 0.

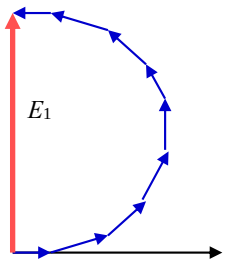


Рис. 2.25

Удобнее пользоваться графической интерпретацией, показывающей вклады от различных зон, — *спиралью Френеля*. Разобьем первую зону Френеля на более мелкие кусочки и строим векторную диаграмму для всех кусочков. Поскольку фаза «кусочков» непрерывно меняется от 0 до π, то вектора «кусочков» амплитуды постепенно поворачиваются относительно горизонтальной оси, т. е. нулевой фазы, как это показано на рисунке 2.25. В пределе деления первой зоны на бесконечно большое число малых кусочков получаем «полукруг» радиусом E_0 и диаметром E_1. Если начнем также добавлять вклады в амплитуду от кусочков второй зоны, то получим второй «полукруг» (с левой стороны от «полукруга» первой зоны на рис. 2.25). Его радиус будет чуть-чуть меньше E_0, поскольку полный вклад от второй зоны чуть меньше вклада первой зоны.

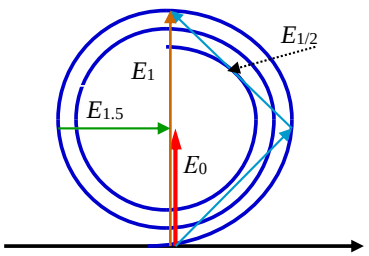


Рис. 2.26

Если проведем суммирование вкладов от всех зон в амплитуду, то получаем спираль Френеля, изображенную на рисунке 2.26. При этом вектор, проведенный из начала спирали до ее центра (конец спирали на рис. 2.26 определяется вектором E_0), определяет амплитуду волны при полностью открытом фронте, т. е. амплитуду E_0. Здесь же на рисунке показан вектор E_1, определяющий вклад первой зоны Френеля.

Метод кольцевых зон Френеля позволяет при дифракции света на круглом отверстии, или экране, сравнительно просто найти относительную интенсивность света в точке наблюдения P, которая лежит на оси симметрии OCP. Например, в точке наблюдения приходят волны от участка открытого фронта, границы которого определяются m_1 и m_2 зонами Френеля. Тогда длина вектора, проведенного на спирали от начала первой

зоны (m_1) до второй (m_2), определяет амплитуду волны, приходящей от этого участка, а квадрат длины — интенсивность. В случае нескольких открытых участков или зон векторы суммируются по векторным правилам сложения, и амплитуду результирующего колебания определяет длина суммарного вектора.

Рассмотрим несколько примеров использования метода зон Френеля для отверстий и экранов.

1. Имеем отверстие размером для точки наблюдения в половину 1-й зоны Френеля, разделенной по диаметру. Тогда освещенность за экраном в точке наблюдения определяется половиной площади первой зоны и поэтому равна $I_{1/2} = (2E_0/2)^2 = I_0$.

2. Освещенность за экраном с отверстием, ограниченным кругом радиуса $r_1/\sqrt{2}$, т. е. по площади, равной половине 1-й зоны Френеля, равна $I_{1/2O} = \left(2E_0/\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\cdot E_0\right)^2 = 2I_0$. Ту же интенсивность дает открытая внешняя половина 1-й зоны Френеля, амплитуда которой $E_{1/2}$ показана на рисунке 2.26.

3. Освещенность под отверстием в первые 1,5 зоны Френеля равна $I_{O3/2} = \left(\sqrt{2}E_0\right)^2 = 2I_0$, а под отверстием в открытые две зоны Френеля примерно равна 0.

4. Если имеем круглый непрозрачный экран (при любом, но не очень большом номере зоны Френеля m), то на оси за экраном в области геометрической тени всегда получаем светлое пятно. Это так называемое *пятно Пуассона*. На рисунке 2.26 вектор $E_{1,5}$ определяет амплитуду при закрытых первых 1,5 зон Френеля. И при дальнейшем увеличении радиуса непрозрачного экрана начало вектора E перемещается против часовой стрелки по спирали, а конец вектора остается по-прежнему в центре спирали.

Расчет распределения интенсивности для всей дифракционной картины, в частности, вне оси симметрии, оказывается значительно сложнее (рис. 2.27). Чтобы найти напряженность поля световой волны в точке P', не лежащей на оси OC, можно построить кольцевые зоны, центр которых находится в точке C' на прямой $OC'P'$. Отверстие экрана расположится не концентрически по отношению к этим зонам. Действие вторичных волн в точке P' зависит от того, какая часть каждой из зон открыта (видна из этой точки). Поэтому точный расчет $E_{P'}$ сложен. В то же время ясно, что при удалении точки P' от P периодически будут встречаться места с большей и мень-

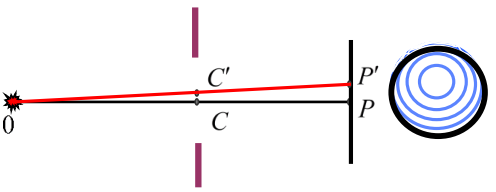


Рис. 2.27

шей интенсивностью. Поскольку вся картина должна обладать круговой симметрией, то вокруг точки P образуются чередующиеся более и менее светлые кольца (рис. 2.27).

2.4.3. Дифракция Френеля на прямолинейном крае экрана

Принцип Гюйгенса — Френеля можно применить для нахождения распределения интенсивности света вблизи границы тени, отбрасываемой краем большого экрана. Если точка наблюдения P находится на конечном расстоянии от экрана, задерживающего свет, то лишь сравнительно небольшой участок волновой поверхности, лежащий вблизи края экрана, дает существенный вклад в амплитуду освященности, т. е. в интеграл (2.4.2):

$$E_P = \int_S K(\varphi) E \frac{e^{ikR}}{R} dS_n . \qquad (2.4.15)$$

Ограничимся рассмотрением плоской волновой поверхности падающей волны, что соответствует бесконечно удаленному точечному источнику или точечному источнику в фокусе линзы. Введем декартову систему координат следующим образом. Пусть волновая поверхность параллельна плоскости $x0y$, а ось z проходит через точку наблюдения P, находящуюся на расстоянии L от плоскости $x0y$. Пусть также экран лежит в плоскости $x0y$, а его прямолинейный край параллелен оси y и расположен на расстоянии d от нее ($x = -d$).

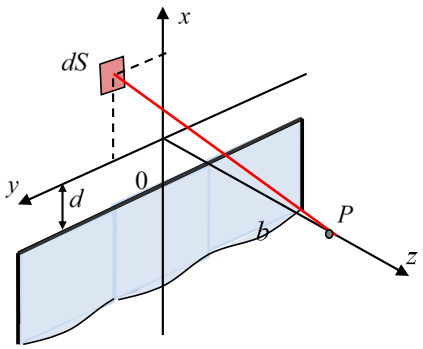


Рис. 2.28

Нас интересует распределение интенсивности света вблизи края геометрической тени, поэтому будем считать, что $d \ll b$. Применяя принцип Гюйгенса — Френеля, в качестве вспомогательной поверхности S будем рассматривать ту часть плоскости $x0y$, которая не закрыта экраном. При малых углах дифракции, соответствующих малым отклонениям при распространении плоской световой волны от законов геометрической оптики, основной вклад в интеграл (2.4.15) дают участки плоскости $x0y$, близкие к началу координат. Поэтому коэффициент наклона $K(\varphi)$ можно положить равным $K(\varphi) \approx K_1 = 1/\lambda i = \text{const}$, а расстояние R от элементарного участка dS до точки наблюдения записать в виде

$$R = \sqrt{b^2 + x^2 + y^2} = b\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{b^2}} \approx b + \frac{x^2 + y^2}{2b} .$$

При малых углах дифракции множитель $1/R$, стоящий под знаком интеграла в (2.4.15), можно положить равным $1/R \approx 1/b = \text{const}$. Тогда вклад участка волновой поверхности в виде параллельной оси y полосы, заключенной между координатами $x = 0$ и $x = x_1$, в напряженность поля в точке P определяется как

$$E_p = -\frac{iE}{\lambda b}\iint \exp\left[ik\left(b + \frac{x^2+y^2}{2b}\right)\right]dxdy = -\frac{iE}{\lambda b}e^{ikb}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{iky^2}{2b}\right)dy\int_0^{x_1}\exp\left(\frac{ikx^2}{2b}\right)dx.$$

Интегрирование по координате y дает постоянный множитель, не зависящий от ширины выделенной волновой поверхности x_1. Опуская его и другие не представляющие интереса постоянные множители, можно написать

$$E_P \sim \int_0^{x_1}\exp\left(\frac{ikx^2}{2b}\right)dx \sim \int_0^{x_1}\exp\left(\frac{i\pi\eta^2}{2}\right)d\eta, \qquad (2.4.16)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ и $\eta = x\sqrt{2/\lambda b}$ — новая безразмерная переменная интегрирования, введенная вместо x по формуле $kx^2/b = \pi\eta^2$.

В итоге, открытую часть волновой поверхности разобьем на зоны, имеющие вид узких прямолинейных полосок, параллельных краю полуплоскости. Ширину зон выберем таким образом, что расстояния от соседних границ полосок до точки наблюдения P отличаются на величину $\lambda/2$ (рис. 2.29). Таким образом, электромагнитные колебания, приходящие от соседних краев зон в точке P, находятся в противофазе (отличаются на π по аналогии с зонами Френеля для круглых отверстий). Для плоских экранов эти полоски носят название зон Шустера.

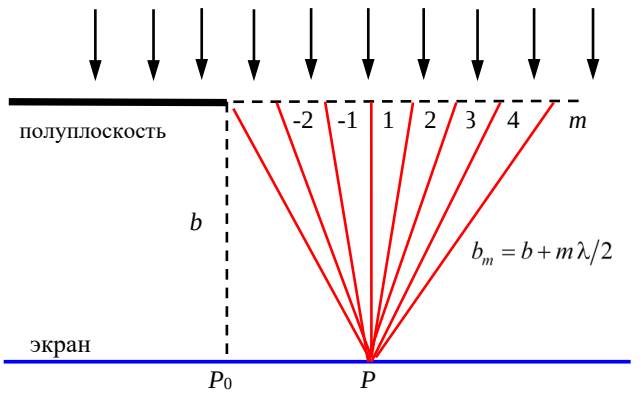


Рис. 2.29

Наибольший вклад в точку наблюдения P дают две центральные зоны Шустера с номерами $m = \pm 1$ (рис. 2.29), расположенные справа и слева от точки P. Вклад от последующих зон быстро убывает при переходе от $m = 1$ к $m = 2$, а затем убывает медленнее при дальнейшем росте номера зоны m.

Вычисление результирующей напряженности поля E_P в точке наблюдения P удобно снова проиллюстрировать с помощью векторной диаграммы, подобно тому, как это было сделано для случая дифракции на круглом отверстии. Колебание в точке P от широкой полосы волновой поверхности изобразится суммой векторов dE_i от всех укладывающихся на ней элементарных полосок. Однако соседние векторы элементарных колебаний dE_i повернуты на некоторый угол, который становится все больше, так как запаздывание по фазе вторичной волны от элементарной полоски, находящейся на расстоянии x от оси y, пропорционально квадрату этого расстояния, т. е. x^2. В пределе, когда ширина каждой элементарной полоски стремится к нулю, цепочка векторов dE_i превращается в плавную кривую, называемую *спиралью Корню*. Правая часть спирали определяет вклады в точке наблюдения P от правой части открытого фронта волны, а левая часть — от левой открытой части фронта.

Спираль Корню

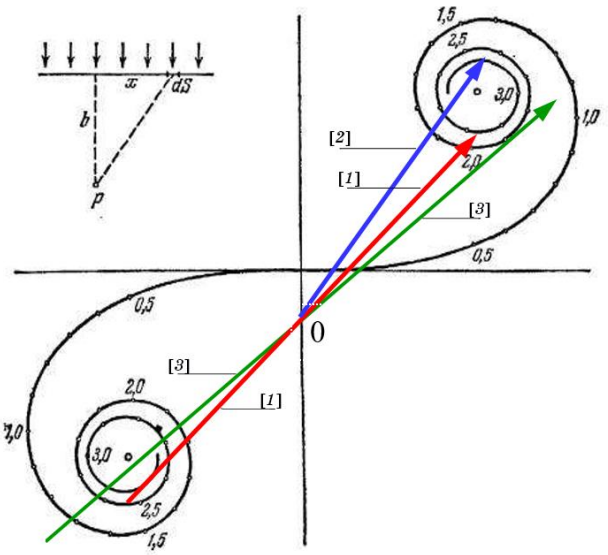


Рис. 2.30

Вектор, проведенный из центра левой спирали в центр правой спирали («красный» вектор [*1*] на рис. 2.30), показывает амплитуду E_0 от полностью открытого фронта волны и определяет интенсивность, равную $I_0 \sim E_0^2$. Вклад в амплитуду от первой правой зоны Шустера (зона *1* на рис. 2.29) определяется длиной «синего» вектора [*2*] на рисунке 2.30, а «зеленый» вектор [*3*] определяет суммарный вклад от симметричных открытых частей левой и правой зон в амплитуду волны.

С помощью спирали Корню можно получить распределение интенсивности вблизи края геометрической тени при дифракции плоской волны на прямолинейном крае экрана. Числа на этой спирали соответствуют значениям параметра $\eta = x\sqrt{2/\lambda b}$, введенного ранее в (2.4.16), где x и b — расстояния, характеризующие положение элемента волновой поверхности dS относительно точки наблюдения P (см. рис. 2.30). Вычисляя параметры η начала и конца открытой части волнового фронта и соединяя эти точки, строим вектор на спирали Корню, и по его «длине» определяем вклад этой области в амплитуду освещенности в точке P. Так, если открыта только правая часть волнового фронта, т. е. точка наблюдения расположена под границей плоского экрана и открытой части (точка P_0 на рис. 2.29), то вектор напряженности начинается от начала координат 0 и равен половине длины вектора всего открытого фронта $E_0/2$, а интенсивность будет равна $I_0/4$. Таким образом, интенсивность в точке наблюдения, находящейся на границе геометрической тени, в четыре раза меньше интенсивности I_0 в отсутствие экрана.

При перемещении точки наблюдения P из положения P_0 в освещенную область интенсивность будет последовательно проходить через максимумы и минимумы, поскольку начало вектора будет перемещаться по левой части спирали Корню. В наибольшем из максимумов интенсивность равна $I = 1{,}37 I_0$, а в первом минимуме — $I = 0{,}78 I_0$. С увеличением расстояния от края геометрической тени размах колебаний интенсивности относительно значения I_0 уменьшается, а положения максимумов и минимумов постепенно сближаются друг с другом. При перемещении точки наблюдения P в область тени (в левую сторону от P_0) начало вектора будет перемещаться по правой части спирали и длина вектора будет монотонно уменьшаться. Примерная картина освещенности в зависимости от положения точки наблюдения показана на рисунке 2.31. Зависимость интенсивности от координаты x точки наблюдения можно выразить аналитически через интегралы Френеля.

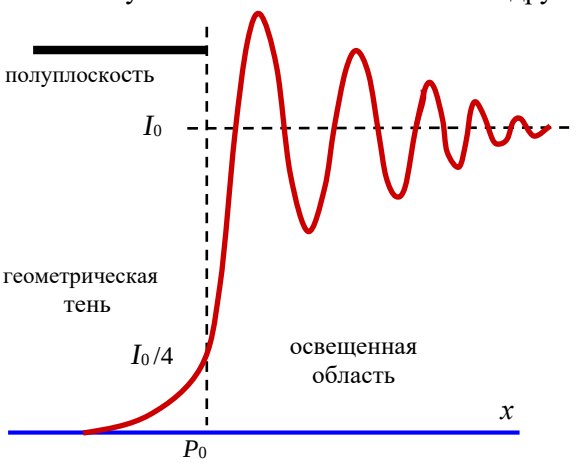


Рис. 2.31

Проведенный анализ показывает, что между светом и тенью от края экрана нет резкой границы: в области геометрической тени освещенность спадает постепенно и монотонно, а край освещенной области расщепляется на

дифракционные полосы. Опыт хорошо подтверждает полученные закономерности. Характер дифракционных явлений, т. е. распределение интенсивности в дифракционной картине, определяется числом зон Френеля, перекрываемых экраном (или отверстием в экране), а не абсолютными размерами экранов или отверстий.

Часто вводят параметр p, лежащий в основе классификации дифракционных явлений, как отношение радиуса первой зоны Френеля к линейному размеру D экрана или отверстия:

$$p = \frac{r_1}{D} = \frac{\sqrt{\lambda b}}{D}.$$

Когда $p << 1$, число зон Френеля, перекрываемых экраном или отверстием, велико, дифракционные эффекты незначительны и распределение интенсивности падающего света приближенно описывается *законами геометрической оптики* (прямолинейным распространением света). При $p \approx 1$, когда экраном или отверстием перекрывается заметная часть одной зоны или небольшое число зон, наблюдается сложное распределение интенсивности, называемое *дифракцией Френеля*. При $p >> 1$ отверстие перекрывает малую часть первой зоны Френеля. В этом случае наблюдается явление, называемое *дифракцией Фраунгофера*, и дифракционная картина упрощается. Случай дифракции Фраунгофера имеет большое практическое значение для решения многих вопросов инструментальной оптики.

Примечание 2. *Артур Шустер, английский физик, 1851–1934.*
Мари Альфред Корню, французский физик, 1841–1902.
Йозеф Фраунгофер, немецкий физик, 1787–1826.

2.5. Дифракция Фраунгофера

2.5.1. Дифракция на прямоугольной щели

Дифракция Фраунгофера — это дифракция электромагнитных волн в параллельных лучах. Обычно дифракцию Фраунгофера наблюдают при падении параллельного пучка света на экран или отверстие, когда для точки наблюдения размеры щелей и экранов меньше размеров 1-й зоны Френеля. В результате дифракции пучок утрачивает параллельность, т. е. появляется свет, распространяющийся в направлениях, отличных от первоначального направления распространения. Распределение его интенсивности на очень большом (в пределе — бесконечно большом) расстоянии от препятствия соответствует *дифракции Фраунгофера*.

Волны, возникающие в результате ограничения фронта падающей плоской волны при прохождении сквозь отверстие в экране, называют *дифрагиро-*

вавшими, а нормали к их волновым поверхностям — дифрагировавшими лучами. В рамках геометрической оптики такие лучи не существуют. Возникновение дифрагировавших волн при прохождении через отверстие означает, что волна с ограниченной площадью поперечного сечения не может быть строго плоской.

Практически дифракцию Фраунгофера наблюдают не «в бесконечности», а в фокальной плоскости объектива или с помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность. Падающий на экран параллельный пучок можно получить, если точечный источник S поместить в фокус линзы L' (коллиматора), как показано на рисунке 2.32.

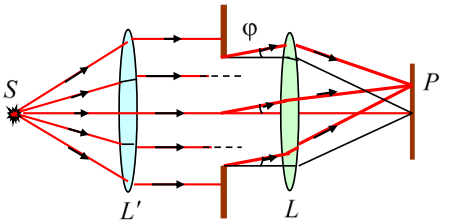


Рис. 2.32

Если отверстие в экране представляет собой узкую щель, то изображение точечного источника S в фокальной плоскости объектива l растянется в полоску, перпендикулярную щели. Освещенность полоски от середины к краям уменьшается немонотонно, проходя через ряд минимумом и максимумов. При повороте щели вся картина также поворачивается. Если роль источника выполняет светящаяся нить, параллельная щели, то наблюдаемое в фокальной плоскости объектива изображение нити оказывается растянутым в перпендикулярном щели направлении. При использовании лазерного источника излучения коллиматор и объектив не нужны.

Распределение интенсивности света при дифракции Фраунгофера можно найти с помощью принципа Гюйгенса — Френеля. Интенсивность в определенной точке P фокальной плоскости объектива L обусловлена интерференцией вторичных волн, исходящих от всех элементарных участков отверстия экрана и распространяющихся в одном и том же направлении, задаваемом углом φ.

Когда размер отверстия в экране, ограничивающем размер пучка, велик по сравнению с длиной световой волны, напряженность поля на вспомогательной поверхности S, совпадающей с отверстием, можно считать такой же, как при отсутствии экрана. Ограничимся рассмотрением малых углов φ (рис. 2.33), так как лишь волны, дифрагировавшие на малые углы, будут иметь заметную интенсивность.

Рассмотрим случай (простой, но практически важный), когда отверстие в экране имеет вид узкой длинной щели с параллельными краями и шириной b (рис. 2.33). Элементарные участки волнового фронта в форме узких длинных полосок, параллельных краям щели, становятся источниками вторичных ци-

линдрических волн. Амплитуды волн, приходящих в точку P от разных полосок, одинаковы, так как все элементы поверхности S имеют одинаковую площадь и одинаковый наклон к направлению вторичных волн. Соотношение фаз этих волн в точке P будет таким же, как и в любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения вторичных волн до линзы.

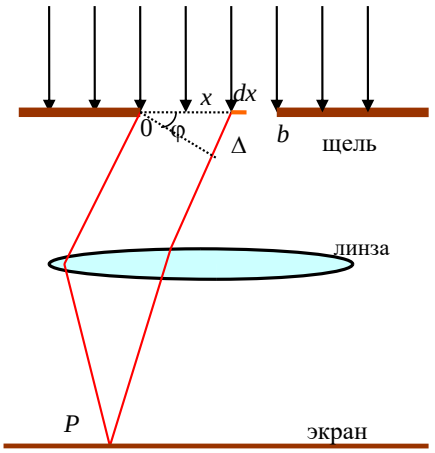


Рис. 2.33

Разобьем волновую поверхность в щели (рис. 2.33) на маленькие участки dx, каждый из них в точке P создает колебание dE. При не слишком больших углах φ коэффициент $K(\varphi)$ = const, тогда вклад от элемента dx можно записать в обычном виде:

$$dE = Ka_0 \cos(\omega t - kx)dx. \qquad (2.5.1)$$

Здесь множителя $1/r$ в амплитуде нет, поскольку рассматриваются плоские волны. Учтем полную амплитуду волны, проходящей в щель. Вклад от кусочка dx во входящую амплитуду равен: $dA = a_0 dx$. Тогда от всей щели вклад в амплитуду равен

$$A_0 = \int dA = \int_0^b a_0 dx = a_0 b,$$

откуда имеем

$$a_0 = \frac{A_0}{b}. \qquad (2.5.2)$$

Однако амплитуда, распространяющаяся под углом φ от различных участков щели, идет с различной фазой, поэтому необходимо учесть фазовые соотношения. Пусть от участка экрана слева в точке $x = 0$ фаза приходящей волны в точку P равна 0 (для этого всегда можно выбрать необходимый момент времени t). Тогда от «кусочка» dx, находящегося на расстоянии x от края щели, оптическая разность хода составляет

$$\Delta = x\sin\varphi. \qquad (2.5.3)$$

То есть от точки $x = 0$ волна приходит с фазой ωt, а от точки x с фазой $\omega t - 2\pi\Delta/\lambda$, где λ — длина волны в среде. Итак, вклад от кусочка dx равен

$$dE = \frac{A_0}{b}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi\right)dx. \qquad (2.5.4)$$

Здесь мы положили $K = 1$, хотя все это не имеет значения, так как нам важен относительный вклад в различных точках экрана. Тогда вклад от всей щели в направлении, определяемом углом φ, равен

$$E=\frac{A_0}{b}\int_0^b cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}xsin\varphi\right)dx=\frac{A_0}{b}\left(-\frac{\lambda}{2\pi sin\varphi}\right)\left[sin\left(\omega t-\frac{2\pi b}{\lambda}sin\varphi\right)-sin\omega t\right]=$$

$$=A_0\frac{sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}sin\varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}sin\varphi}cos\left(\omega t-\frac{\pi b}{\lambda}sin\varphi\right). \qquad (2.5.5)$$

При этом воспользовались тригонометрическим соотношением:

$$sin\alpha-sin\beta=2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Итак, полная амплитуда под углом φ:

$$E_\varphi=A_0\frac{sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}sin\varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}sin\varphi}. \qquad (2.5.6)$$

При φ = 0 имеем $E_{\varphi=0}=A_0$, т. е. получаем максимальную амплитуду в центре дифракционной картины. Распределение интенсивности получаем, исходя из того, что интенсивность в центре дифракционной картины пропорциональна квадрату амплитуды $I_0\sim|A_0|^2$, тогда под углом φ имеем $I_\varphi\sim|E_\varphi|^2$:

$$I_\varphi=I_0\frac{sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda}sin\varphi\right)^2}=I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}, \qquad (2.5.7)$$

где $u=1/2\cdot kb\sin\varphi=\pi b/\lambda\cdot\sin\varphi$. Получаем чередование длинных полос — максимумов и минимумов — с изменением угла наблюдения φ (рис. 2.34). При φ = 0 получаем центральный максимум интенсивности $I = I_0$. Условия появления минимумов:

$$\frac{\pi b}{\lambda}sin\varphi_m=m\pi \quad \text{или} \quad sin\varphi_m=\frac{\lambda}{b}m. \qquad (2.5.8)$$

Число минимумов ограничено условием $sin\varphi \le 1$, откуда из (2.5.8) имеем $m\le b/\lambda$. Угловая ширина главного максимума определяется условием $bsin = \pm\lambda$ и отсюда

$$\Delta\varphi=2\cdot arcsin\frac{\lambda}{b}. \qquad (2.5.9)$$

Если $b>>\lambda$, то $\delta\varphi\approx 2\lambda/b$.

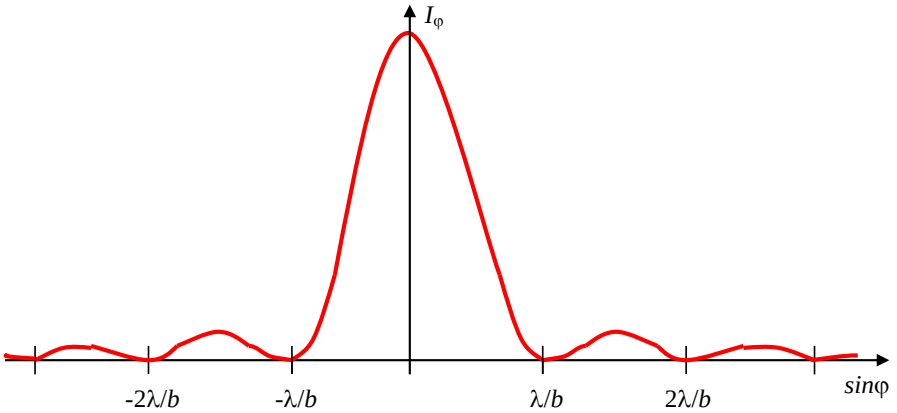


Рис. 2.34

Положение максимумов интенсивности определяется уравнением

$$\frac{d}{du}\left(I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}\right)=0,$$

т. е. трансцендентным уравнением

$$\mathrm{tg}u = u.$$

Последнее уравнение имеет корни $u_0 = 0$; $u_1 = 1{,}43\pi$; $u_2 = 2{,}46\pi$; $u_3 = 3{,}47\pi$ и т. д. Значение интенсивности в максимумах быстро убывает с увеличением порядка. Их отношения приближенно можно выразить как

$$1:[2/3\pi]^2:[2/5\pi]^2:\ldots.$$

Высота максимума интенсивности пропорциональна квадрату ширины щели, так как возрастающий пропорционально b световой поток распространяется в пределах убывающего угла ($\varphi_1 \sim 1/b$)). Относительная интенсивность остается неизменной: распределение света по максимумам разных порядков не зависит от ширины щели. При сужении щели картина расширяется, а её яркость уменьшается. Когда размер b приближается к длине волны λ, центральный максимум охватывает все поле зрения; освещенность экрана уменьшается от центра к краям монотонно.

Полученные результаты можно использовать для оценки дифракционной расходимости пучков света, например, в результате прохождения через диафрагму. Основная часть светового потока приходится на центральный дифракционный максимум, поэтому его ширину можно принять в качестве оценки угловой расходимости $\Delta\varphi$ пучка с поперечным сечением b: $\Delta\varphi \sim \lambda/b$. Это угловое уширение пучка обусловлено волновой природой света, и его в принципе нельзя устранить при заданной ширине сечения пучка. Строго параллельных световых пучков не существует. На пути длиной l пучок претерпевает дифракционное уширение порядка $l\cdot\Delta\phi=\lambda l/b$. Этим уширением можно пренебречь лишь тогда, когда оно мало по сравнению с исходной шириной пучка, т. е. при

условии $\lambda I << b^2$. В таких условиях пучок можно считать параллельным и использовать для его описания геометрическую оптику.

Примечание 1. В случае наклонного падения волны на щель получаем, что разность хода лучей, проходящих около крайних точек щели, равна

$$\Delta = b(\sin\varphi - \sin\theta). \qquad (2.5.10)$$

Отсюда условие появления дифракционных минимумов имеет вид (см. рис. 2.35):

$$b(\sin\varphi - \sin\theta) = m\lambda.$$

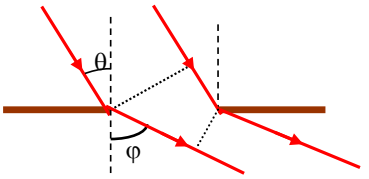


Рис. 2.35

2.5.2. Дифракция на отверстии

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера при падении плоской волны на *отверстие в экране*. В отличие от длинной щели здесь волны дифрагируют во всех направлениях. Каждой точке наблюдения *P* соответствует определенное направление дифрагировавших волн, которое можно задать единичным вектором $\vec{s}$. В качестве вспомогательной поверхности *S* выберем плоскость экрана *x*0*y* (рис. 2.36).

Разность хода вторичных волн, идущих по направлению z от элемента *dS* этой поверхности и из начала координат 0 равна проекции вектора $\vec{r}$, определяющего положение *dS* в плоскости *x*0*y*, на направление z, т. е. $\vec{r}\cdot\vec{s}$. В соответствии с принципом Гюйгенса — Френеля напряженность поля в точке *P* пропорциональна интегралу по всей площади отверстия в экране:

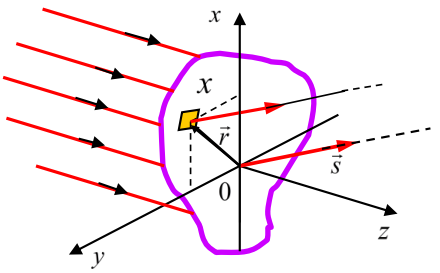


Рис. 2.36

$$E_P \sim \int E(\vec{r})\exp[-ik(\vec{r}\vec{s})]dS = \int E(\vec{r})\exp(-i\vec{k}\vec{r})dS, \qquad (2.5.11)$$

где $\vec{k} = k\vec{s}$ — волновой вектор световой волны, дифрагировавшей в направлении z. Опущенный в этом выражении коэффициент наклона $K(\varphi)$ можно считать постоянным, когда размеры отверстия много больше длины световой волны. При этом заметную интенсивность имеют лишь волны, дифрагировавшие на малые углы α. Напряженность $E(\vec{r})$ в плоскости *x*0*y* принимается в пределах отверстия в экране равной напряженности поля падающей волны и равной нулю за его пределами. Если понимать $E(x, y)$ именно таким образом, то можно распространить интегрирование в (2.5.11) на всю плоскость *x*0*y*:

$$E_P \sim \iint E(x,y)\exp[-i(k_x x + k_y y)]dxdy \equiv E(k_x, k_y). \qquad (2.5.12)$$

а) Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии.

При нормальном падении плоской волны на прямоугольное отверстие со сторонами a и b, параллельными осям x и y, соответственно, для (2.5.12) получаем

$$E_P \sim E\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} exp\left[-i\left(k_x x + k_y y\right)\right]dxdy = Eab\frac{\sin u_1}{u_1}\frac{\sin u_2}{u_2}, \qquad (2.5.13)$$

где $u_1 = k_x a/2$; $u_2 = k_y b/2$. Распределение интенсивности в дифракционной картине определяется выражением

$$I = I_0\left(\frac{\sin u_1}{u_1}\right)^2\left(\frac{\sin u_2}{u_2}\right)^2. \qquad (2.5.14)$$

Таким образом, в дифракционной картине от прямоугольного отверстия распределение интенсивности определяется произведением распределений интенсивностей от взаимно перпендикулярных щелей. Интенсивность практически равна нулю вдоль взаимно перпендикулярных рядов линий, параллельных сторонам прямоугольника. Заметную интенсивность имеют лишь средние цепочки максимумов, образующие «крест». Относительная высота максимумов интенсивности, расположенных вдоль этих линий, характеризуется тем же соотношением, что и для дифракции света от точечного источника на длинной узкой щели:

$$1:\left[2/3\pi\right]^2:\left[2/5\pi\right]^2:\ldots.$$

Величина остальных максимумов столь мала (0,2% для ближайших к центру), что они практически не видны. Большая часть светового потока приходится на центральный максимум, который можно рассматривать как получающееся в фокальной плоскости объектива изображение находящегося в фокусе коллиматора точечного источника при ограничении сечения пучка света прямоугольной диафрагмой. Это изображение шире в направлении более короткой стороны прямоугольника.

б) Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.

Дифракция Фраунгофера от круглого отверстия представляет большой практический интерес, так как в оптических приборах оправы линз и объективов, также диафрагмы имеют обычно круглую форму. В рассматриваемом случае при вычислении интеграла (2.5.11) целесообразно перейти к полярным координатам ρ и φ в плоскости отверстия: $x = \rho cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$.

Направление $\vec{s}$ дифрагировавшей волны, соответствующее точке P, удобно характеризовать углом ϑ с осью z и азимутальным углом ψ: $k_x = ksin\vartheta cos\psi$; $k_y = ksin\vartheta sin\psi$. Тогда $k_x x + k_y y = k\rho sin\vartheta cos(\varphi - \psi)$ и интеграл (2.5.11) принимает вид

$$E_P \sim E\int_0^a\int_0^{2\pi} exp[-ik\rho\sin\vartheta\cos(\varphi-\psi)]\rho d\rho\, d\varphi\,. \qquad (2.5.15)$$

Здесь a — радиус отверстия. Используя интегральное представление для специальных функций Бесселя $J_n(z)$ при $n = 0$:

$$J_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} exp(iz\cos\varphi)d\varphi\,,$$

выразим напряженность поля вторичных волн в точке P через интеграл от $J_0(k\rho sin\vartheta)$, который вычисляется с помощью соотношения $\int zJ_0(z)dz = zJ_1(z)$. Таким образом, дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид совокупности светлых и темных колец со следующим радиальным распределением интенсивности:

$$I(\vartheta)=I_0\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2, \qquad (2.5.16)$$

где $u = ka\sin\vartheta = 2\pi/\lambda\cdot a\sin\vartheta \approx 2\pi/\lambda\cdot a\vartheta$. Эта функция имеет главный максимум при $u = 0$ и осциллирует с ростом u с быстрым уменьшением амплитуды, подобно функции $(sin\, u/u)^2$, описывающей дифракцию на щели. Уже в ближайшем максимуме интенсивность составляет менее 2% от интенсивности центрального максимума, на который приходится 84% проходящего через отверстие светового потока. Поэтому центральный максимум, получивший название *диск Эйри* и имеющий угловой радиус $\vartheta_1 = 0{,}61\lambda/a$, можно рассматривать как изображение точечного источника, уширенное дифракцией на круговой диафрагме радиусом a.

Угловые радиусы ϑ_n темных колец равны $0{,}61\lambda/a$; $1{,}12\lambda/a$; $1{,}62\lambda/a$; ... Расстояние между соседними кольцами с увеличением их номера приближается к $\lambda/2a$. Эффективный размер дифракционной картины и здесь обратно пропорционален размеру отверстия.

Примечание 2. Теория дифракции света дает строгое обоснование геометрической оптике и определяет условия её применимости.

Примечание 3. *Йозеф Фраунгофер, немецкий физик, 1787–1826.*
Джордж Биддель Эйри, британский математик и астроном, 1801–1892, член-корреспондент Петербургской академии наук с 1840.

2.6. Дифракционная решетка

2.6.1. Когерентный вклад *N* источников

Дифракционная решетка — совокупность большого числа одинаковых щелей, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние.

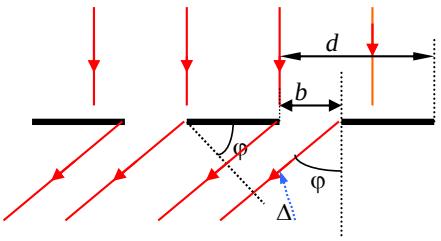


Рис. 2.37

Введем параметры дифракционной решетки: b — размер щели, d — расстояние между щелями, или *период решетки*. Для простоты сначала рассмотрим нормальное падение на решетку параллельного пучка света (рис. 2.37), после прохождения света ставится собирающая линза, которая дает изображение на экране.

Каждая щель дает когерентный вклад, если радиус когерентности падающего света значительно больше размеров решетки. Таким образом, имеем N источников света — N щелей, которые дают свой вклад в электрический вектор в точке наблюдения P с амплитудой E_φ от каждой щели. Однако эти вклады от соседних источников сдвинуты по фазе на величину $\delta = k\Delta$ (рис. 2.38), т. е. для сдвига фаз имеем

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d sin\varphi. \qquad (2.6.1)$$

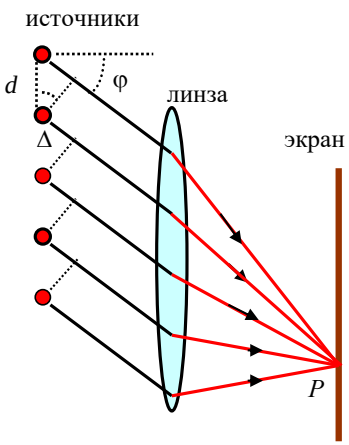


Рис. 2.38

Итак, сосчитаем вклад от N источников, отстоящих на расстоянии d друг от друга и сдвинутых по фазе на δ, в точке наблюдения P, находящейся под углом φ (рис. 2.38). Удобнее для математического вывода суммарного вклада волну записать в экспоненциальной форме. Тогда, если a — амплитуда волны от одной щели, имеем следующие вклады от щелей:

от 1-го источника $E_1 = a\,exp(i\omega t)$;
от 2-го источника $E_2 = a\,exp(i\omega t + i\delta)$;
от 3-го источника $E_3 = a\,exp(i\omega t + 2i\delta)$
……
от N-го источника $E_N = a\,exp(i\omega t + (N-1)i\delta)$.

Результирующее колебание в точке P равно сумме отдельных вкладов:

$$E = \sum_{m=1}^{N} E_m = ae^{i\omega t}\sum_{m=1}^{N} e^{i(m-1)\delta}$$

Воспользовавшись суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{i\delta}$, получаем

$$E = ae^{i\omega t}\frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}} = Ae^{i\omega t}. \qquad (2.6.2)$$

Здесь мы ввели комплексную амплитуду A:

$$A = a\frac{1-exp(iN\delta)}{1-exp(i\delta)} = A_0 e^{i\alpha}, \qquad (2.6.3)$$

где A_0 — обычная амплитуда результирующего колебания, а α — его начальная фаза. Получим обычную амплитуду, исходя из соотношения для комплексных чисел $A \cdot A^* = A_0^2\left(e^{i\alpha}\cdot e^{-i\alpha}\right) = A_0^2$:

$$A_0^2 = a^2\frac{(1-exp(iN\delta))(1-exp(-iN\delta)}{(1-exp(i\delta))(1-exp(-i\delta))} = a^2\frac{2-e^{iN\delta}-e^{-iN\delta}}{2-e^{i\delta}-e^{-i\delta}} = a^2\frac{1-\cos N\delta}{1-\cos\delta} = a^2\frac{\sin^2\frac{N\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}. \qquad (2.6.4)$$

Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то получаем следующее соотношение:

$$I(\varphi) = I_\varphi\frac{\sin^2\frac{N\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}, \qquad (2.6.5)$$

где I_φ — интенсивность света создаваемого одной щелью (см. § 2.5). Подставляя вклад от одной щели (2.5.7) с учетом разности фаз (2.6.1) в (2.6.5), получаем интенсивность света, рассеянного решеткой под углом φ:

$$I(\varphi) = I_0\frac{sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda}sin\varphi\right)^2}\frac{sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}sin\varphi\right)}{sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}sin\varphi\right)}. \qquad (2.6.6)$$

Здесь I_0 — интенсивность, создаваемая одной щелью напротив центра линзы ($\varphi = 0$).

2.6.2. Дифракционная картина от дифракционной решетки

Проанализируем полученное выражение (2.6.6).

1. Первый множитель обращается в 0 в точках, где выполняется условие

$$bsin\varphi = \pm m\lambda. \qquad (2.6.7)$$

За счет этого множителя получаем дифракционную картину от одной щели (m = 1, 2, 3, ...), рассмотренную в предыдущем параграфе (см. рис. 2.34).

2. Второй множитель принимает максимальное значение при разности фаз $\delta = 2\pi\tilde{m}$, где $\tilde{m} = 0,1,2,3,...$, т. е. при условии

$$\frac{\pi d}{\lambda} sin\varphi = \pm\tilde{m}n \qquad \text{или} \qquad dsin\varphi = \pm\tilde{m}\lambda. \qquad (2.6.8)$$

В этом легко убедиться, сосчитав следующий предел:

$$\lim_{\delta \to 2\pi\tilde{m}} \frac{sin^2 N\delta/2}{sin^2\delta/2} = N^2.$$

Таким образом, интенсивность в этих максимумах в N^2 раз выше, чем интенсивность от отдельной щели.

$$I = N^2 I_\varphi. \qquad (2.6.9)$$

Максимумы, определяемые условием (2.6.8), называются *главными максимумами* дифракционной решетки, а номер $\tilde{m}$ — порядок главного максимума. Максимум 0-го порядка ($\tilde{m}$ = 0) — один, он находится по центру дифракционной картины (φ = 0). Максимумы следующих порядков появляются попарно ($\pm\tilde{m}$ = ±1, ±2,...) и расположены по обе стороны от главного максимума нулевого порядка (рис. 2.39).

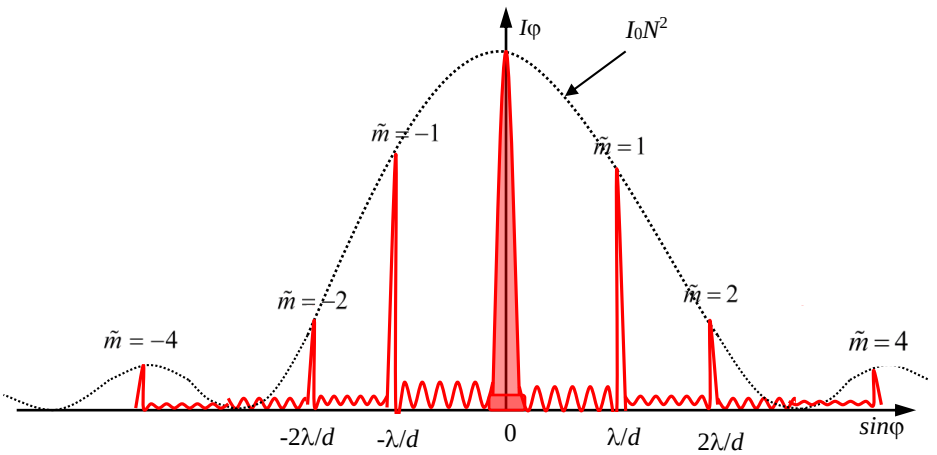


Рис. 2.39

3. Кроме минимумов, определяемых (2.6.7) одной щелью, имеются дополнительные минимумы в промежутках между соседними главными максимумами, которые определяются условиями

$$sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda} sin\varphi\right) = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{N\pi d}{\lambda} sin\varphi = n\pi,$$

за исключением точек, где появляется главный максимум $\frac{\pi d}{\lambda} sin\varphi = \tilde{m}\pi$. Тогда получаем условие появления дополнительных минимумов:

$$d sin\varphi = \pm \frac{n}{N}\lambda, \qquad (2.6.10)$$

при n = 1, 2, 3, ..., N – 1, N + 1, N + 2, ... (кроме n = N, 2N, 3N, ...).

Построим график интенсивности при условии, которое является обычным для дифракционной решетки, а именно, что $d/b > 1$. При этом происходит наложение главных максимумов и дополнительных минимумов на картинку от одной щели. Количество наблюдаемых главных максимумов определяется из условия:

$$sin\varphi = \frac{\tilde{m}\lambda}{d} \le 1 \quad \text{или} \quad \tilde{m} \le \frac{d}{\lambda}. \qquad (2.6.11)$$

Вклад от одной щели очень мал по сравнению с максимумами, получаемыми от дифракционной рещетки. Поэтому на рисунке 2.39 для сравнения вклад от одной щели умножен на множитель N^2. Из рисунка 2.39 видно, как главные максимумы различных порядков $\tilde{m}$ модулируются кривой интенсивности от одной щели.

Следует отметить, что иногда выгодно использовать наклонное падение света на дифракционную решетку. Для случая наклонного падения света на решетку под углом φ_0 разность хода лучей от соседних щелей равна

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = d(sin\varphi_0 - sin\varphi).$$

Тогда условие появления главных дифракционных максимумов записывается:

$$d(sin\varphi_0 - sin\varphi) = \pm\tilde{m}\lambda. \qquad (2.6.12)$$

Максимум нулевого порядка виден под углом φ_0, однако количество наблюдаемых порядков будет различно по обеим сторонам от положения главного максимума нулевого порядка. Более высокие порядки дифракции будут наблюдаться, как это видно из (2.6.12), при отрицательных значениях угла φ. Несмотря на то, что интенсивность дифракционной картины падает с увеличением угла дифракции (рис. 2.39), при экспериментальных измерениях более выгодно использовать высокие порядки дифракции, чтобы увеличивать разрешающую способность решетки.

2.6.3. Дифракционная решетка как спектральный прибор

Дифракционные решетки представляют собой важнейшие спектральные приборы, предназначенные *для разложения света в спектр и измерения длин волн*. Первоначально они применялись в оптическом диапазоне электромагнитных волн, однако в дальнейшем решетки стали использоваться для различных измерений в широком диапазоне длин волн от ренгеновских квантов до радиоволн. Под дифракционной решеткой обычно понимается всякая структура, обладающая пространственной периодичностью. В зависимости от типа решетки и использованных материалов при их изготовлении дифракционные наблюдения проводят как в проходящем свете, так и в отраженном свете.

В предыдущей части этого параграфа мы в основном рассматривали свойства одномерной или линейной решетки, в которой свойства структуры меняются перидически только в одном направлении. Однако основные принципы и законы перераспределения интенсивности падающего излучения сохраняются при использовании двухмерных и трехмерных решеток. Некоторые применения пространственных решеток кратко рассмотрим в следующем параграфе.

Обратимся к применению дифракционной решетки в качестве *спектрального прибора*. Как получили выше, положение главных максимумов зависит от длины волны падающего света λ. Если на решетку падает белый свет, то все максимумы (кроме максимума нулевого порядка) «окрашены», т. е. наблюдается *разложение белого света в спектр*. Причем свет с более короткими длинами волн (фиолетовый свет) в главных максимумах концентрируется ближе к центру дифракционной картины, а свет с большими длинами волн (красный свет) — наружу.

Рассмотрим некоторые характеристики дифракционной решетки как спектрального прибора.

1. **Угловая дисперсия**. *Угловая дисперсия* определяет угловое расстояние δφ между двумя спектральными линиями, отличающимися на единицу длины волны λ.

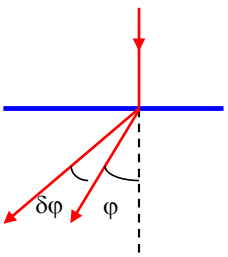


Рис. 2.40

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}. \qquad (2.6.13)$$

Продифференцируем условие появления главного максимума (2.6.8), при этом получаем выражение для угловой дисперсии:

$$d\cos\varphi \cdot \delta\varphi = \tilde{m}\delta\lambda,$$

$$D = \frac{\tilde{m}}{d\cos\varphi}. \qquad (2.6.14)$$

Из (2.6.14) с очевидностью получаем следующие выводы:

а) чем выше порядок спектра $\tilde{m}$, тем выше D;
б) чем меньше d, тем выше D;
в) для увеличения D выгодно использовать скользящее падение.

Последнее утверждение следует из соотношения (2.6.12) для получения дифракционной картины при скользящем падении света на решетку.

2. **Дисперсионная область**. Если спектры соседних порядков перекрываются, то спектральный аппарат становится непригодным для исследования этого участка спектра. Максимальная ширина спектрального интервала Δλ, при которой нет перекрытия, называется *дисперсионной областью* спектрального аппарата.

Пусть диапазон длины волны падающего излучения занимает интервал от λ до $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$. Тогда запишем условия перекрытия правого конца спектра излучения ($\tilde{m} + 1$)-го порядка для длины волны λ и левого конца $\tilde{m}$-го порядка для длины волны λ':

$$d\sin\varphi = \tilde{m}\lambda',$$
$$d\sin\varphi = (\tilde{m}+1)\lambda.$$

Приравнивая, получаем соотношение $\tilde{m}\lambda' = (\tilde{m}+1)\lambda$ и отсюда определяем дисперсионную область:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{\lambda}{\tilde{m}}. \qquad (2.6.15)$$

Чем больше порядок спектра $\tilde{m}$, тем уже дисперсионная область.

3. **Разрешающая способность**. Наименьшая разность длин волн двух спектральных линий $\delta\lambda$, при которой спектральный аппарат разрешает эти линии, называется спектральным разрешаемым расстоянием, а величина

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \qquad (2.6.16)$$

разрешающей способностью аппарата.

Дж. Рэлей для дифракционной решетки предложил критерий спектрального разрешения. Линии с длинами волн λ и λ' считаются разрешенными, если главный максимум дифракционной картины для одной длины волны совпадает по своему положению с 1-м дифракционным минимумом в том же порядке для другой длины волны. Так, для наклонного падения из (2.6.12) имеем

$$d(sin\varphi - sin\varphi_0) = \left(\tilde{m} + \frac{1}{N}\right)\lambda,$$
$$d(sin\varphi - sin\varphi_0) = \tilde{m}\lambda'.$$

Отсюда, приравнивая, получаем

$$\left(\tilde{m} + \frac{1}{N}\right)\lambda = \tilde{m}\lambda'$$

и далее

$$\delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{\lambda}{\tilde{m}N}. \qquad (2.6.17)$$

Разрешающая способность аппарата определяется через произведение порядка спектра и числа щелей в решетке:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \tilde{m}N. \qquad (2.6.18)$$

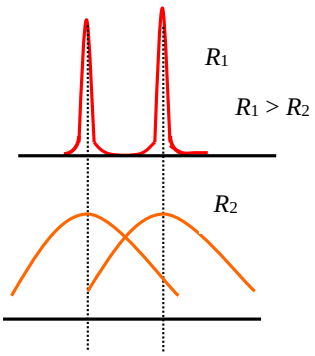


Рис. 2.41

На примере, изображенном на рисунке 2.41, видно, что при одинаковой угловой дисперсии D, но при разных разрешающих способностях R, имеем следующие изменения в спектре: 2 линии спектра, близкие по частоте, могут быть разделены при использовании аппарата с большей разрешающей способностью.

Примечание 1. *Джон Уильям Рэлей, английский физик, 1842–1919,* Нобелевская премия 1904 г. за открытие аргона.

2.7. Дифракция рентгеновских лучей

Помимо обычных одномерных дифракционных решеток бывают двумерные и трехмерные (пространственные) дифракционные решетки. В этих решетках свойство периодичности структуры выполняется в двух или в трех различных направлениях. Такие решетки играют важную роль в физике рентгеновских лучей.

Обычные оптические дифракционные решетки не годились, чтобы наблюдать дифракцию рентгеновских лучей, длины волн которых ~0,1 нм и меньше. М. Лауэ в 1912 г. предложил использовать для наблюдения дифракции таких волн кристаллическую структуру как дифракционную решетку. Кристаллические твердые тела образуют пространственные (иногда двумерные) решетки, которые обладают периодичностью в трех различных направлениях.

В современной физике возникли два основных направления, связанных с использованием рентгеновского излучения: *рентгеновская спектроскопия* и *рентгеноструктурный анализ*. Первое направление использует естественные кристаллы известной кристаллической структуры для анализа рентгеновского излучения и измерения длин волн. Второе направление использует рентгеновское излучение известной длины волны для выяснения структуры кристаллов и измерения параметров этой структуры. Наблюдение дифракции рентгеновских лучей обычно осуществляется с помощью фотопластинок без линз и зеркал ввиду отсутствия соответствующих материалов.

Простейший случай дифракции — дифракция лучей на прямолинейной цепочке атомов, расстояние между которыми равно a (период одномерной структуры). Параллельный пучок рентгеновских лучей падает под *углом скольжения* α_0 на цепочку атомов (рис. 2.42) и рассеивается под углом α. Разность хода лучей, рассеянных от соседних атомов, определяется из рисунка 2.42:

$$\Delta = \Delta_2 - \Delta_1 = a(cos\alpha - cos\alpha_0). \qquad (2.7.1)$$

Отсюда следует условие максимального усиления лучей, когда их разность хода равна целому числу волн:

$$\Delta = a(cos\alpha - cos\alpha_0) = m\lambda, \quad (2.7.2)$$

где, как обычно, $m = 0, \pm1, \pm2, ...$ Это условие определяет те направления, в которых наблюдаются дифракционные максимумы. В принципе каждому значению m соответствует свой конус направлений, вдоль которых получаем максимумы интенсивности от этой цепочки атомов, являющейся осью этого конуса.

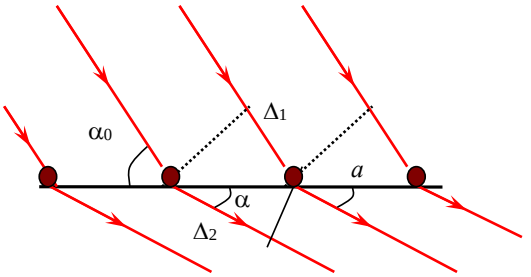


Рис. 2.42

Двумерные и трехмерные решетки могут быть *простыми* (примитивными) и *составными*. Составная решетка состоит из нескольких простых решеток, вставленных друг в друга.

Периодическая структура просматривается по атомным прямым и атомным плоскостям. Элементарной ячейкой простой решетки является параллелепипед с ребрами a_1, a_2, a_3, в вершинах которого находятся атомы. На простую кристаллическую решетку падает параллельный пучок рентгеновских лучей, образующих углы скольжения α_0, β_0, γ_0 с координатными осями X, Y, Z. Дифракционная картина, создаваемая кристаллом, представляет собой максимумы, лежащие на линиях пересечения трех конусов, оси которых параллельны координатным осям. Максимумы обычно регистрируется на фотоплёнке, помещенной за кристаллом. Формулы Лауэ, определяющие положение максимумов при дифракции, записываются:

$$a_1(cos\alpha - cos\alpha_0) = m_1\lambda,$$
$$a_2(cos\beta - cos\beta_0) = m_2\lambda, \qquad (2.7.3)$$
$$a_3(cos\gamma - cos\gamma_0) = m_3\lambda,$$

где $m_1, m_2, m_3 = 0, \pm1, \pm2, ...$ Формулы Лауэ указывают направления пучков, возникающих при дифракции на кристалле. Дифракционное изображение неподвижного монокристалла, полученное с помощью рентгеновских лучей, часто называют *лауэграммами*. На лауэграммах, кроме центрального пятна, образованного неотклонённым рентгеновским пучком, появляются светлые пятна, число и расположение которых зависит от типа кристалла и его ориентации относительно пучка.

Иная трактовка дифракции рентгеновских лучей — отражение пучка рентгеновских квантов от различных атомных плоскостей (рис. 2.43). Интенсивность лучей, отраженных одной атомной плоскостью довольно мала, но за счет интерференционного усиления лучей, отраженных от ряда атомных плоскостей, наблюдаются заметные максимумы светового потока.

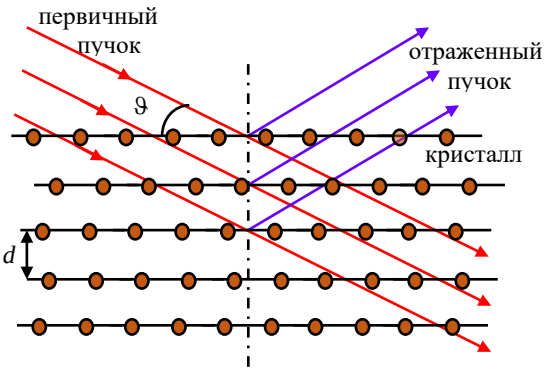


Рис. 2.43

Для интерференционного усиления отраженных атомными плоскостями волн должно выполняться условие

$$2d\sin\vartheta = m\lambda, \quad (2.7.4)$$

где ϑ — угол скольжения, d — межплоскостное расстояние в кристалле (рис. 2.43). Формула (2.7.4) носит название формулы Вульфа — Брэгга.

Условие Вульфа — Брэгга позволяет определить межплоскостные расстояния d в кристалле, так как λ обычно известна, а углы ϑ измеряются экспериментально.

Условие (2.7.4) получено без учёта эффекта преломления для безграничного кристалла, имеющего идеально-периодическое строение. В действительности дифрагированное излучение распространяется в конечном угловом интервале $\vartheta \pm \Delta\vartheta$, причём ширина этого интервала определяется числом отражающих атомных плоскостей (т. е. пропорциональна линейным размерам кристалла), аналогично числу штрихов дифракционной решётки.

В ренгеноструктурном анализе для исследования кристаллической структуры металлов и других кристаллических материалов в порошкообразном состоянии применяется метод Дебая — Шерера. На образец, состоящий из множества маленьких кристалликов (поликристалл), направляется монохроматический рентгеновский пучок с известной длиной волны λ. В огромном количестве беспорядочно ориентированных кристалликов найдется множество таких, для которых окажется выполненным условие Вульфа — Брэгга (2.7.4). При этом дифрагированный луч для разных кристалликов будет лежать во всевозможных плоскостях. Для каждой системы атомных слоев и каждого m получится не одно направление максимума, а целый конус направлений, ось которого совпадает с направлением падающего пучка. Получаемая дифракционная картина (*дебаеграмма*) фотографируется. Если фотопластинка расположена перпендикулярно оси конуса, то дебаеграмма имеет вид концентрических кругов. Определив радиусы этих кругов, можно определить возможные

значения угла ϑ, затем по формуле (2.7.4) вычислить соответствующие межплоскостные расстояния и в дальнейшем воспроизвести кристаллическую структуру образца.

Примечание 1. *Макс Феликс Теодор фон Лауэ, немецкий физик-теоретик, 1879–1960,* Нобелевская премия 1914 г. за открытие дифракции рентгеновских лучей.
Георгий Викторович Вульф, советский кристаллофизик, 1863–1925.
Лоуренс Брэгг, английский физик, 1890–1971, Нобелевская премия 1915 г. за вклад в изучение структуры кристаллов с помощью рентгеновских лучей.
Петер Джозеф Вильгельм Дебай, нидерландский и американский физик и физикохимик, 1884–1966, Нобелевская премия по химии 1936 г.
Пауль Шерер, швейцарский физик-экспериментатор, 1890–1969.

2.8. Голография

Идея голографии состоит в том, чтобы получить оптическое изображение путем восстановления волнового фронта. Принципиально эта идея была выдвинута М. Вольфке в 1920 г., но затем была забыта.

Годом рождения *голографии* считается 1948 г., когда английский ученый Д. Габор предложил оригинальный метод повышения разрешающей способности электронных микроскопов. Идея Габора состояла в том, чтобы сначала зарегистрировать на фотопластинке интерференционную картину, сформированную электронным пучком, прошедшим без рассеяния, и пучком, рассеянным (дифрагированным) на исследуемом объекте. Такую пластинку Д. Габор назвал *голограммой*. После этого тем или иным способом изображение интерференционной картины увеличивалось в несколько тысяч раз и освещалось видимым светом, длина которого во много раз больше, чем у электронного пучка. Дифрагированный на интерференционной картине свет формировал изображение объекта. Расчеты показывали, что разрешающая способность при этом увеличивалась в несколько раз, однако модельные эксперименты Габора с некогерентными источниками света завершились неудачно. Требовались источники света, обладающие высокой степенью временной и пространственной когерентности.

Термин «*голография*» происходит от двух греческих слов: holos — полный и grapho — пишу. То есть голография дословно означает полная запись, подчеркивая, что голографический метод позволяет регистрировать не только интенсивность, но и фазу световой волны.

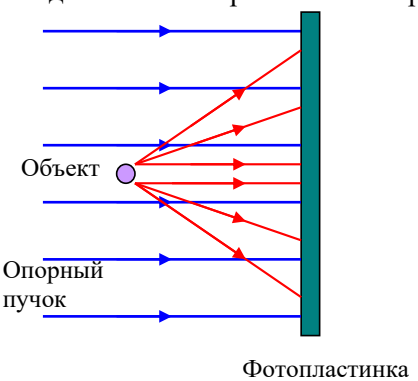


Рис. 2.44

Второе рождение голографии произошло после появления первых лазеров в начале 1960-х гг. Уже в 1961 г. американские физики Э. Лейт и Ю. Упатниекс получили первые голограммы, используя когерентное излучение газового лазера. В 1962 г. Ю. Н. Денисюк продемонстрировал отражательные голограммы, которые восстанавливались белым (некогерентным) светом. Изготовляется голограмма, т. е. фотопластинка, с помощью которой можно восстанавливать световую волну, рассеянную телом. Далее создаются условия для восстановления этой волны.

Голограммы Лейта — Упатниекса.

На первом этапе происходит запись голограммы. Для этого когерентный световой пучок тем или иным способом разделяется на два пучка. Один из них — *опорный* — отражается от зеркала, другой — *объектный* — рассеивается объектом.

Примерная схема изображена на рисунке 2.45. Там, где опорный и объектный пучки пересекаются, происходит их интерференция. В результате интерференции в одних областях пространства световые колебания усиливаются, а в других — ослабляются. При этом локальное интерференционное поле представляет собой периодически чередующиеся светлые и темные области, расстояние между которыми определяется длиной волны света и углом схождения пучков. При небольших углах схождения (несколько градусов) период интерференционного поля составляет несколько микрометров. Крупномасштабные изгибы интерференционного поля, изменение его контраста однозначно определяются фазовой поверхностью объектного пучка.

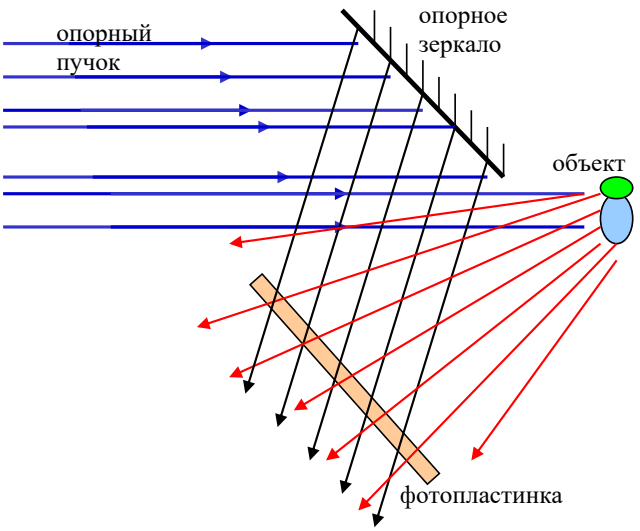


Рис. 2.45

Если в интерференционное поле поместить пластинку с нанесенным на ее поверхность тонким фоточувствительным слоем, обладающим достаточно высоким разрешением, то на ней будут зафиксированы интерференционные полосы. После обработки такая пластинка является голограммой.

Второй этап голографического процесса связан с восстановлением голографического изображения. Голограмма освещается опорным пучком примерно под тем же углом, что и при записи (рис. 2.46). Это опорный пучок испытывает дифракцию на голограмме как на дифракционной решетке. Дифрагированный пучок является почти точной копией объектного пучка, который записывал голограмму. Поэтому, если посмотреть сквозь голограмму навстречу дифрагированному пучку, то можно увидеть объемное изображение объекта.

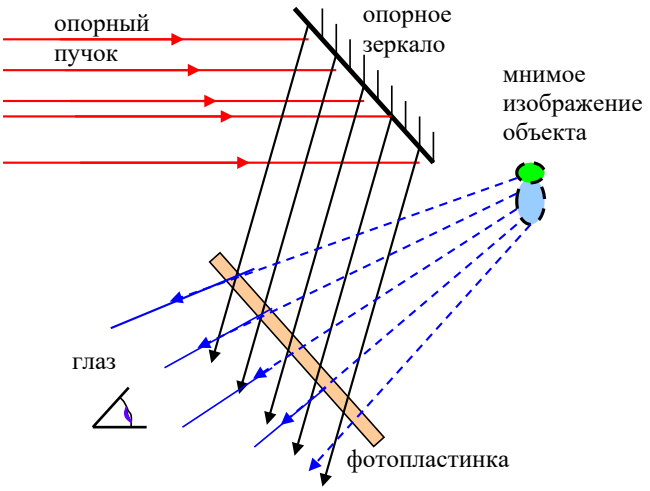


Рис. 2.46

Голограммы Денисюка.

Метод Ю. Н. Денисюка тесно связан с методом цветной фотографии Г. Липпмана. Этот тип голограмм называют также толстослойными, объемными, отражательными голограммами или голограммами на встречных пучках.

Напомним, что для получения высококачественных цветных фотографий Липпман помещал достаточно толстую (несколько десятков микрон) фоточувствительную эмульсию на зеркало. Цветное изображение проецировалось на эту эмульсию, проходило сквозь нее и отражалось назад зеркалом. В результате интерференции падающей и отраженной световой волны в объеме эмульсии возникали светлые и темные области, примерно параллельные плоскости фоточувствительного слоя. Так как расстояние между интерференционными областями оказывалось порядка половины длины волны света, то в фоточувствительном слое помещалось десятки таких областей. После фотографического проявления и фиксации в объеме фоточувствительного слоя оказывались зарегистрированными светлые области интерференционного поля в виде

слабо отражающих поверхностей. Расстояние между этими поверхностями однозначно определялось локальным цветом регистрируемого изображения. Теперь если убрать зеркало и осветить этот слой белым светом, то отражаться от каждого участка слоя будет только тот цвет, для которого расстояние между отражающими поверхностями в этом месте равно половине длины волны (см. § 1.4, гл. 1).

При записи голограммы Денисюка когерентный пучок света, являясь одновременно опорным, проходит сквозь фотопластинку и рассеивается объектом (рис. 2.47). Объектный пучок распространяется почти навстречу опорному пучку и образует интерференционное поле в виде чередующихся светлых и темных областей, расстояние между которыми равно половине длины волны. В объеме фоточувствительного слоя возникают слабо отражающие слои, форма и расположение которых определяется светлыми областями интерференционного поля, в котором «закодировано» распределение амплитуды и фазы излучения, отраженного объектом.

Если теперь осветить такую фотопластинку (голограмму) пучком некогерентного белого света, то эффективно отражаться будет только свет с такой длиной волны, которая в 2 раза больше расстояния между отражающими слоями голограммы. Чем больше слоев, тем большим отражением и спектральной селективностью обладает голограмма. Отраженная волна является почти точной копией волны от объекта, которая записывала голограмму. Поэтому в отраженном свете мы видим мнимое объемное изображение объекта (рис. 2.48).

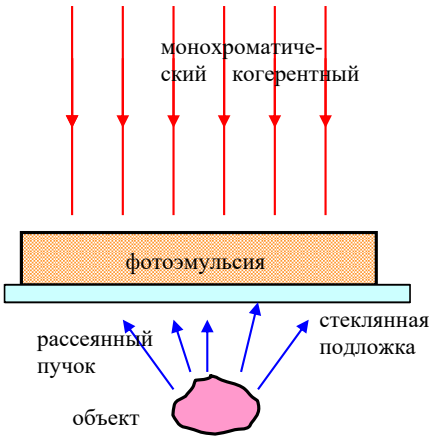


Рис. 2.47

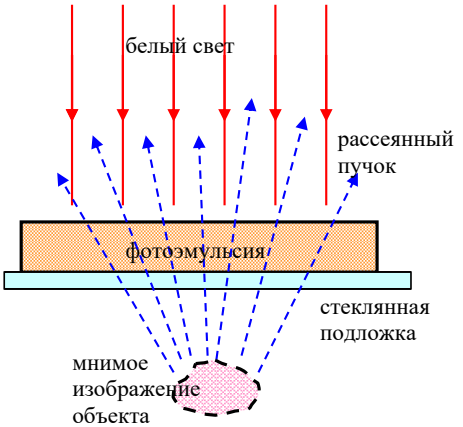


Рис. 2.48

Объемность голографического изображения.

В Липпмановской фотографии для получения цветного изображения и его регистрации глазом используется некогерентный свет, а частично отражающие слои в фотоэмульсии «кодируют» локальный цвет изображения, а не

кривизну волнового фронта. Поэтому Липпмановские фотографии не обладают эффектом объемности. В голографии Денисюка для получения голограммы применяются источники когерентного света (лазеры), иногда даже несколько таких источников, когда хотят получить цветную голограмму. В этом случае частично отражающие слои «кодируют» фазу объектной волны, а при восстановлении голограммы белым (некогерентным) светом изображение получается объемным.

Отметим, что в то же время все точки фотографии находятся примерно на одинаковом расстоянии от наших глаз, поэтому не надо по-разному фокусировать хрусталик глаза на разные расстояния (аккомодация). Не используется бинокулярность зрения, связанная с тем, что для разных расстояний разные области сетчатки глаза являются сопряженными, т. е. дают единый (не раздвоенный) образ предмета. Объемность зафиксированного изображения оценивается глазом с использованием психологических критериев, как уменьшение размеров предмета при удалении, перекрывание близкими предметами более далеких предметов, менее четкое изображение более далеких и т. д. Именно указанные физиологические особенности зрения ответственны за ощущение объемности рассматриваемого пространства.

Пусть опорная и объектная волны имеют вид:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} e^{i\left(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}\right)}, \qquad \vec{E}_2 = \vec{E}_{20} e^{i\left(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}\right)}, \tag{2.8.1}$$

где $\vec{E}_{10}, \vec{E}_{20}$ — комплексные амплитуды с пространственно зависящей фазой. Не будем для простоты учитывать поляризационные эффекты.

Суперпозиция этих полей образует интерференционное поле, распределение интенсивности в котором определяется квадратом суммарной амплитуды:

$$I = \left(E_1 + E_2\right)\left(E_1 + E_2\right)^* = \left|E_1\right|^2 + \left|E_2\right|^2 + E_2 E_1^* + E_1 E_2^* . \tag{2.8.2}$$

Фотоотклик среды определяется этим же полем:

$$\varepsilon \sim \gamma I , \tag{2.8.3}$$

где коэффициент γ определяет фотохромные и фоторефрактивные свойства среды. Пространственно модулированные слагаемые $E_2 E_1^*$ и $E_1 E_2^*$ определяют голографические характеристики среды, а $\left|E_1\right|^2$ и $\left|E_2\right|^2$ обуславливают квазиоднородную засветку и соответствующее изменение коэффициента поглощения или показателя преломления среды.

Осветим теперь эту среду волной E_1. Тогда на выходе из среды получаем, учитывая только интерференционные слагаемые:

$$E \sim \gamma E_2 E_1^* E_1 + \gamma E_1 E_2^* E_1 . \tag{2.8.4}$$

Первое слагаемое в этом выражении соответствует дифрагированной волне в направлении $\vec{k}_2$, которая полностью идентична объектной волне. Второе слагаемое соответствует восстановленной волне E_2^*, распространяющейся навстречу E_2 и образующей действительное псевдоскопическое изображение. При его рассмотрении глазом выпуклые места кажутся вогнутыми и наоборот.

Примечание 1. *Мечислав Вольфке, польский физик, 1883–1947.*

Деннис Габор, венгерский физик, работал в Лондоне, 1900–1979, Нобелевская премия 1971 г. за изобретение голографии.

Габриэль Липпман, французский физик, 1845–1921, Нобелевская премия 1908 г. за цветную фотографию солнечного спектра.

Юрий Николаевич Денисюк, советский физик, 1927–2006, окончил ЛИТМО и с 1954 г. работал в ГОИ и ФТИ.

Эммет Лейт, американский физик, 1927–2005, профессор электротехники в Университете Мичигана.

Юрис Упатниекс, американский физик латышского происхождения, 1936, профессор Мичиганского университета.

Глава 3. ПРОХОЖДЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

3.1. Законы отражения и преломления электромагнитных волн

3.1.1. Электромагнитные волны на границе двух сред

Когда свет достигает границы раздела двух сред с разными оптическими свойствами, он частично проходит во вторую среду, изменяя направление распространения в случае наклонного падения, и частично возвращается в первую среду. Направление отраженного и преломленного света описывается хорошо известными законами геометрической оптики. Однако эти законы ничего не говорят о поляризации и интенсивности отраженного и преломленного света. Ответ на эти вопросы и вывод законов отражения и преломления дается на основе электромагнитной теории света.

Появление преломленной и отраженной световых волн на границе раздела сред обусловлено теми же физическими причинами, что и изменение фазовой скорости волны при её распространении в неограниченной среде по сравнению со скоростью света в вакууме: электрическое поле падающей волны раскачивает входящие в состав вещества среды заряженные частицы, которые становятся источниками вторичных волн. Задача нахождения отраженной и преломленной волн, возникающих в результате сложения этих когерентных вторичных волн, может быть решена в рамках макроскопической электродинамики, т. е. с помощью уравнений Максвелла и феноменологических материальных уравнений. При этом среды рассматриваются как сплошные, а их оптические свойства задаются показателями преломления. Законы отражения и преломления, а также выражаемые формулами Френеля соотношения между амплитудами и фазами падающей, отраженной и преломленной волн получаются как следствие граничных условий для электромагнитного поля, вытекающих из уравнений Максвелла.

Закономерности отражения и преломления света относятся к наиболее ранним экспериментальным открытиям в оптике. Закон отражения был известен ещё Архимеду. Открытие закона преломления связывают с именами В. Снеллиуса и Р. Декарта.

Рассмотрим идеализированный случай бесконечной плоской границы раздела двух неподвижных *однородных изотропных сред*, каждая из которых занимает целое полупространство. Пусть в одной из сред задана проходящая из бесконечности *плоская монохроматическая волна*, поверхности постоянной фазы которой представляют собой неограниченные плоскости. Падающая на границу раздела волна порождает волновой процесс в обеих средах, которой мы и будем исследовать. Поскольку достаточным является приближенное

выполнение этих условий, то полученные в рассматриваемой модели результаты имеют практическое значение. Действительно, небольшие участки сферической волны, приходящей от удаленного источника, могут рассматриваться как плоские. Аналогично, могут приближенно рассматриваться как плоские небольшие участки неплоской границы, если их размеры велики по сравнению с длиной световой волны длины.

Монохроматичность падающей волны предполагает установившийся характер всех процессов. Падающая, отраженная и преломленная волны составляют полное электромагнитное поле, которое должно удовлетворять определенным *граничным условиям*, заключающимся в непрерывности тангенциальных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на границе раздела сред (при отсутствии на границе свободных зарядов и поверхностных токов):

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}; \tag{3.1.1}$$

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad B_{1n} = B_{2n}. \tag{3.1.2}$$

Связав величины, входящие в (3.1.1) и (3.1.2), уравнениями Максвелла, можно показать, что, если выполняется первая пара уравнений (3.1.1), то автоматически будет выполняться и вторая пара (3.1.2),

Следует отметить, что наличие во второй среде только одной (преломленной) волны, уходящей от границы, не следует непосредственно из уравнений Максвелла, а основано на дополнительном предположении, известном как *условие излучения*. Условие излучения, связанное с *принципом причинности*, дает критерий отбора имеющих физический смысл решений: возбуждаемое тело может порождать лишь уходящие от него волны (отраженные, рассеянные и т. п.). В рассматриваемой задаче физический смысл имеет решение, основанное на предположении о наличии только трех волн: падающей, отраженной и преломленной.

Пусть в рассматриваемых средах отсутствуют ферромагнетики (μ = = const), т. е. первая среда характеризуется показателем преломления $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$, а вторая — $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$. Первую среду мы будем считать прозрачной, для второй среды пока не будем делать таких предположений. Итак, пусть на границу двух сред под углом θ_1 падает плоская монохроматическая электромагнитная волна (рис. 3.1):

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10}\, exp\left[-i\left(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r}\right)\right]. \tag{3.1.3}$$

Отраженная и прошедшая волны могут быть записаны соответственно в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}'_0\, exp\left[-i\left(\omega' t - \vec{k}' \vec{r}\right)\right] \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{20}\, exp\left[-i\left(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

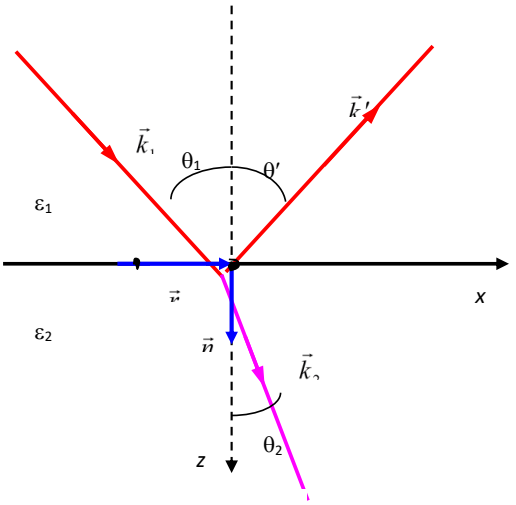


Рис. 3.1.

При этом для волновых векторов имеем обычные соотношения

$$k_1 = \omega_1/v_1, \quad k_2 = \omega_2/v_2, \quad k' = \omega'/v',$$

где скорости распространения света v_i в средах определяются свойствами соответствующих сред $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Плоскость, образованная векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{n}$, называется *плоскостью падения* волны (плоскость *xz* на рис. 3.1). Запишем граничное условие для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля (3.1.1):

$$E_{10\tau} e^{-i\left(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r}\right)} + E'_{0\tau} e^{-i\left(\omega' t - \vec{k}' \vec{r}\right)} = E_{20\tau} e^{-i\left(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r}\right)}. \qquad (3.1.5)$$

Равенство (3.1.5) должно выполняться тождественно в произвольных точках $\vec{r}$ (можно для простоты отсчет вести от точки, находящейся на границе раздела) и в произвольные моменты времени *t*, причем *t* и $\vec{r}$ независимы друг от друга. При этом показатели экспонент должны быть одинаковыми, поэтому выполняются следующие уравнения:

$$\omega_1 t = \omega' t = \omega_2 t; \qquad (3.1.6)$$

$$\vec{k}_1 \vec{r} = \vec{k}' \vec{r} = \vec{k}_2 \vec{r}. \qquad (3.1.7)$$

Отсюда получаем, что частоты отраженной и преломленной волн равны частоте падающей волны, т. е. *частота электромагнитной волны при отражении и преломлении не изменяется*:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega' = \omega. \qquad (3.1.8)$$

Для того чтобы нагляднее воспользоваться вторым равенством (3.1.7), выберем начало отсчета вектора $\vec{r}$ в плоскости раздела так, чтобы он был перпендикулярен к вектору $\vec{k}_1$ (т. е. на рис. 3.1 выбранный вектор $\vec{r}$ направлен вдоль оси *y* перпендикулярно к плоскости рисунка — плоскости падения волны). Тогда из (3.1.7) следует:

$$\vec{k}_1\vec{r} = 0 = \vec{k}'\vec{r} = \vec{k}_2\vec{r}\,. \qquad (3.1.9)$$

Из этого соотношения следует, что волновые векторы (или, иначе, направления распространения) *всех трех волн лежат в одной плоскости — плоскости падения*.

3.1.2. Законы отражения и преломления

Определим соотношения между углом падения волны θ_1, углом отражения θ' и углом преломления θ_2. Выберем вектор $\vec{r}$ вдоль оси *x*, тогда из равенства (3.1.7) имеем:

$$k_1 r sin\theta_1 = k' r sin\theta' = k_2 r sin\theta_2. \qquad (3.1.10)$$

Сокращая на *r* и учитывая, что $k_1 = \frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega'}{v_1} = k'$, получаем из первого равенства (3.1.10), что *угол отражения равен углу падения*:

$$\theta_1 = \theta'. \qquad (3.1.11)$$

Далее из (3.1.10) получаем

$$\frac{sin\theta_1}{sin\theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{u_2}{u_1} = n. \qquad (3.1.12)$$

Здесь n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления рассматриваемых сред, а $n_{12} = n$ — относительный показатель преломления. Закон преломления световых волн часто называют *законом Снеллиуса*:

$$\frac{sin\theta_1}{sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = n. \qquad (3.1.13)$$

В зависимости от относительного показателя преломления угол преломления может быть меньше или больше угла падения. Так, при $n_1 > n_2$ может возникнуть такая ситуация, когда $sin\theta_2 = 1$ и, следовательно, угол преломления $\theta_2 = \pi/2$. Возникает явление *полного внутреннего отражения*, при котором отсутствует волна во второй среде. Угол падения, при котором возникает явление полного внутреннего отражения, называется *предельным углом*:

$$sin\theta_{1пред} = \frac{n_2}{n_1},$$

$$sin\theta_{1пред} = arcsin\frac{n_2}{n_1} = \arcsin n_{12}. \qquad (3.1.14)$$

Подробнее это явление рассмотрим в § 3.3.

Примечание 1. *Архимед, древнегреческий ученый, около 287–212 до нашей эры.*
Виллеброрд Снеллиус, голландский ученый, 1580–1626.
Рене Декарт, французский философ и физик, 1596–1650.

3.2. Поляризация при отражении и преломлении электромагнитных волн

3.2.1. Еще о поляризации света

О поляризации света говорили ранее (см. § 1.5, гл. 1) как об упорядочении направления колебаний вектора $\vec{E}$ в электромагнитной волне. Рассматривали для плоской монохроматической волны: линейно поляризованный свет, циркулярно поляризованный и эллиптически поляризованный свет.

Естественный свет не поляризован — это означает, что колебания вектора $\vec{E}$, их направление в пространстве, в каждый момент времени происходят беспорядочно, т. е. в такой электромагнитной волне получаем всевозможные направления светового вектора. Естественный свет можно представить как сумму двух взаимно перпендикулярных колебаний, имеющих одинаковую интенсивность, но не когерентных. Например, естественный свет можно представить в виде векторной суммы двух компонент

$$E_x = E_0 cos\omega t \qquad \text{и} \qquad E_y = E_0 cos(\omega t + \delta(t)),$$

при этом результирующее колебание $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ хаотически меняет направление, если $\delta(t)$ хаотическая функция времени.

Однако из естественного света можно сделать плоско поляризованный, или линейно поляризованный, свет с помощью поляризаторов. *Поляризаторы* — это приборы, которые пропускают свет с колебаниями вектора $\vec{E}$ параллельными плоскости поляризатора и задерживают свет с колебаниями вектора, перпендикулярными этой плоскости. Поляризаторы не всегда абсолютно поляризуют свет. Иногда происходит частичная поляризация и при этом образуется *частично поляризованный* свет. При отражениях и прохождении света через границы тоже появляется частично поляризованный свет. Частично поляризованный свет характеризуется *степенью поляризации* P:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \qquad (3.2.1)$$

где I_{max} — максимальная интенсивность какого-либо направления колебаний (например, колебаний вектора $\vec{E}$, проходящими параллельно плоскости поляризатора), I_{min} — интенсивность колебаний $\vec{E}$, перпендикулярных по направлению к колебаниям максимальной интенсивности. Плоско поляризованный свет получаем при $P = 1$. Естественный свет получаем при значении $P = 0$.

Однако отметим, что получаем $P = 0$ также для циркулярно поляризованного света.

3.2.2. Формулы Френеля

Граничные условия позволяют установить не только направления отраженной и преломленной волн, но также их амплитуды и состояния поляризации. Снова рассмотрим падение электромагнитной волны на границу двух сред, ее отражение и преломление. Ось z, как и в предыдущем параграфе, направим перпендикулярно границе, ось x — в плоскости падения волны вдоль границы, а ось y — также вдоль границы, но перпендикулярно плоскости падения. На рисунке 3.2 направление оси y показано точкой в начале координат («смотрит» из страницы).

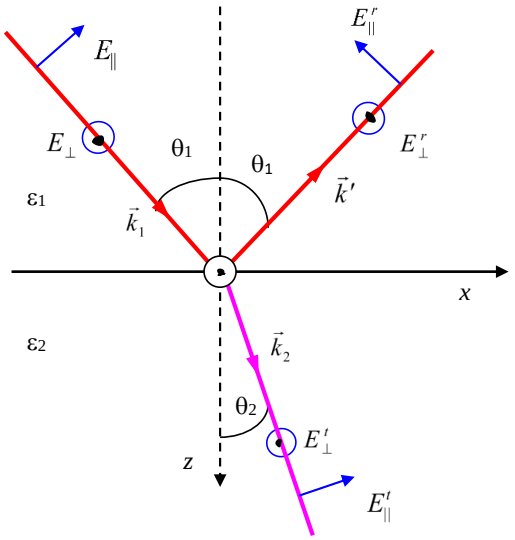


Рис. 3.2

Разложим каждую из трех волн на две составляющие: волну, поляризованную в плоскости падения (индекс $\parallel$ обозначает параллельную составляющую $\vec{E}_{\parallel}$), и волну, поляризованную в перпендикулярном плоскости падения направлении (индекс $\perp$ обозначает перпендикулярную составляющую $\vec{E}_{\perp}$):

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel} = E_{\perp}\vec{e}_y + \vec{E}_{\parallel}. \qquad (3.2.2)$$

Аналогичное разложение запишем для отраженной и преломленной волн. Фазовые множители можно опустить и рассматривать только амплитудные значения, так как в любой точке границы раздела фазы одинаковы для всех трех волн.

Магнитные свойства пока не будем учитывать, т. е. можно рассматривать векторы индукции магнитного поля и напряженности одинаковыми $\vec{B} = \vec{H}$. Тогда запишем связь между E и H (см. соотношение (1.1.23) и (1.1.24) в §1.1):

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E}\right] = \sqrt{\varepsilon}\left[\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E}\right] = n\left[\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E}\right].$$

Здесь для немагнитных сред считаем, что магнитная проницаемость $\mu \approx 1$ и показатель преломления $n \approx \sqrt{\varepsilon}$. Тогда в дальнейшем будем вычислять ком-

поненты вектора напряженности магнитного поля из этого векторного произведения.

Итак, на границе раздела сред ($z = 0$) составляющие электрического и магнитного полей в падающей волне равны (см. рис. 3.2):

$$E_x = E_{\|}cos\theta_1, \quad E_y = E_{\perp}, \quad E_z = -E_{\|}sin\theta_1,$$

$$H_x = -n_1E_{\perp}cos\theta_1, \quad H_y = n_1E_{\|}, \quad H_z = n_1E_{\perp}sin\theta_1. \qquad (3.2.3)$$

То же напишем для отраженной волны:

$$E_{rx} = E_{r\|}cos\theta_1, \quad E_{ry} = E_{r\perp}, \quad E_{rz} = -E_{r\|}sin\theta_1,$$

$$H_{rx} = -n_1E_{r\perp}cos\theta_1, \quad H_{ry} = n_1E_{r\|}, \quad H_{rz} = n_1E_{r\perp}sin\theta_1. \qquad (3.2.4)$$

Для прошедшей волны имеем аналогично:

$$E_{tx} = E_{t\|}cos\theta_2, \quad E_{ty} = E_{t\perp}, \quad E_{tz} = E_{t\|}sin\theta_2,$$

$$H_{tx} = -n_2E_{t\perp}cos\theta_2, \quad H_{ty} = n_2E_{t\|}, \quad H_{tz} = n_2E_{t\perp}sin\theta_2. \qquad (3.2.5)$$

Исходя из (3.1.1), имеем 4 независимые граничные условия:

$$\begin{matrix} E_x + E_{rx} = E_{tx} & E_y + E_{ry} = E_{ty} \\ H_x + H_{rx} = H_{tx} & H_y + H_{ry} = H_{ty} \end{matrix} \qquad (3.2.6)$$

Подставим в эти уравнения выражения для компонент E и H, тогда имеем:

$$(E_{\|} - E_{r\|})cos\theta_1 = E_{t\|}cos\theta_2; \qquad (3.2.7)$$

$$E_{\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp}; \qquad (3.2.8)$$

$$n_1(E_{\perp} - E_{r\perp})cos\theta_1 = n_2E_{t\perp}cos\theta_2; \qquad (3.2.9)$$

$$n_1(E_{\|} + E_{r\|}) = n_2E_{t\|}. \qquad (3.2.10)$$

Эта система уравнений позволяет определить параллельные и перпендикулярные компоненты отраженной и пройденной волн через компоненты падающей волны.

Вначале используем уравнения (3.2.7) и (3.2.10) и исключаем компоненту пройденной волны:

$$\frac{(E_{\|} - E_{r\|})cos\theta_1}{n_1(E_{\|} + E_{r\|})} = \frac{cos\theta_2}{n_2}.$$

Отсюда выражаем параллельную компоненту отраженной волны:

$$E_{r\|} = E_{\|}\frac{n_2cos\theta_1 - n_1cos\theta_2}{n_1cos\theta_2 + n_2cos\theta_1} = E_{\|}\frac{ncos\theta_1 - cos\theta_2}{ncos\theta_1 + cos\theta_2}, \qquad (3.2.11)$$

где ввели относительный показатель преломления $n = n_{12} = n_2/n_1$. Воспользуемся законом преломления Снеллиуса (3.1.13) и тогда формулу (3.2.11) можно переписать, избавившись от показателей преломления:

$$E_{r\|} = E_{\|}\frac{sin\theta_1 cos\theta_1 - sin\theta_2 cos\theta_2}{sin\theta_2 cos\theta_2 + sin\theta_1 cos\theta_1} = E_{\|}\frac{sin2\theta_1 - sin2\theta_2}{sin2\theta_1 + sin2\theta_2} =$$
$$= E_{\|}\frac{2cos(\theta_1+\theta_2)sin(\theta_1-\theta_2)}{2sin(\theta_1+\theta_2)cos(\theta_1-\theta_2)} = E_{\|}\frac{tg(\theta_1-\theta_2)}{tg(\theta_1+\theta_2)}. \quad (3.2.12)$$

Найдем параллельную компоненту для пройденной волны. Подставим (3.2.11) в (3.2.10):

$$E_{t\|} = \frac{n_1}{n_2}\left(E_{\|} + E_{\|}\frac{n_2 cos\theta_1 - n_1 cos\theta_2}{n_2 cos\theta_1 + n_1 cos\theta_2}\right) = E_{\|}\frac{2n_1 cos\theta_2}{n_2 cos\theta_1 + n_1 cos\theta_2}. \quad (3.2.13)$$

Вновь воспользуемся законом преломления Снеллиуса (3.1.13):

$$E_{t\|} = E_{\|}\frac{2cos\theta_1}{cos\theta_2 + cos\theta_1\frac{n_2}{n_1}} = E_{\|}\frac{2cos\theta_1 sin\theta_2}{cos\theta_1 sin\theta_1 + cos\theta_2 sin\theta_2} = E_{\|}\frac{2cos\theta_1 sin\theta_2}{sin(\theta_1+\theta_2)cos(\theta_1-\theta_2)}.$$

Аналогично находятся перпендикулярные компоненты $E_{t\perp}$ и $E_{r\perp}$ из соотношений (3.2.8) и (3.2.9). С показателями преломления эти формулы выглядят следующим образом:

$$E_{r\perp} = E_{\perp}\frac{n_1 cos\theta_1 - n_2 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2}; \quad (3.2.14)$$

$$E_{t\perp} = E_{\perp}\frac{2n_1 cos\theta_1}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2}. \quad (3.2.15)$$

Все эти соотношения (3.2.11)–(3.2.15) называются формулами Френеля (1821) для компонент отраженной и преломленной волн. Их все можно записать по подобию (3.2.12), исключив показатели преломления:

$$E_{r\perp} = E_{\|}\frac{tg(\theta_1-\theta_2)}{tg(\theta_1+\theta_2)}; \quad E_{r\perp} = -E_{\perp}\frac{sin(\theta_1-\theta_2)}{sin(\theta_1+\theta_2)}; \quad (3.2.16)$$

$$E_{t\|} = E_{\|}\frac{2sin\theta_2 cos\theta_1}{sin(\theta_1+\theta_2)cos(\theta_1-\theta_2)}; \quad E_{t\perp} = E_{\perp}\frac{2sin\theta_2 cos\theta_1}{sin(\theta_1+\theta_2)}. \quad (3.2.17)$$

Отношения амплитуд $r_{\|} = \frac{E_{r\|}}{E_{\|}}$, $r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{\perp}}$ и другие называются *коэффициентами Френеля*.

В определение степени поляризации (3.2.1) входят интенсивности света. Приборы также реагируют на интенсивность. Поэтому, определяя энергетические коэффициенты отражения *R* и прохождения *T*, нужно рассматривать отношение плотности потоков энергии отраженной и пройденной волн к плотности потока падающей волны (т. е. записывать через вектор Пойнтинга).

3.2.3. Поляризация при отражении

Для определения коэффициента отражения отношение плотностей потока можно заменить отношением интенсивностей, поскольку падающая и отраженная волны распространяются в одной среде и скорости распространения одинаковы. Таким образом, *энергетический коэффициент отражения* равен

$$R = \frac{I'}{I}. \qquad (3.2.18)$$

Рассматривая формулы Френеля (3.2.16)–(3.2.17), для отраженной волны заметим следующее:

1) перпендикулярная компонента $E_{r\perp}$ при любых углах падения θ_1 не обращается в 0;

2) параллельная компонента обращается в нуль $E_{r\|} = 0$ при угле падения, когда

$$tg(\theta_1 + \theta_2) = tg\frac{\pi}{2} = \infty.$$

То есть компонента параллельная плоскости падения электромагнитной волны не отражается при угле падения равным $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$. Это *угол Брюстера* θ_B, который можно записать через показатели преломления, исходя из закона преломления:

$$cos\theta_1 = sin\theta_2 = \frac{1}{n} sin\theta_1$$

или иначе:

$$tg\theta_1 = tg\theta_B = n = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (3.2.19)$$

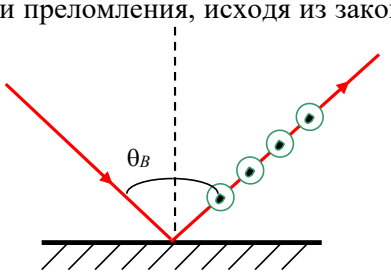


Рис. 3.3

Итак, если естественный свет (неполяризованный или линейно поляризованный, но не в плоскости падения) падает под углом Брюстера $\theta_1 = \theta_B$, то $E_{r\|} = 0$ и отраженный свет оказывается линейно поляризованным (см. рис. 3.3). Причем свет поляризован в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения.

Таким образом, отражение света под углом Брюстера — простейший способ получения поляризованного света. Основным недостатком этого метода является малая интенсивность отраженного света под углом Брюстера. Для увеличения интенсивности отраженного света на практике используется стопа Столетова (см. ниже).

Построим зависимость энергетических коэффициентов отражения $R_{\|} = (E_{r\|}/E_{\|})^2$ и $R_{\perp} = (E_{r\perp}/E_{\perp})^2$ от угла падения θ_1:

$$R_{\parallel} = \left(\frac{n\cos\theta_1 - n\cos\theta_2}{n\cos\theta_1 + n\cos\theta_2} \right)^2; \qquad (3.2.20)$$

$$R_{\perp} = \left(\frac{\cos\theta_1 - n\cos\theta_2}{\cos\theta_1 + n\cos\theta_2} \right)^2. \qquad (3.2.21)$$

Качественная зависимость энергетических коэффициентов отражения от угла падения приведена на рисунке 3.4. При касательном падении $\theta_1 = \pi/2$ коэффициент отражения равен 1. Однако в случае отражения от оптически менее плотной среды $n < 1$ коэффициент R равен 1 уже при предельном угле $\theta_1 = \theta_0$, когда возникает явление полного внутреннего отражения.

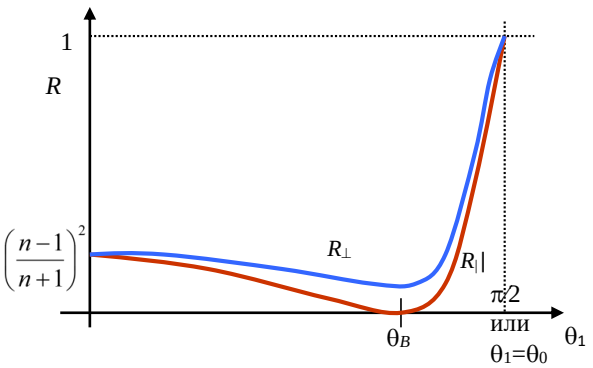


Рис. 3.4

При уменьшении угла падения θ_1 коэффициент отражения быстро падает и принимает минимальное значение при угле Брюстера. Затем медленно растет с уменьшением угла падения (рис. 3.4).

Рассмотрим (3.2.20) и (3.2.21) при нормальном падении света $\theta_1 = 0$. Учитывая, что при малых углах

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \approx \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} = n,$$

получаем одинаковые значения энергетических коэффициентов отражения:

$$R_{\parallel} \approx \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2; \qquad (3.2.22)$$

$$R_{\perp} \approx \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2. \qquad (3.2.23)$$

Тогда полный коэффициент отражения при нормальном падении равен тому же:

$$R = \frac{R_{\perp} I_{\perp} + R_{\parallel} I_{\parallel}}{I_{\perp} + I_{\parallel}} = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2. \qquad (3.2.24)$$

Например, для стекла (n = 1,5) при нормальном падении света коэффициент отражения R = 0,04; для воды (n = 1,33) получаем — R = 0,02.

Примечание 1. *Дэвид Брюстер, шотландский физик, 1781–1868.*
Александр Григорьевич Столетов, русский физик, 1839–1896.

3.2.4. Поляризация при преломлении

Энергетический коэффициент пропускания (прозрачности) определяется через отношение потоков энергии прошедшей волны и падающей волны. Так поток энергии через площадку $\Delta\vec{s}$ определяется через поток вектора Пойнтинга:

$$\vec{S}\cdot\Delta\vec{s} = S\cdot\Delta s\cdot cos\theta,$$

где θ — угол падения или угол преломления для прошедшей волны. Следовательно, поток энергии через единицу площадки пропорционален:

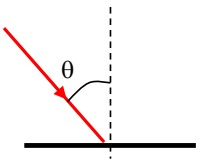


Рис. 3.5

$$\vec{S}\cdot\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta s} = Scos\theta \sim |[\vec{E},\vec{H}]|\,cos\theta \approx nE^2cos\theta.$$

Тогда энергетический коэффициент пропускания для параллельной компоненты определяется отношением следующих потоков:

$$T_{\|} = \frac{n_2cos\theta_2E_{t\|}^2}{n_1cos\theta_1E_{t\|}^2} = n\frac{cos\theta_2}{cos\theta_1}\left(\frac{2n_1cos\theta_1}{n_2cos\theta_1+n_1cos\theta_2}\right) = \frac{4ncos\theta_1cos\theta_2}{(ncos\theta_1+cos\theta_2)^2}. \quad (3.2.25)$$

Аналогично имеем для перпендикулярной компоненты:

$$T_{\perp} = \frac{n_2cos\theta_2E_{t\perp}^2}{n_1cos\theta_1E_{\perp}^2} = n\frac{cos\theta_2}{cos\theta_1}\left(\frac{2cos\theta_1}{cos\theta_1+ncos\theta_2}\right) = \frac{4ncos\theta_1cos\theta_2}{(cos\theta_1+ncos\theta_2)^2}. \quad (3.2.26)$$

Легко увидеть, что

$$R_{\perp}+T_{\perp}=1 \qquad \text{и} \qquad R_{\|}+T_{\|}=1, \quad (3.2.27)$$

как и должно быть согласно закону сохранения энергии.

Для нормального падения $\theta_1 = 0$ и тогда получаем равенство энергетических коэффициентов прохождения:

$$T_{\perp} = T_{\|} = T = \frac{4n}{(n+1)^2}. \quad (3.2.28)$$

Если взять отношение коэффициентов для параллельной и перпендикулярной составляющих для произвольного угла падения, то получаем

$$\frac{T_{\|}}{T_{\perp}} = \left(\frac{cos\theta_1+ncos\theta_2}{n_1cos\theta_1+cos\theta_2}\right)^2 = \left(\frac{cos\theta_1sin\theta_2+sin\theta_1cos\theta_2}{cos\theta_1sin\theta_1+sin\theta_2cos\theta_2}\right)^2 = \frac{4sin^2(\theta_1+\theta_2)}{(sin2\theta_1+sin2\theta_2)^2} = \quad (3.2.29)$$

$$= \frac{sin^2(\theta_1+\theta_2)}{sin^2(\theta_1+\theta_2)cos^2(\theta_1-\theta_2)} = \frac{1}{cos^2(\theta_1-\theta_1)}.$$

Во всех случаях (кроме нормального падения, когда $\theta_1 = \theta_2 = 0$) косинус меньше единицы, следовательно, имеем

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} > 1. \qquad (3.2.30)$$

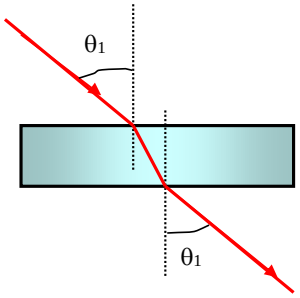


Рис. 3.6

При прохождении через одну границу раздела непроводящих сред интенсивность параллельной компоненты возрастет в $1/cos^2(\theta_1 - \theta_2)$ раз. Если свет пропускаем через пластинку (рис. 3.6), то волна пересекает 2 границы раздела и отношение квадратов коэффициентов будет равно:

$$\left(\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}\right)^2 = \frac{1}{cos^4(\theta_1 - \theta_2)}. \qquad (3.2.31)$$

Если построить график зависимости коэффициентов отражения и прохождения (на рис. 3.7 показано поведение энергетических коэффициентов для параллельной компоненты) от угла падения, то видно, что энергетически выгоднее применять в качестве поляризаторов не отражательное устройство, в котором интенсивность отраженного света мала, а устройство на пропускание. Видно также, что максимум пройденной интенсивности — при угле Брюстера. Тогда рассмотрим отношение интенсивностей пройденного света при $\theta_1 = \theta_B$, когда параллельная компонента пройденного света не теряется. В этом случае получаем:

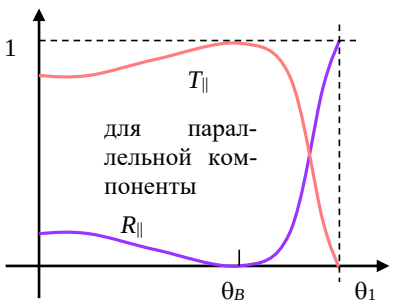


Рис. 3.7

$$\theta_B + \theta_2 = \pi/2 \quad \text{и} \quad \theta_2 = \pi/2 - \theta_B;$$

$$cos^4\left(\theta_B - \frac{\pi}{2} + \theta_B\right) = sin^4(2\theta_B).$$

Выражая угол Брюстера из (3.2.19) $\theta_B = arctg\, n$ и пользуясь тригонометрическими соотношениями

$$sin 2\theta = 2 sin\,\theta \cdot cos\,\theta, \qquad sin\,\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \quad \text{и} \quad cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}),$$

запишем синус двойного угла Брюстера через показатели преломления

$$sin(2\theta_B) = sin(2 arctg\, n) = 2\, sin(arctg\, n) \cdot cos(arctg\, n) = 2\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{2n}{1+n^2}.$$

Сосчитаем отношение квадратов коэффициентов прохождения (3.2.31):

$$\left(\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}\right)^2 = \left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^{-4} = \left(\frac{n^2+1}{2n}\right)^4. \qquad (3.2.32)$$

Если излучение проходит через N пластин под углом Брюстера, то квадрат отношения компонент энергетических коэффициентов прохождения, т. е. интенсивностей двух компонент, равен:

$$\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = \left(\frac{n^2+1}{2n}\right)^{4N}. \qquad (3.2.33)$$

Насколько выгодно рассматривать пропускание естественного света через пластинки для получения поляризованного излучения, зависит от поставленных задач и точности измерений. При пропускании через пластинки мы выигрываем в интенсивности света, но проигрываем в степени поляризации пройденного пучка.

В качестве примера рассмотрим стеклянные пластинки, находящиеся в воздухе. Для границы стекло — воздух относительный показатель преломления: $\frac{n_{ст}}{n_{возд}} = n = 1{,}5$, а угол Брюстера: $\theta_B = arctg 1{,}5 = 56{,}3°$. Если имеем одну пластинку под углом Брюстера, то отношение интенсивностей $\frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} = \left(\frac{2\cdot 1{,}5}{1+2{,}25}\right)^4 = 0{,}726$. Если возьмем две пластинки под углом Брюстера, то $I_{\perp}/I_{\parallel} = (0{,}726)^2 = 0{,}527$. В то же время 10 пластин дают: $I_{\perp}/I_{\parallel} = 0{,}041$.

Очевидно, что выгоднее для получения поляризованного света брать пластинки с большим показателем преломления n. Для германия в воздухе относительный показатель преломления $n = 4$, поэтому даже после одной пластинки получаем отношение интенсивностей $I_{\perp}/I_{\parallel} = 0.049$.

3.2.5. Фазовые соотношения

Углы падения θ_1 и преломления θ_2 вещественны (здесь не рассматриваем случай полного внутреннего отражения) и отсюда следует, что отражение и преломление не сопровождается изменением фаз, кроме как на π. Таким образом, фазы у прошедшей волны и отраженной волны либо совпадают с соответствующей компонентой у падающей волны, либо отличаются на π.

Для прошедшей волны $E_{t\parallel}, E_{t\perp}$ видно, что знаки комплексных амплитуд падающей и преломленной волны одинаковы при всех θ_1 и θ_2. То есть *прошедшая волна синфазна падающей волне*, и нет скачка фазы на границе.

Фазовые соотношения между падающей волной и отраженной волной зависят от показателей преломления n и углов θ_1 и θ_2. Вначале разберемся в том,

когда скачка фазы отраженной волны не происходит. Отдельно для каждой из компонент волны проводим следующие соображения.

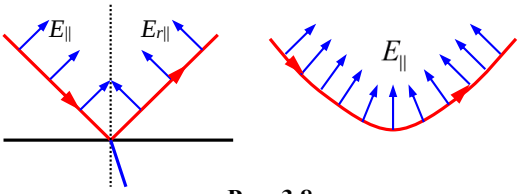


Рис. 3.8

1. Скачка фазы нет у параллельной составляющей отраженной волны, когда проекции $E_{\|}$ и $E_{r\|}$ на ось x имеют разные знаки. Качественно это можно понять из рисунка 3.8, если проследить за изменением колебаний вектора электрического поля при отражении.

2. Скачка фазы нет у перпендикулярной составляющей отраженной волны, когда $E_{\perp}$ и $E_{r\perp}$ имеют одинаковые знаки (рис. 3.9).

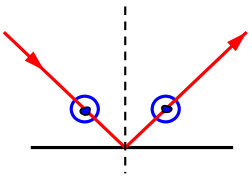


Рис. 3.9

Рассмотрим отдельно 2 случая: отражение от оптически более плотной среды ($n_2 > n_1$) и оптически менее плотной среды ($n_2 < n_1$).

1. Отражение от оптически более плотной среды $n_2 > n_1$. При этом получаем, что $\theta_1 > \theta_2$.

Сначала рассмотрим параллельную компоненту исходя из соотношения (3.2.12) или (3.2.16):

$$\frac{E_{r\|}}{E_{\|}} = \frac{tg(\theta_1 - \theta_2)}{tg(\theta_1 + \theta_2)}. \qquad (3.2.34)$$

а) Пусть углы падения θ_1 меньше угла Брюстера $\theta_1 < \theta_B$, т. е. такие, что $(\theta_1 + \theta_2) < \pi/2$. Тогда для тангенсов и отношения (3.2.34) имеем

$$\left.\begin{array}{l} tg(\theta_1 - \theta_2) > 0 \\ tg(\theta_1 + \theta_2) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_{r\|}}{E_{\|}} > 0. \qquad (3.2.35)$$

То есть параллельные компоненты поля в отраженной и падающей волне имеют одинаковые знаки. Следовательно, *получаем скачок фазы на* π.

б) Пусть углы падения θ_1 больше угла Брюстера $\theta_1 > \theta_B$, т. е. такие, что $(\theta_1 + \theta_2) > \pi/2$. Тогда для тангенсов и отношения (3.2.34) имеем

$$\left.\begin{array}{l} tg(\theta_1 - \theta_2) > 0 \\ tg(\theta_1 + \theta_2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_{r\|}}{E_{\|}} < 0. \qquad (3.2.36)$$

То есть параллельные компоненты поля в отраженной и падающей волне имеют разные знаки. Следовательно, скачка фазы не происходит. Зависимость скачка фазы от угла падения для параллельной составляющей показана на рисунке 3.10*а*.

Теперь рассмотрим перпендикулярную компоненту падающей и отраженной волн исходя из соотношения (3.2.16) — их отношение всегда меньше нуля при всех θ_1 и θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$):

$$\frac{E_{r\perp}}{E_\perp} = -\frac{sin(\theta_1 - \theta_2)}{sin(\theta_1 + \theta_2)} < 0. \qquad (3.2.37)$$

Следовательно, для перпендикулярных компонент всегда имеется скачок фазы на π (рис. 3.10*б*).

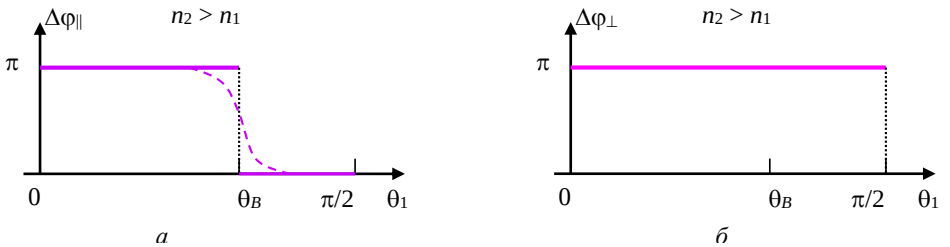


Рис. 3.10

Итак, при отражении от оптически более плотной среды при всех углах падения $\theta_1 < \theta_B$ происходит потеря фазы на угол π, т. е. происходит потеря полуволны. При углах падения $\theta_1 > \theta_B$ волна с параллельной поляризацией отражается без потери полуволны, а волна с перпендикулярной поляризацией отражается по-прежнему с потерей полуволны.

2. Отражение от оптически менее плотной среды $n_2 < n_1$. При этом получаем, что $\theta_1 < \theta_2$. Рассматриваем аналогично исходя из соотношений (3.2.16). Сначала для параллельной составляющей электрического вектора.

а) $\theta_1 < \theta_B$, $\frac{E_{r\|}}{E_\|} < 0$ параллельные составляющие волн синфазны.

б) $\theta_1 > \theta_B$, $\frac{E_{r\|}}{E_\|} > 0$ параллельные составляющие волн противофазны.

Зависимость изменения фазы для параллельной составляющей изображена на рисунке 3.11*а*.

Для перпендикулярной составляющей поля $\frac{E_{r\perp}}{E_\perp} > 0$ при любых углах падения, т. е. перпендикулярные составляющие волн синфазны, что показано на рисунке 3.11*б*.

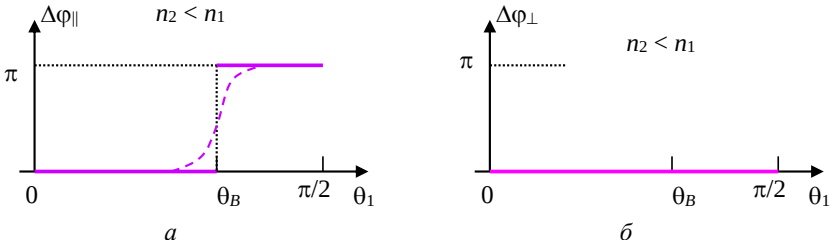


Рис. 3.11

Итак, при отражении от оптически менее плотной среды при всех углах падения $\theta_1 < \theta_B$ отражение волны происходит без потери полуволны. При углах падения $\theta_1 > \theta_B$ волна с перпендикулярной поляризацией отражается попрежнему без потери полуволны, а волна с параллельной поляризацией отражается с потерей полуволны.

3.3. Полное внутреннее отражение

3.3.1. Прошедшая волна

Рассмотрим отражение электромагнитных волн от границы двух сред в случае, когда показатель преломления второй среды меньше показателя преломления первой $n_2 < n_1$. В этом случае угол преломления θ_2 оказывается больше угла падения θ_1 (рис. 3.12). Полное внутреннее отражение наступает тогда, когда $\theta_2 = \pi/2$ (см. соотношения (3.1.13)–(3.1.14)). При этом имеем для угла падения:

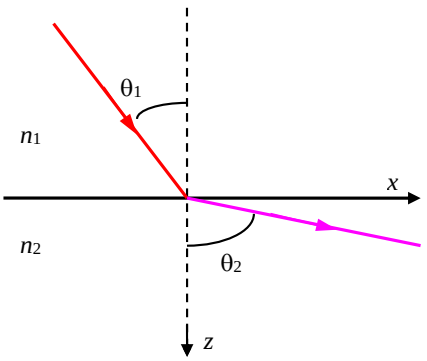


Рис. 3.12

$$sin\theta_1 = sin\theta_0 = \frac{n_2}{n_1} = n, \qquad (3.3.1)$$

где θ_0 — *предельный угол* падения. Вопрос состоит в том, что происходит с электрическим вектором электромагнитной волны при явлении полного внутреннего отражения: как он меняется на границе сред и проникает ли он во вторую среду.

Определим электромагнитное поле во второй среде. Обычно прошедшая волна записывается в виде

$$E_t = E_{0t}\, exp\left[-i\left(\omega t - \vec{k}_t \vec{r}_t\right)\right], \qquad (3.3.2)$$

где, как обычно, имеем

$$\left|\vec{k}_t\right| = \frac{\omega}{v_t}, \qquad \vec{r}_t = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z, \qquad y = 0;$$

$$\vec{k}_t\vec{r}_t = x\left(\vec{e}_x, \vec{k}_t\right) + z\left(\vec{e}_z, \vec{k}_t\right) = xkSin\theta_2 + zkCos\theta_2. \tag{3.3.3}$$

Итак, пройденная волна записывается:

$$E_t = E_{0t}\, exp\left[-i\left(\omega t - \frac{\omega}{v_2}\left(x\, sin\,\theta_2 + z\, cos\,\theta_2\right)\right)\right]. \tag{3.3.4}$$

Закон преломления справедлив в любом случае, поскольку он получается из фундаментального и независимого граничного условия (см § 3.1). В соответствии с ним имеем

$$sin\,\theta_2 = \frac{sin\,\theta_1}{n}, \quad cos\,\theta_2 = \sqrt{1 - sin^2\,\theta_2} = \sqrt{1 - \frac{sin^2\,\theta_1}{n^2}}. \tag{3.3.5}$$

При наступлении полного внутреннего отражения ($\theta_1 \geq \theta_0$) получаем

$$sin\,\theta_2 = \frac{sin\,\theta_1}{n} \geq 1, \quad cos\,\theta_2 = \pm i\sqrt{\frac{sin^2\,\theta_1}{n^2} - 1}. \tag{3.3.6}$$

Подставим (3.3.6) в прошедшую волну (3.3.4):

$$E_t = E_{0t}\, exp\left[-i\left(\omega t - \frac{\omega x\, sin\,\theta_1}{v_2 n}\right)\right] exp\left(-\frac{\omega z}{v_2}\sqrt{\frac{sin^2\,\theta_1}{n^2} - 1}\right). \tag{3.3.7}$$

Из физических соображений знак $cos\theta_2$ в выражении (3.3.6) выбран положительный, т. е. такой, чтобы волна затухала с ростом координаты z. Таким образом, получаем, что электрический вектор пройденной волны есть периодическая функция координаты x и времени t, и, следовательно, по оси x имеем нормальную бегущую волну. По оси z (>0), т. е. при погружении во вторую среду, получаем затухающую волну.

$$E_t = E_{0t} e^{-\frac{\omega z}{v_2}\sqrt{\frac{sin^2\theta_1}{n^2} - 1}}\, exp\left[-i\left(\omega t - \frac{\omega x\, sin\,\theta_1}{v_2 n}\right)\right]. \tag{3.3.8}$$

Естественный вопрос: какова глубина проникновения электромагнитной волны вглубь среды с $n_2 < n_1$? Рассмотрим отдельно затухающую экспоненту в (3.3.8):

$$exp\left(-\frac{z}{z_0}\right), \qquad \text{где} \quad z_0 = \frac{v_2}{\omega\sqrt{\frac{sin^2\theta_1}{n^2} - 1}},$$

и сделаем оценку глубины проникновения z_0, исходя, как обычно, из равенства показателя экспоненты единице $z = z_0$. Итак, амплитуда прошедшей волны падает в e раз (рис. 3.13) на глубине проникновения:

$$z_0 = \frac{v_2 n}{\omega\sqrt{sin^2\theta_1 - n^2}} = \frac{n\lambda_2}{2\pi\sqrt{sin^2\theta_1 - n^2}} = \frac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{sin^2\theta_1 - n^2}}, \qquad (3.3.9)$$

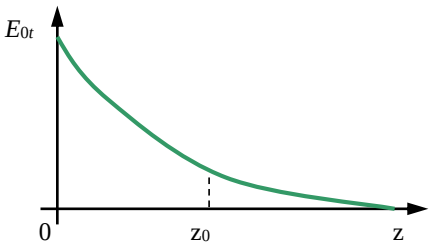


Рис. 3.13

где λ_2 — длина волны в среде 2, а $\lambda_1 = n\lambda_2$ — длина волны в первой среде. То есть глубина проникновения прошедшей волны во вторую среду при полном внутреннем отражении пропорциональна длине волны λ.

Обычно можно считать, что знаменатель в (3.3.9) $2\pi\sqrt{sin^2\theta_1 - n^2} \sim 1$, тогда глубина проникновения z_0 по порядку величины равна длине волны λ.

3.3.2. Эксперименты с пройденной волной

Для экспериментального исследования прошедшей волны при явлении полного внутреннего отражения необходимо во второй среде «подхватить» ее интенсивность на расстояниях порядка длины волны падающего света, т. е. там, где амплитуда волны заметно отлична от нуля. В большинстве экспериментов это реализуется созданием пространственной «полоски» из второй среды, переменной толщины, через которую волна «туннелирует» и проникает в последующую среду, где она распространяется и фиксируется обычным образом. Рассмотрим несколько таких экспериментов.

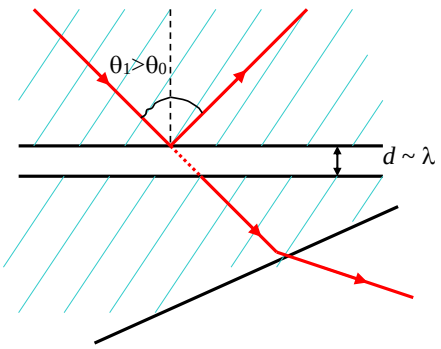


Рис. 3.14

1. Волна падает под углом больше предельного угла $\theta_1 \geq \theta_0$ на границу первой среды с воздушным зазором, за которым находится пластинка со свойствами первой среды. Схема опыта изображена на рисунке 3.14. Когда воздушный зазор невелик $d \sim \lambda$, тогда во второй пластинке появляется световая волна, несмотря на условия полного внутреннего отражения на первой границе. В оптических опытах, проводимых Г. Квинке, такая проходящая волна регистрировалась при различных величинах зазора d. Чем меньше зазор d, тем больше интенсивность пройденной волны во второй пластинке.

На основе изменения интенсивности пройденной волны от величины зазора в фирме К. Цейсса был запатентован световой телефон. Зазор между пластинками менялся под действием звуковой волны, и яркость пройденного света через мембрану модулировалась изменением толщины зазора.

2. К плоской призме прижималась призма сферической формы (рис. 3.15). Свет распространялся из плоской призмы к границе с воздухом вблизи точки соприкосновения призм под углом падения большим угла полного внутреннего отражения. Свет проходил во вторую призму в окрестности точки непосредственного соприкосновения практически без изменения интенсивности. Кроме того, свет проникал во вторую сферическую призму и в других точках, где не было прямого соприкосновения поверхностей линз. Интенсивность пройденного света падала по мере удаления от точки соприкосновения.

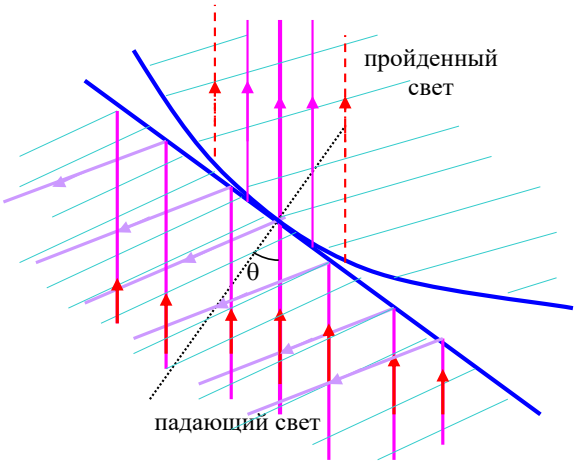


Рис. 3.15

Если освещать линзу белым светом, то края пучка пройденного света приобретают красноватый оттенок. Это связано с тем, что длина волны красного света наибольшая в области видимого диапазона и эта волна проникает через зазор большего размера.

3. В раствор флюоресцирующего вещества помещена призма (рис. 3.16). Свет при попадании в раствор вызывал его свечение. Свет падающий извне на призму из воздуха (например, при нормальном падении на грань призмы) испытывал полное внутреннее отражение на границе «призма — жидкость». Свечение тонкого слоя раствора на границе раздела «призма — жидкость» показывало, что свет проникает за границу раздела на некоторую глубину, а затем испытывает полное отражение (рис. 3.16).

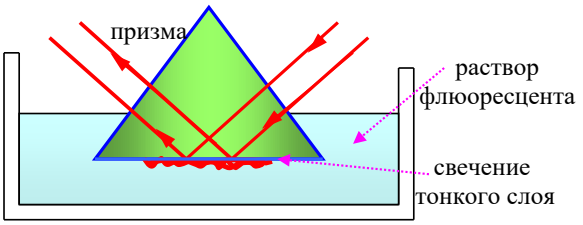


Рис. 3.16

4. Типичный и практически важный пример использования явления полного внутреннего отражения — *световоды*. Именно за счет этого явления свет

распространяется практически без потерь внутри световода, полностью отражаясь от ограничивающих его стенок.

3.3.3. Отраженная волна

При исследовании отраженной волны снова воспользуемся формулами Френеля.

Из формул (3.2.12)–(3.2.16) получаем следующее выражение для амплитудных коэффициентов отражения для параллельной компоненты:

$$\frac{E_{r\|}}{E_{\|}} = r_{\|} = \frac{tg(\theta_1 - \theta_2)}{tg(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{sin\,2\theta_1 - sin\,2\theta_2}{sin\,2\theta_1 + sin\,2\theta_2} = \frac{sin\,\theta_1\,cos\,\theta_1 - sin\,\theta_2\,cos\,\theta_2}{sin\,\theta_1\,cos\,\theta_1 + sin\,\theta_2\,cos\,\theta_2} = \frac{n\,cos\,\theta_1 - cos\,\theta_2}{n\,cos\,\theta_1 + cos\,\theta_2}.$$

Здесь $n = n_2/n_1$, $sin\,\theta_1 = n\,sin\,\theta_2$. Подставляя сюда выражение для косинуса при явлении полного внутреннего отражения с соответствующим знаком:

$$cos\,\theta_2 = -i\sqrt{\frac{sin^2\,\theta_1}{n^2} - 1}, \qquad (3.3.10)$$

получаем

$$r_{\|} = \frac{n^2\,cos\,\theta_1 + i\sqrt{sin^2\,\theta_1 - n^2}}{n^2\,cos\,\theta_1 - i\sqrt{sin^2\,\theta_1 - n^2}}. \qquad (3.3.11)$$

Для перпендикулярной компоненты отраженной волны получаем аналогично:

$$\frac{E_{r\perp}}{E_{\perp}} = r_{\perp} = -\frac{sin(\theta_1 - \theta_2)}{sin(\theta_1 + \theta_2)} = -\frac{sin\,\theta_1\,cos\,\theta_2 - sin\,\theta_2\,cos\,\theta_1}{sin\,\theta_1\,cos\,\theta_2 + sin\,\theta_2\,cos\,\theta_1} = -\frac{cos\,\theta_1 + i\sqrt{sin^2\,\theta_1 - n^2}}{cos\,\theta_1 - i\sqrt{sin^2\,\theta_1 - n^2}}. \qquad (3.3.12)$$

При углах падения $\theta_1 \geq \theta_0$ для энергетических коэффициентов отражения получаем (возводим в квадрат по модулю (3.3.11) и (3.3.12)):

$$\left|r_{\|}\right|^2 = \left|r_{\perp}\right|^2 = 1. \qquad (3.3.13)$$

Полученные результаты можно суммировать следующим образом. Действительно, при полном внутреннем отражении вся энергия отражается в первую среду — в среду с большим показателем преломления n. Следовательно, энергия не уходит во вторую среду, если не считать ее проникновения на небольшие расстояния от границы. Падающая волна и соответствующая доля энергии волны проникают через границу раздела во вторую среду лишь на глубину z_0, порядка длины волны λ, распространяется вдоль поверхности раздела и затем возвращается в первую среду. Действительно, места входа энергии во вторую среду и ее возвращения в первую несколько смещены друг относительно друга. Это смещение выхода отраженного луча по отношению к точке падения наблюдается экспериментально.

В качестве примера проявления полного внутреннего отражения в природе можно привести наблюдение миражей. При определенных условиях све-

товые лучи, идущие от удаленных объектов, в воздушном пространстве испытывают полное внутреннее отражение и создают зрительное впечатление непосредственной близости этих объектов.

В качестве другого примера рассмотрим границу стекло — воздух. Для этой границы имеем относительный показатель преломления n = 1/1,5 = 0,67. Энергетический коэффициент отражения при нормальном падении определяется соотношениями (3.2.22)–(3.2.24):

$$R(\theta_1 = 0) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{0,5}{2,5}\right)^2 = 0,04.$$

Предельный угол равен θ_0 = *arcsin*0,67 = 41,8°, а угол Брюстера равен θ_B = *arctg*0,67 = 33,7°. График зависимости коэффициентов отражения от угла падения представлен на рисунке 3.17.

Рассмотрим фазовые соотношения в отраженной волне. В общем случае полного внутреннего отражения плоско-поляризованная волна превращается в эллиптически поляризованную волну. В самом деле, амплитудные коэффициенты отражения комплексны, и их можно представить в виде

$$z = \frac{a - ib}{a + ib}.$$

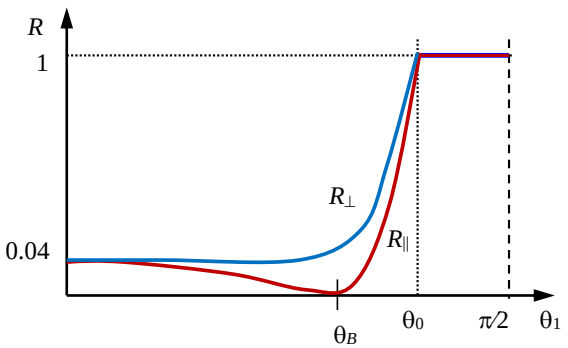


Рис. 3.17

Перепишем это комплексное число через его модуль и фазу:

$$|z| = 1, \qquad tg\frac{\delta}{2} = \frac{b}{a}.$$

Тогда из формул (3.3.11) и (3.3.12) для параллельной и перпендикулярной компонент отраженной волны имеем следующие соотношения:

$$r_{\parallel} = |z| \cdot e^{i\delta_{\parallel}} = e^{i\delta_{\parallel}}, \qquad r_{\perp} = |z| \cdot e^{i\delta_{\perp}} = e^{i\delta_{\perp}},$$
$$tg\frac{\delta_{\parallel}}{2} = \frac{\sqrt{sin^2\theta_1 - n^2}}{n^2 cos\theta_1}, \quad tg\frac{\delta_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{sin^2\theta_1 - n^2}}{cos\theta_1}. \qquad (3.3.14)$$

Из этих формул видно, что фазы отраженных волн различны $\delta_{\parallel} \neq \delta_{\perp}$.

Следовательно, если волна, падающая на границу двух сред, плоско-поляризованная, то при полном внутреннем отражении отраженная волна имеет эллиптическую поляризацию.

Введем разность фаз $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$ между колебаниями параллельной и перпендикулярной составляющими отраженной волны и сосчитаем, воспользовавшись соотношениями (3.3.14) тангенс разности фаз δ/2:

$$tg\frac{\delta}{2} = tg\frac{\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}}{2} = \frac{tg\frac{\delta_{\parallel}}{2} - tg\frac{\delta_{\perp}}{2}}{1 + tg\frac{\delta_{\parallel}}{2}tg\frac{\delta_{\perp}}{2}} = \frac{cos\theta_1}{sin^2\theta_1}\sqrt{sin^2\theta_1 - n^2}\ . \qquad (3.3.15)$$

1. Если $tg\frac{\delta}{2} = 0$ — нет эллиптической поляризации. Однако, как видно из формулы (3.3.15), это может быть при угле падения, равном либо предельному углу $\theta_1 = \theta_0$ (при этом $sin^2\theta_1 = n^2$), либо при угле $\theta_1 = \pi/2$ (скользящий луч).

2. Во всех остальных случаях имеем эллиптическую поляризацию в отраженном луче.

Максимальное значение разности фаз δ между взаимно перпендикулярными компонентами можно получить из равенства нулю производной $\frac{d}{d\theta_1}\left(tg\frac{\delta}{2}\right) = 0$. Откуда максимальное значение δ получаем при углах падения:

$$sin^2\theta_{1max} = \frac{2n^2}{1+n^2} \qquad \text{или} \qquad cos^2\theta_{1max} = \frac{1-n^2}{1+n^2}\ .$$

Значение максимальной разности фаз между колебаниями параллельной и перпендикулярной компонентами отраженной волны равно:

$$\delta_{max} = 2arctg\left(\frac{1-n^2}{2n}\right). \qquad (3.3.16)$$

В итоге при полном внутреннем отражении получаем эллиптически поляризованный свет.

Примечание 1. *Георг Герман Квинке, немецкий физик, 1834–1924.*
Карл Фридрих Цейс, немецкий инженер производитель оптики, 1816–1888.

3.4. Элементы оптики проводящих сред

3.4.1. Телеграфные уравнения

Уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных волн в проводящих средах (металлах), по сравнению с соответствующими уравнениями в диэлектриках включают теперь проводимость σ:

$$rot\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{c\partial t}, \qquad div\vec{B}=0, \qquad \begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\\ \vec{B}=\mu\vec{H},\\ \vec{j}=\sigma\vec{E}\end{cases} \qquad (3.4.1)$$
$$rot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{c\partial t}, \qquad div\vec{D}=4\pi\rho$$

Эти уравнения написаны для случая изотропных металлов. В металлах имеются свободные и связанные электроны. Первые колеблются под воздействием электромагнитной волны и обеспечивают поглощение излучения вследствие возбуждения тока (плотности тока $\vec{j}$), при этом колебания электронов происходят в фазе с колебаниями электрических векторов внешнего поля. Связанные электроны колеблются со сдвигом фазы на $\pi/2$ и не дают вклада в поглощение (при условии, если частота электромагнитных волн не слишком велика).

В курсе электромагнетизма [3] (§ 3.1, гл. 3) было показано, что если в металлах появляется избыточный заряд, или даже электрическое поле, отличное от нуля, то и заряд и поле исчезают за так называемое максвелловское время релаксации. Это время, за которое плотность заряда или амплитуда электрического поля падает в *e* раз и которое может быть записано в виде

$$\tau=\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}. \qquad (3.4.2)$$

В отличие от рассмотренного ранее выражения для времени релаксации (выражение (3.1.17) в [3]) здесь учитывается диэлектрическая постоянная среды ε. Диэлектрическая проницаемость появилась в выражении для времени релаксации из-за связи вектора электрической индукции и вектора напряженности электрического поля $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$.

Напомним, что проводимость σ может быть выражена через заряды *e* носителей *e*, их плотность *n* и их подвижность $\mu_{под}$:

$$\sigma=ne\mu_{под}.$$

В системе СИ удельная проводимость типичных металлов заключается в диапазоне $\sigma\approx10^4$–10^6 См/м (Сименс/метр), а время релаксации записывается как (здесь и далее $\sigma\equiv\sigma_R$):

$$\tau=\varepsilon_0\varepsilon/\sigma_R.$$

Подставляя значение $\varepsilon_0\approx1/(4\pi k)\approx1/(4\pi\cdot9\cdot10^9)\approx10^{-11}$ (Ф/м) (см. формулу (1.2.2) из [3]), получаем оценку времени релаксации:

$$\tau\approx\frac{10^{-11}}{10^4}\sim10^{-15}c.$$

Следовательно, в типичных металлах время существования электромагнитного поля порядка периода волны в оптическом диапазоне. Значит, глубина

проникновения электромагнитной волны в оптическом диапазоне составляет величину

$$cT \sim (10^{-4} - 10^{-5})\ \text{см}.$$

Это так называемый *скин-эффект*. Надо отметить, что глубина скин-слоя существенно зависит от частоты падающего света (из-за зависимости проводимости от частоты) и состояния поверхности.

Уравнение, подобное волновому, для электромагнитного поля в проводящих средах получается из системы уравнений Максвелла (3.4.1) аналогичным путем как в диэлектриках. Положим, что в среде отсутствуют сторонние заряды, т. е. их плотность ρ = 0 и, соответственно, $div\vec{E}=0$. Подействуем оператором *rot* на уравнение, описывающее закон электромагнитной индукции, воспользовавшись опять векторным тождеством для левой части уравнения:

$$rotrot\vec{E} \equiv \left[\nabla\left[\nabla,\vec{E}\right]\right] = \nabla\left(\nabla,\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\,rot\frac{\partial\vec{B}}{c\partial t}. \qquad (3.4.3)$$

Воспользуемся сначала, что $div\,\vec{E}=0$, а затем, учитывая, что ε, μ не зависят от координат для однородной среды, в правой части (3.4.3) меняем порядок дифференцирования по координатам и времени и вместо $rotH$ подставляем выражение из первого уравнения системы (3.4.1). В отличие от диэлектрической среды в проводящих средах сохраняем слагаемое с плотностью тока $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ и окончательно преобразуем правую часть уравнения к виду

$$-\nabla^2\vec{E} = -\frac{\mu\partial}{c\partial t}rot\vec{H} = -\frac{\mu\partial}{c\partial t}\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{c\partial t}\right) = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \qquad (3.4.4)$$

В результате получаем уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в проводящих средах и называемые иногда *телеграфными*:

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E} = \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \dfrac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \nabla^2\vec{H} = \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} + \dfrac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \end{cases}. \qquad (3.4.5)$$

Если проводимость сред равна нулю, то телеграфные уравнения переходят в обычные волновые уравнения для изотропной диэлектрической среды.

3.4.2. Основные особенности решений телеграфных уравнений

Основное отличие полученных уравнений (3.4.5) от волновых уравнений (1.1.1) состоит в дополнительных слагаемых в правой части. Присутствие членов с первыми производными по времени означает *наличие затухания электромагнитной волны*. Ранее мы уже рассматривали уравнение, описывающее затухающие колебания (§ 4.4 в [1]), в которое входила первая производная смещения по времени.

Телеграфные уравнения не совпадают с волновыми уравнениями, поэтому обычные плоские волны не являются их решениями. Однако уравнения (3.4.5) можно привести к волновым уравнениям обычного типа для гармонической волны, вводя комплексную диэлектрическую проницаемость.

Рассмотрим гармоническую волну:

$$\vec{E}=\vec{E}_0\, exp\left[i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)\right]. \qquad (3.4.6)$$

Тогда можно вместо первой производной по времени в уравнении (3.4.5) ввести величину $\partial\vec{E}/\partial t = i\omega\vec{E}$, т. е. записать

$$\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-i\frac{4\pi\sigma\mu}{\omega c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Введем *комплексную диэлектрическую проницаемость*:

$$\varepsilon^*=\varepsilon-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \qquad (3.4.7)$$

При этом телеграфные уравнения принимают вид обычных волновых уравнений, в которые входят комплексные коэффициенты:

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}=\dfrac{\varepsilon^*\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\ \nabla^2\vec{H}=\dfrac{\varepsilon^*\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\end{cases}. \qquad (3.4.8)$$

Рассмотрим комплексную диэлектрическую проницаемость и комплексный показатель преломления:

$$\varepsilon^*=\left(n^*\right)^2=\left(n-i\eta\right)^2\equiv\varepsilon-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}, \qquad (3.4.9)$$

где n — *главный показатель преломления*, а η — *главный показатель поглощения*.

Примечание 1. Иногда в некоторых учебниках вводят другое обозначение для комплексной диэлектрической проницаемости: $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$.

Можно также ввести *комплексное волновое число*:

$$\tilde{k}^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon^*\right)=\frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) \qquad (3.4.10)$$

Вводя комплексный показатель преломления n^* и комплексную диэлектрическую проницаемость ε^*, любые следствия и соотношения оптики прозрачных сред могут быть формально перенесены в оптику металлов и других поглощающих сред путем простой замены ε на комплексную величину ε^*. Найдем связь между n, η и измеряемыми величинами ε и σ:

$$n^2 - 2in\eta - \eta^2 = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega},$$

откуда, приравнивая реальные и мнимые части, получаем

$$\begin{cases} n^2 - \eta^2 = \varepsilon \\ n\eta = \dfrac{2\pi\sigma}{\omega} = \dfrac{\sigma}{\nu} \end{cases}. \qquad (3.4.11)$$

Здесь мы помимо круговой частоты ω ввели обычную частоту ν. Решая эту систему относительно n и η (в промежутке $n^4 - \varepsilon n^2 - (\sigma/\nu)^2 = 0$), получаем уравнения для определения главных показателей преломления и поглощения:

$$\begin{cases} n^2 = \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4\left(\dfrac{\sigma}{\nu}\right)^2}\right) \\ \eta^2 = \dfrac{1}{2}\left(-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4\left(\dfrac{\sigma}{\nu}\right)^2}\right) \end{cases}. \qquad (3.4.12)$$

Здесь σ — высокочастотная проводимость, включающая не только перемещение свободных электронов, но также и связанных (т. е. учитывает явление поляризации). Различие между металлами и неметаллами состоит в том, что в проводниках электромагнитное излучение поглощают свободные электроны.

Примечание 2. Вообще говоря, показатель преломления металлов n зависит от угла падения электромагнитной волны $n_{\theta_1} = sin\theta_1 / sin\theta_2$. Поэтому то, что мы получили выше, строго говоря, относится к нормальному падению света.

3.4.3. Пройденная и отраженная волны

Рассмотрим простейшие решения телеграфных уравнений. Пусть имеем нормальное падение света — падает плоская монохроматическая волна по оси z из вакуума на поверхность металла (рис. 3.18). Пусть колебания вектора $\vec{E}$ происходят вдоль оси x. Общее выражение для плоской волны, распространяющей вдоль оси z:

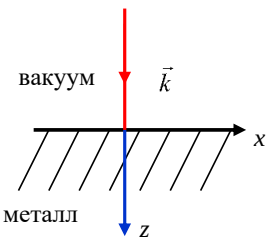


Рис. 3.18

$$E = E_{x0}\, exp[i(\omega t - kz)] = E_{x0} e^{i\omega\left(t - \frac{nz}{c}\right)}. \qquad (3.4.13)$$

Теперь подставим комплексный показатель преломления вместо $n \to n^*$:

$$E = E_{x0}\, exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}(n - i\eta)\right)\right] = \\ = E_{x0}\, exp\left[-\frac{\omega\eta}{c} z\right] exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c} n\right)\right] \tag{3.4.14}$$

Последнее выражение описывает электромагнитную волну с затухающей амплитудой (затухающая волна):

$$E(z) = E_0\, exp\left(-\frac{\omega\eta}{c} z\right). \tag{3.4.15}$$

Интенсивность волны, прошедшей в проводящую среду, как функцию координаты z можно получить, записав сначала долю интенсивности, потерянную на расстоянии dz (см. рис. 3.19):

$$dI = -\alpha I dz.$$

Здесь α — *коэффициент поглощения* (размерность — 1/см). Откуда получаем интенсивность волны как функцию пройденного расстояния:

$$I = I_0 e^{-\alpha z}. \tag{3.4.16}$$

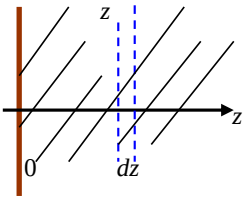


Рис. 3.19

Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то возводя уравнение (3.4.15) в квадрат и сравнивая с (3.4.16), получаем выражение для коэффициента поглощения:

$$\alpha = \frac{2\omega\eta}{c}. \tag{3.4.17}$$

Закон Снеллиуса следует из граничных условий для электрической и магнитной составляющих полей, поэтому он должен выполняться для любых показателей преломления, включая комплексные n:

$$\frac{sin\theta_1}{sin\theta_2} = n^*, \tag{3.4.18}$$

где показатель определяется из (3.4.9): $n^* = n - i\eta$. То есть углы преломления тоже будут комплексными при любом угле падения θ_1 (а не только при $\theta_1 \geq \theta_0$ — полном внутреннем отражении). Наличие комплексного угла θ_2 приводит к тому, что амплитуды отраженного и преломленного света комплексные.

Таким образом, если падающий свет линейно поляризован, то и отраженная, и преломленная волны — *эллиптически* поляризованы.

Исследование преломленной волны в металлах довольно сложно. Поэтому обычно исследуют отраженную волну, и такой способ является основным методом исследования оптических характеристик металла. Как и ранее, можно пользоваться формулами Френеля для амплитуд (3.2.16):

$$r_{\parallel} = \frac{tg(\theta_1 - \theta_2)}{tg(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 e^{i\delta_{\parallel}} \quad \text{и} \quad r_{\perp} = \frac{sin(\theta_1 - \theta_2)}{sin(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_2 e^{i\delta_{\perp}}. \qquad (3.4.19)$$

В общем случае $\delta_{\parallel} \neq \delta_{\perp}$ и получаем эллиптическую поляризацию. Вычисление разности фаз ($\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$) происходит таким же способом, как в случае полного внутреннего отражения.

Для нормального падения $\theta_1 = 0$, и тогда коэффициенты одинаковы и равны:

$$r = \frac{n^* - 1}{n^* + 1} = \frac{n - i\eta - 1}{n - i\eta + 1}. \qquad (3.4.20)$$

Энергетические коэффициенты отражения получаем равными:

$$R = |r|^2 = \frac{(n-1)^2 + \eta^2}{(n+1)^2 + \eta^2}. \qquad (3.4.21)$$

Если проводимость металлов большая $\sigma \to \infty$, то компоненты показателя преломления также велики $n \to \infty$ и $\eta \to \infty$, и тогда из (3.4.21) следует, что коэффициент отражения стремится к единице $R \Rightarrow 1$, т. е. для идеального проводника вся энергия отражается.

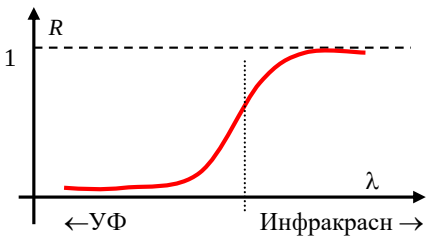


Рис. 3.20

Реально коэффициент отражения зависит от длины волны электромагнитного излучения. Например, для серебра Ag примерная зависимость изображена на рисунке 3.20. Пауль Друде развил методику определения оптических постоянных металлов путем изучения их свойств по отражению света. В таблице представлены оптические константы для длины волны $\lambda = 5893$ Å.

Металл	**η**	***n***	***R* (%)**
Натрий	2,61	0,05	99,8
Серебро	3,64	0,18	95,0
Золото	2,82	0,37	85,1
Никель	3,32	1,79	62,0
Железо	1,63	1,51	32,6

Сравнение данных этой таблицы, точнее, пересчитанные из нее значения электропроводности σ_{ω}, как правило, не совпадают с измеренными значениями

электропроводности σ_0 на постоянном токе $\sigma_0 \neq \sigma_\omega$. Это объясняется влиянием связанных электронов. По мере уменьшения частоты $\sigma_\omega \to \sigma_0$.

Примечание 3. *Пауль Карл Людвиг Друде, немецкий физик, 1863–1906.*

3.5. Распространение света в кристаллах

3.5.1. Двойное лучепреломление

Кристаллы — оптически анизотропные объекты, т. е. их оптические свойства неодинаковы в различных направлениях. Яркий пример проявления анизотропных свойств — *эффект двойного лучепреломления* при распространении света в кристаллах.

В 1669 г. Эразм Бартолин наблюдал свойство двойного лучепреломления при прохождении света через кристаллы исландского шпата $CaCO_3$. В чем суть этого явления? При прохождении света через эти кристаллы наблюдается два луча, которые пространственно разделены и линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 3.21). Величина пространственного разделения зависела от взаимного расположения кристалла и направления распространения света, причем в одном направлении распространения света двойного лучепреломления не наблюдалось.

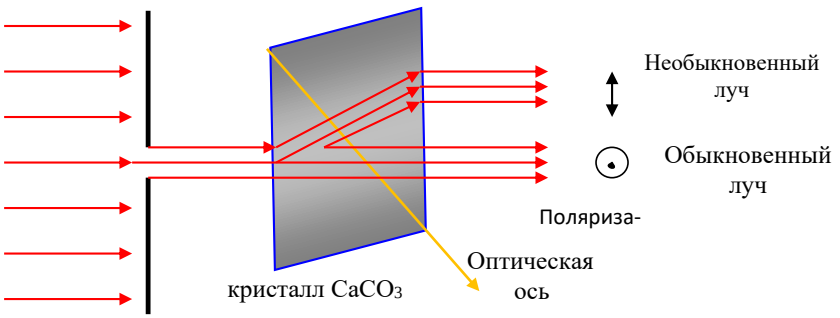


Рис. 3.21

Для дальнейшего анализа экспериментальных фактов дадим основные определения и введем понятие оптической оси. *Оптическая ось* — это такое направление или ось в кристалле, вдоль которого свет, распространяясь, не испытывает двойного лучепреломления. *Главная оптическая плоскость* проходит через оптическую ось кристалла и волновую нормаль падающего света (далее по тексту — единичный вектор $\vec{N}$). На рисунке 3.21 главная оптическая плоскость — это плоскость самого рисунка. *Обыкновенный луч* характеризуется вектором $\vec{E}_o$ и поляризован перпендикулярно главной оптической оси.

Необыкновенный луч также поляризован и характеризуется вектором $\vec{E}_e$, лежащим в главной плоскости. При падении на кристалл естественного света интенсивность обыкновенного и необыкновенного луча одинакова.

Если один из лучей после первого кристалла (линейно поляризованный свет) бросить на второй кристалл, то снова получаем два луча: обыкновенный и необыкновенный (рис. 3.22). Их интенсивность зависит от угла α между плоскостью колебаний в падающем луче и главной оптической плоскостью второго кристалла. Если разложить амплитуду падающей волны A_0 по направлениям вдоль и поперек главной оси

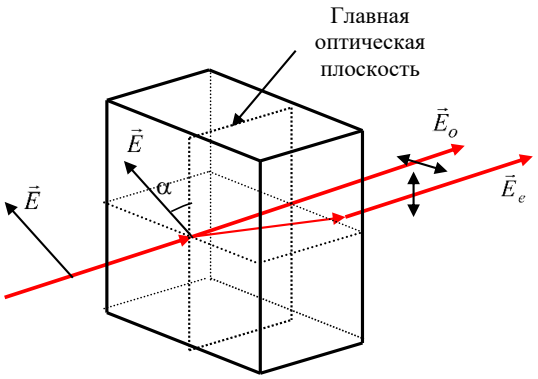


Рис. 3.22

$$\begin{cases} E_o = A_0 sin\alpha, \\ E_e = A_0 cos\alpha, \end{cases} \qquad (3.5.1)$$

то получаем интенсивность обыкновенного и необыкновенного лучей:

$$I_o = I_0 sin^2\alpha, \quad I_e = I_0 cos^2\alpha. \qquad (3.5.2)$$

Тогда отношение интенсивностей для обыкновенного и необыкновенного лучей равно

$$\frac{I_o}{I_e} = tg^2\alpha. \qquad (3.5.3)$$

Соотношения (3.5.2)–(3.5.3) носят название *закона Малюса*.

Причина необычного поведения света — различные показатели преломления кристалла для распространения обыкновенного (света одной поляризации) и необыкновенного (света другой поляризации) лучей. Показатель преломления кристалла зависит от направления поляризации распространяющегося света. Так, для исландского шпата имеем: для обыкновенного луча n_o = 1,658, а для необыкновенного луча показатель преломления не постоянен и меняется в диапазоне 1,486 < n_e < 1,658.

Вообще все кристаллы делятся на *отрицательные* кристаллы (исландский шпат), у которых $n_e \le n_o$, и *положительные* кристаллы, у которых $n_e \ge n_0$ (кварц).

Примечание 1. *Эразм Бартолин, датский физик, 1625–1698.*
Этьен Луи Малюс, французский физик, 1775–1812.

3.5.2. Оптические свойства кристаллов

В анизотропных средах связь между векторами электрической индукции и напряженностью электрического поля усложняется (см. гл. 2 «Электромагнетизм» [3]):

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \qquad i, j = 1,2,3, \tag{3.5.4}$$

где ε_{ij} — тензор диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.5.5}$$

Из закона сохранения энергии следует, что тензор диэлектрической проницаемости симметричный, т. е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, и из 9 компонент тензора — 6 независимых. Симметричность тензора позволяет привести выражения для плотности электрической энергии к такой форме, в которую будут входить лишь квадраты компонент поля (подробнее см. А. Н. Матвеев «Оптика» § 39):

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2\right) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z}\right). \tag{3.5.6}$$

Таким образом, существует такая система координат, связанная с кристаллом, в которой материальные уравнения и выражения для плотности электрической энергии приобретают простую форму:

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z. \tag{3.5.7}$$

В этой системе координат тензор диэлектрической проницаемости диагонален, при этом величины ε_x, ε_y, ε_z называются *главными диэлектрическими проницаемостями*.

Из (3.5.7) следует важный вывод, что вектора $\vec{D}$ и $\vec{E}$ не коллинеарны. Исключение составляют случаи, когда вектор напряженности $\vec{E}$ совпадает с одной из главных осей или когда $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ (изотропная среда).

В изотропных средах диэлектрическая проницаемость ε является функцией частоты (явление дисперсии), особенно резко она меняется вблизи полос поглощения. В оптически анизотропных средах компоненты ε_{ij} тоже меняются от частоты ω. Следовательно, с частотой падающего света меняются направления вектора $\vec{D}$, а также значения главных диэлектрических проницаемостей и направления осей ε_x, ε_y, ε_z. Это явление называется *дисперсией осей*.

По своим оптическим свойствам кристаллы делятся на три основные группы.

Группа I. Кубические кристаллы — кубическая система, когда все три выбранных взаимно-перпендикулярных направления эквивалентны: $\varepsilon_x = \varepsilon_y =$

$= \varepsilon_z = \varepsilon$. При этом вектора индукции и напряженности электрического поля параллельны:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}.$$

Кристаллы оптически изотропные и по оптическим свойствам эквивалентны аморфному телу.

Группа II. Кристаллы, в которых можно выбрать два или более кристаллографически эквивалентных направления, лежащих в одной плоскости. Это кристаллы (рис. 3.23) *тригональной* (*а*), *тетрагональной* (*б*) и *гексагональной* (*в*) систем. Эти плоскости перпендикулярны к оси симметрии третьего, четвертого и шестого порядков, при этом выполняется $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$. Группы I и II — одноосные кристаллы.

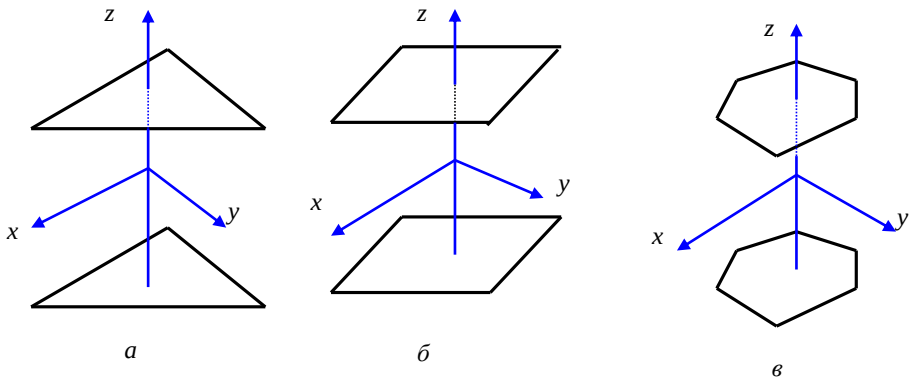


Рис. 3.23

Группа III. Кристаллы, в которых невозможно выбрать два кристаллографически эквивалентных направления. Это кристаллы *ромбической*, *моноклинной* и *триклинной* систем: $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$. Это оптически двуосные кристаллы.

3.5.3. Объяснение явления двойного лучепреломления

Пусть точка О является источником сферических электромагнитных волн.

1. В изотропной среде волновая поверхность представляет собой сферу (рис. 3.24), поскольку $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$. Так как в каждой точке фронт волны задается плоскостью, касательной к волновой поверхности. Причем нормаль к этой поверхности определяет направление распространения волны, т. е. фазовую скорость. Для изотропной среды нормаль $\vec{N}$ к волновой поверхности совпадает с направлением луча, т. е. с направлением распространения энергии $\vec{S}$ (вектор Пойнтинга) электромагнитной волны.

2. В анизотропной среде скорость распространения зависит от направления и в этом случае волновая поверхность не является сферой (рис. 3.25). Следовательно, нормаль к волновой поверхности $\vec{N}$, т. е. единичный вектор, определяющий направление распространения постоянной фазы, и вектор Пойнтинга $\vec{S} = c/4\pi\left[\vec{E},\vec{H}\right]$, определяющий направление распространения энергии (направление групповой скорости или, иначе, луч света), не совпадают по направлению. Если угол между ними равен α, то скорость распространения энергии по нормали равна $v_N = v_S \cos\alpha$.

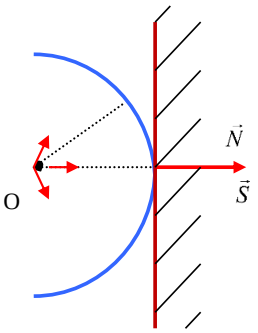


Рис. 3.24

Покажем из уравнений Максвелла, что в анизотропных средах распространяются две волны. Рассмотрим плоскую монохроматическую электромагнитную волну:

$$\vec{E}=\vec{E}_0 \exp\left[i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)\right]; \qquad \vec{D}=\vec{D}_0 \exp\left[i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)\right]; \qquad (3.5.8)$$

$$\vec{B}=\vec{B}_0 \exp\left[i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)\right]; \qquad \vec{H}=\vec{H}_0 \exp\left[i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)\right]. \qquad (3.5.9)$$

Запишем систему уравнений Максвелла для немагнитного диэлектрика (плотность тока $\vec{j}$ равна нулю):

$$rot\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{c\partial t}, \quad rot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{c\partial t}, \qquad (3.5.10)$$
$$div\vec{D}=0, \qquad div\vec{B}=0$$

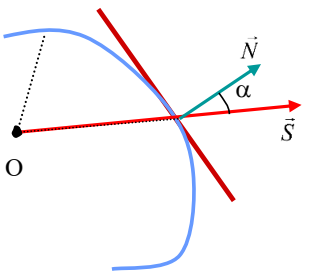


Рис. 3.25

Отметим, что задачу решаем в системе главных диэлектрических осей, при этом $div\vec{E}\neq 0$, так как вектор $\vec{E}$ не коллинеарен вектору $\vec{D}$ (рис. 3.26). Подставим плоскую волну (3.5.8) и (3.5.9) в уравнения (3.5.10), при этом произведение волнового вектора на радиус-вектор равно:

$$\vec{k}\vec{r}=\omega\frac{n}{c}\vec{r}\vec{N},$$

где n/c — фазовая скорость в направлении нормали. Заметим, что производные по времени и пространственным координатам от плоской волны могут быть заменены на следующие множители:

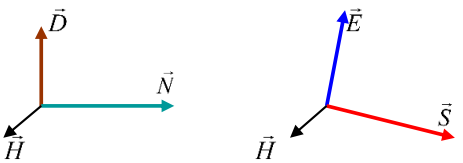


Рис. 3.26

$$\frac{\partial}{\partial t}\Rightarrow i\omega; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Rightarrow -i\omega\frac{n}{c}N_x;$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Rightarrow -i\omega\frac{n}{c}N_y; \qquad \frac{\partial}{\partial z}\Rightarrow -i\omega\frac{n}{c}N_z \qquad (3.5.11)$$

Тогда, полагая $\vec{B}=\vec{H}$ для немагнитного диэлектрика, из первых двух уравнений (3.5.9) получаем, соответственно:

$$\vec{D}=-n\left[\vec{N},\vec{H}\right], \qquad \vec{H}=n\left[\vec{N},\vec{E}\right]. \tag{3.5.12}$$

Из этих соотношений видно, что нормаль к волновой поверхности перпендикулярна векторам напряженности магнитного поля и электрической индукции: $\vec{N}\perp\vec{H},\vec{D}$. Вектор Пойнтинга $\vec{S}=c/4\pi\left[\vec{E},\vec{H}\right]$, задающий направление луча, перпендикулярен к векторам напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Поскольку в анизотропной среде $\vec{E}$ и $\vec{D}$ не коллинеарны, то вектор Пойнтинга не совпадает по направлению с вектором нормали $\vec{N}$ к волновой поверхности (рис. 3.26 и 3.27).

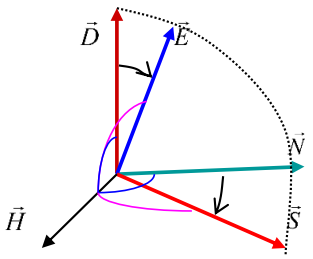


Рис. 3.27

Итак, при распространении электромагнитной волны в анизотропной среде фазовая скорость $\vec{v}_N$, которая направлена по вектору $\vec{N}$, и групповая скорость $\vec{v}_S$, направленная по вектору $\vec{S}$, не совпадают по направлению между собой. Следовательно, имеем, как обычно, $\vec{E}\perp\vec{H}$, но при этом вектор $\vec{E}$ не перпендикулярен вектору $\vec{N}$. Строго говоря, в анизотропной среде электромагнитная волна не является поперечной, так как существует ненулевая проекция вектора $\vec{E}$ на направление распространения фазы $\vec{N}$ и ненулевая проекция $\vec{D}$ на вектор Пойнтинга $\vec{S}$. Вектор $\vec{E}$ коллинеарен $\vec{D}$, если волна распространяется вдоль одного из главных направлений в кристалле.

Итак, комбинируя уравнения (3.5.12) (подставляя второе в первое), получаем

$$\vec{D}=n\left[\vec{H},\vec{N}\right]=n^2\left[\left[\vec{N},\vec{E}\right],\vec{N}\right]=n^2\left(\vec{E}-\vec{N}\left(\vec{E},\vec{N}\right)\right). \tag{3.5.13}$$

Умножим последнее равенство скалярно на $\vec{D}$ и, учитывая, что $\vec{D}\vec{N}=0$, имеем

$$D^2=n^2\left(\vec{E},\vec{D}\right). \tag{3.5.14}$$

Далее, вспоминая $n=c/v$, получаем для фазовой скорости:

$$v^2=c^2\frac{\left(\vec{E},\vec{D}\right)}{D^2}. \tag{3.5.15}$$

При этом выясняется важная особенность: *скорость распространения электромагнитных волн v зависит от направления их распространения и поляризации*.

Рассматривая совместно уравнения Максвелла, свойства волн в кристаллах и связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$, можно получить формулы Френеля для

анизотропной среды. В общем случае эти вопросы выходят за рамки курса общей физики и мы здесь их не будем рассматривать.

3.5.4. Оптически одноосные кристаллы

Наибольшее практическое значение имеют оптически одноосные кристаллы, структура которых симметрична относительно оси вращения. Разложим векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ на составляющие вдоль оптической оси $\vec{D}_{\parallel}$ и $\vec{E}_{\parallel}$ и перпендикулярные к оптической оси $\vec{D}_{\perp}$ и $\vec{E}_{\perp}$. Тогда можно записать:

$$\vec{D}_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel}\vec{E}_{\parallel}; \tag{3.5.16}$$

$$\vec{D}_{\perp} = \varepsilon_{\perp}\vec{E}_{\perp}, \tag{3.5.17}$$

где $\varepsilon_{\parallel}$ и $\varepsilon_{\perp}$ — *продольная* и *поперечная* диэлектрические проницаемости.

Рассмотрим сначала частные случаи.

1. Пусть вектор $\vec{D}$ перпендикулярен главной плоскости кристалла (плоскость, в которой лежат вектор $\vec{N}$ и оптическая ось). Тогда $\vec{D} = \vec{D}_{\perp}$ и для связи векторов электрической индукции и напряженности поля мы имеем только уравнение (3.5.17): $\vec{D} = \varepsilon_{\perp}\vec{E}$. В этом случае кристалл ведет себя как изотропная среда с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{\perp}$. Из (3.5.15) получаем выражение для скорости распространения световых волн:

$$v^2 = c^2\frac{\vec{D}\vec{E}}{D^2} = \frac{c^2}{\varepsilon_{\perp}};$$

$$v = v_{\perp} \equiv v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}. \tag{3.5.18}$$

Это — *скорость распространения обыкновенного луча*. Таким образом, если электрический вектор распространяющейся волны перпендикулярен к главной плоскости кристалла, то скорость волны не зависит от направления ее распространения. Такая волна составляет суть обыкновенной световой волны.

2. Пусть вектор $\vec{D}$ лежит в главной плоскости. Тогда вектор $\vec{E}$ тоже лежит в главной плоскости и характеризует (по определению) необыкновенную волну. Вектор $\vec{E}$ можно разложить на две составляющие — вдоль вектора $\vec{D}$ и вдоль вектора нормали (рис. 3.27 и 3.28):

$$\vec{E} = \vec{E}_N + \vec{E}_D. \tag{3.5.19}$$

Умножая (3.5.19) скалярно на $\vec{D}$ и учитывая, что $\vec{D}\vec{N} = 0$, получаем следующее очевидное равенство:

$$\vec{D}\vec{E} = \vec{D}\vec{E}_N + \vec{D}\vec{E}_D = DE_D;$$

$$E_D = \frac{\vec{D}\vec{E}}{D}. \tag{3.5.20}$$

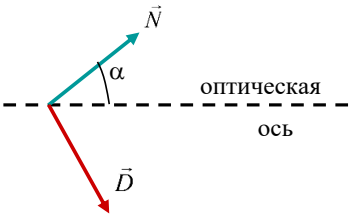


Рис. 3.28

Пользуясь разложением (3.5.16) и (3.5.17), преобразуем скалярное произведение $\left(\vec{E},\vec{D}\right)$:

$$E_D = \frac{\vec{E}\vec{D}}{D} = \frac{E_{||}D_{||} + E_{\perp}D_{\perp}}{D} = \frac{1}{D}\left(\frac{D_{||}^2}{\varepsilon_{||}} + \frac{D_{\perp}^2}{\varepsilon_{\perp}}\right). \quad (3.5.21)$$

Вводя угол α между оптической осью и волновой нормалью (см. рис. 3.28), получаем

$$E_D = D\left(\frac{sin^2\alpha}{\varepsilon_{||}} + \frac{cos^2\alpha}{\varepsilon_{\perp}}\right) = D\left(\frac{N_{\perp}^2}{\varepsilon_{||}} + \frac{N_{||}^2}{\varepsilon_{\perp}}\right). \quad (3.5.22)$$

Введем диэлектрическую проницаемость:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{N_{\perp}^2}{\varepsilon_{||}} + \frac{N_{||}^2}{\varepsilon_{\perp}}. \quad (3.5.23)$$

Тогда можно (3.5.22) переписать:

$$D = \varepsilon E_D. \quad (3.5.24)$$

Из общих соотношений (3.5.12), рассмотрев равенства по модулю, получаем:

$$\varepsilon E_D = \frac{c}{v}H, \quad H = \frac{c}{v}E_D.$$

Откуда фазовая скорость (скорость волны по нормали к фронту волны):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c\sqrt{\frac{N_{\perp}^2}{\varepsilon_{||}} + \frac{N_{||}^2}{\varepsilon_{\perp}}} = v_e = v_{||}. \quad (3.5.25)$$

Эта скорость изменяется с изменением направления нормали $\vec{N}$ к фронту волны. По этой причине возникает необыкновенная волна. Зависимость ее скорости $v_{||}$ от направления распространения обусловлена тем, что с изменением направления волновой нормали $\vec{N}$ меняется угол между вектором $\vec{E}$ и оптической осью кристалла.

1. Когда $N_{\perp} = 0$, то необыкновенная волна распространяется вдоль оптической оси, то из (3.5.25) следует, что фазовая скорость равна

$$v_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} = v_{\perp} \equiv v_0. \quad (3.5.26)$$

То есть в этом случае нет различия между обыкновенной и необыкновенной волной за исключением возможно разной поляризации волн.

2. Если $N_{||} = 0$, то фазовая скорость равна

$$v_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{||}}}. \quad (3.5.27)$$

Это скорость необыкновенной волны, максимально отличающаяся от скорости обыкновенного луча.

Итак, в общем случае, волна, попадающая в кристалл из изотропной среды, разделяется внутри кристалла на две линейно поляризованные волны:

а) обыкновенную, вектор электрической индукции $\vec{D}$ которой перпендикулярен главной плоскости;

б) необыкновенную с вектором индукции, лежащим в главной плоскости. Для различных направлений распространения необыкновенной волны — различные скорости. Законы преломления справедливы, но не для лучей, а для волновых нормалей.

3.5.5. О построении лучей

Итак, в обыкновенном луче колебания электрического вектора $\vec{E}$ происходят в направлении, перпендикулярном к главной плоскости кристалла.

Построим на рисунке 3.29 диаграмму скоростей для одноосных кристаллов. Пусть плоскость листа — главная плоскость кристалла. Окружность, или, точнее, сфера, характеризуется $\varepsilon_\perp$ или скоростью обыкновенного луча, которая постоянна для одноосных кристаллов во всех направлениях распространения. Поляризация этого луча, обозначенная на рисунке 3.29 точками, перпендикулярна плоскости листа.

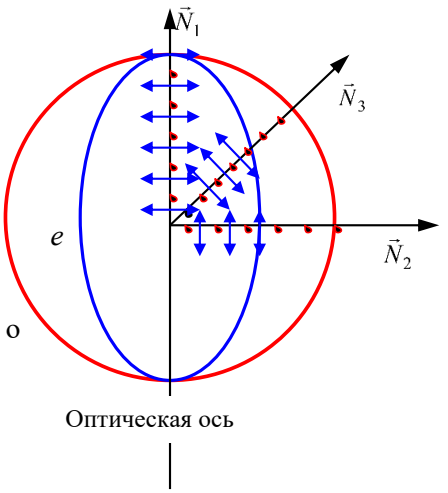


Рис. 3.29

Эллипс скоростей, точнее, для одноосных кристаллов в пространстве *эллипсоид вращения*, характеризует скорость распространения необыкновенного лу-ча. Его скорость определяется соотношением (3.5.25) и меняется в зависимости от направления распространения $\vec{N}$ ($N_\perp = \sin\alpha$ и $N_\parallel = \cos\alpha$) относительно оптической оси. На рисунке 3.29 поляризация необыкновенного луча обозначена обоюдной стрелкой, так как она параллельна главной плоскости.

Рассмотрим три луча по направлениям $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$, в качестве примера.

1. Направление $\vec{N}_1$: угол $\alpha = 0$, тогда лучи движутся, не расщепляясь, с одинаковой скоростью

$$v_0 = v_e = c/\sqrt{\varepsilon_\perp}\,.$$

2. Направление $\vec{N}_2$: угол α = π/2, тогда обыкновенный и необыкновенный лучи движутся в одном направлении, но с разной скоростью

$$v_0 = c/\sqrt{\varepsilon_\perp} \qquad \text{и} \qquad v_e = c/\sqrt{\varepsilon_\parallel}\,.$$

3. Направление $\vec{N}_3$: угол α произвольный, тогда обыкновенный и необыкновенный лучи движутся, расщепляясь, с разной скоростью.

В общем случае, как уже упоминалось в этом параграфе выше, существуют кристаллы положительные ($n_e > n_o$) и отрицательные ($n_e < n_o$), соответствующие диаграммы скоростей которых изображены на рисунке 3.30.

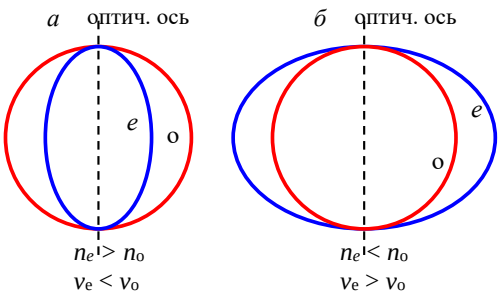


Рис. 3.30

Полученные диаграммы скоростей позволяют построить волновые фронты разделяющихся лучей. Покажем построение волновых фронтов на нескольких примерах. Для определенности рассмотрим положительный кристалл и нормальное падение света на его поверхность. Рассмотрим три направления распространения фронта волны $\vec{N}$ относительно оптической оси кристалла, соответствующие случаям А) $\vec{N}_1$, Б) $\vec{N}_2$, В) $\vec{N}_3$, изображенным на рисунках 3.31, 3.32.

<u>Случай А</u>: при таком нормальном падении, когда оптическая ось кристалла расположена перпендикулярно поверхности и совпадает по направлению с $\vec{N}$, обыкновенный и необыкновенный лучи идут с одинаковой скоростью в одном направлении, т. е. лучи не разделяются (рис. 3.31*А*).

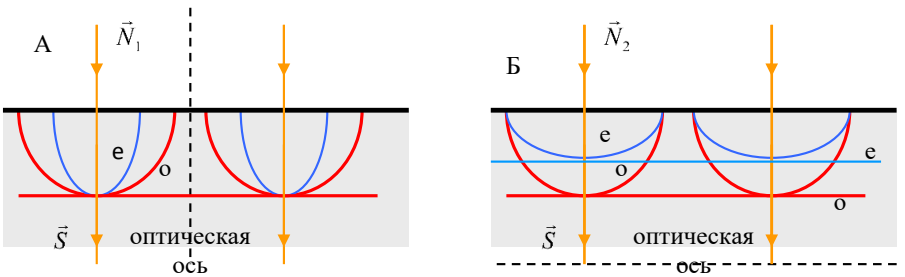


Рис. 3.31

Случай Б: при таком нормальном падении, когда оптическая ось кристалла расположена параллельно поверхности и перпендикулярна направлению $\vec{N}$, обыкновенный и необыкновенный лучи идут опять не разделяясь, в одном направлении, но идут с различной скоростью. Для положительного кристалла необыкновенный луч идет медленнее (рис. 3.31*Б*).

Итак, в случаях А и Б лучи не разделяются, так как $\vec{N}$ совпадает с направлением $\vec{S}$.

Случай В: при таком нормальном падении, когда оптическая ось кристалла расположена под некоторым углом к поверхности и не совпадает по направлению с $\vec{N}$, обыкновенный и необыкновенный лучи идут с различной фазовой скоростью, при этом происходит пространственное разделение лучей. На рисунке 3.32 необыкновенный луч идет под углом к нормали, в то время как обыкновенный проходит не преломляясь.

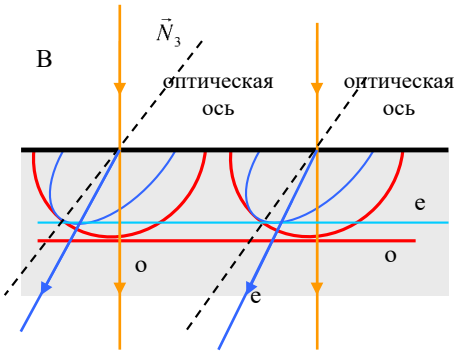


Рис. 3.32

Еще один пример построения фронта волны и лучей приведен на рисунке 3.33, где рассмотрено падение световой волны под некоторым углом к нормали и при произвольном направлении оптической оси кристалла. Опять-таки для положительного кристалла на границе сред строим диаграмму скоростей в точке *2*, с радиусом равным расстоянию, которое лучи успевают пройти внутри за время, когда световая волна достигнет точки *1*. Затем строим касательные из точки *1* к окружности (для обыкновенного луча) и эллипсу (для необыкновенного луча) диаграммы. Перпендикуляры к касательным дают направление распространения фронта этих волн, а направления распространяющихся в кристалле лучей определяются линиями, проходящими через точки касания и точку *2* (рис. 3.33).

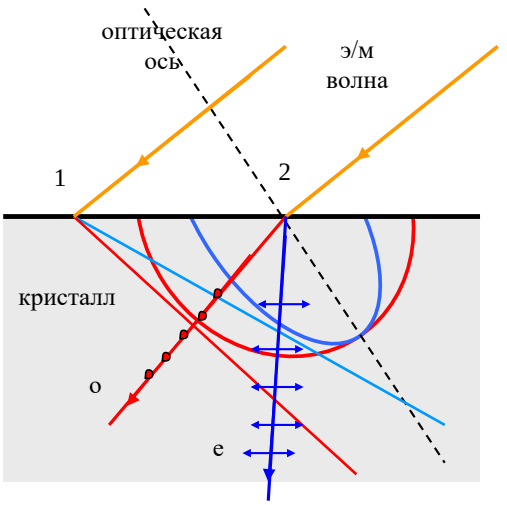


Рис. 3.33

3.5.6. Поляризаторы и оптические пластинки

1. *Призма Николя*. Призма изготовляется из двух кусков исландского шпата, вырезанных и отшлифованных под определенными углами к угловым ребрам и оптической оси. Оба эти кусочка склеивают канадским бальзамом. Показатель преломления канадского бальзама (n = 1,55) занимает промежуточное значение между обыкновенным (n_0 = 1,658) и необыкновенным (n_e = 1,486) показателями преломления исландского шпата. Все углы и показатели рассчитаны так, что обыкновенный луч испытывает полное внутренние отражение на границе шпата с канадским бальзамом и на выходе поглощается зачерненной поверхностью, а необыкновенный луч проходит через слой с бальзамом. В результате на выходе имеем линейно поляризованный свет в плоскости, параллельной главной плоскости падения.

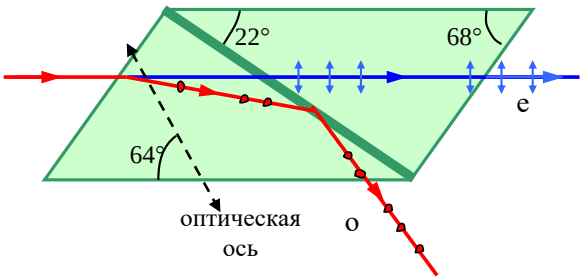


Рис. 3.34

2. *Призма Фуко*. Эта призма сделана по подобию призмы Николя, в которой канадский бальзам заменен слоем воздуха. Для осуществления полного внутреннего отражения изменены значения углов, под которыми вырезаются кристаллы. Призма Фуко может также использоваться для ультрафиолетового излучения. Существует большое разнообразие призм, основанных на тех же принципах и предназначенных для получения поляризованного света.

3. *Поляроиды* (турмалин), дихроичные пластинки. К ним относятся кристаллы и приборы, у которых поглощение зависит от направления колебаний электрического вектора $\vec{E}$.

Для анализа поляризованного света и изменения его поляризации часто используются оптические пластинки. Например, как отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу? С помощью поляризаторов это не удается. Чтобы отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу, используют *четвертьволновую оптическую пластинку* λ/4.

Кристаллическая пластинка вырезана из одноосного кристалла параллельно оптической оси. Тогда необыкновенный (e) и обыкновенный (o) лучи не разделяются пространственно, а имеют различные скорости. Тогда пластинка в λ/4 дает между лучами **e** и **o** разность фаз, равную π/2. Разность хода лучей:

$$d(n_e - n_o) = \pm\lambda/4 \qquad \text{и} \qquad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_e - n_o) = \pm\frac{\pi}{2} + m\pi. \qquad (3.5.28)$$

Если на входе падает плоско поляризованная волна, то на выходе волны из пластинки получаем циркулярно-поляризованную волну. И, наоборот, из циркулярно-поляризованной волны при пропускании через пластинку λ/4 получаем на выходе плоско поляризованную волну. При пропускании естественного света через эту пластинку ничего не происходит с естественным светом — он остается неполяризованным. При пропускании циркулярно-поляризованного света через пластинку λ/4 получаем плоско поляризованный свет, а затем его можно пропустить через поляризатор. Поляризатор покажет линейно поляризованный свет: максимум интенсивности при одном угле поворота и нулевое значение интенсивности пройденного света при повороте на угол π/2. Для естественного света при различных углах поворота поляризатора интенсивность пройденного света остается постоянной.

Для поворота плоскости линейной поляризации на некоторый угол можно использовать пластинку λ/2, которая дает следующую оптическую разность хода и фаз:

$$d(n_e - n_o) = \pm\lambda/2 \quad \text{и} \quad \Delta\varphi = \pm\pi/2\,. \qquad (3.5.29)$$

Если линейная поляризация перед пластинкой λ/2 имела угол α по отношению к оптической оси кристалла, то на выходе получим поворот плоскости поляризации на угол 2α (рис. 3.35).

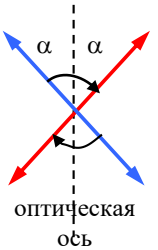


Рис. 3.35

Примечание 2. *Уильям Николь, шотландский физик, 1768–1851.*
Жан Бернар Леон Фуко, французский физик, 1819–1868.

3.6. Классическая теория дисперсии света

3.6.1. Дисперсия

Дисперсия — зависимость показателя преломления n и, следовательно, скорости распространения электромагнитных волн v от длины волны. Влияние дисперсии проявляется лишь в распространении немонохроматических волн. Дисперсия является следствием зависимости поляризуемости атомов и молекул от частоты падающего излучения.

Ранее мы получали формулу Релея (§ 1.8, гл. 1), дающую связь между групповой и фазовой скоростями:

$$v_{гр} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}, \qquad (3.6.1)$$

где фазовая скорость равна $v = \omega/k = c/n$, а групповая — $v_{гр} = d\omega/dk$.

1. Если $\frac{dv}{d\lambda} = 0$, то $v_{гр} = v$ и в среде нет дисперсии.

2. Если $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, то $v_{гр} < v$, при этом получаем

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = -\frac{c}{n^2}\frac{\partial n}{\partial \lambda} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0 .$$

Это *нормальная дисперсия*: с ростом длины волны показатель преломления уменьшается. Примерная зависимость показателя преломления от длины волны λ и частоты ω изображена на рисунке 3.36*а*, *б*.

3. Если $\frac{dv}{d\lambda} < 0$, то получаем

$$v_{гр} > v , \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0 .$$

Это *аномальная дисперсия*. При этом с ростом длины волны показатель преломления растет или с ростом частоты падает (рис. 3.36*в*).

Рис. 3.36

Все среды, за исключением абсолютного вакуума, обладают дисперсией. Даже в межзвездном пространстве обнаружена дисперсия.

Теория Максвелла не содержит атомных констант и поэтому не дает объяснения дисперсии, т. е. она не описывает зависимость диэлектрической проницаемости от длины волны ε = ε(λ). Дисперсия света возникает в результате *вынужденных колебаний электронов и ионов* под воздействием переменного поля электромагнитной волны. Поэтому для объяснения дисперсии необходимо, хотя бы в рамах модельного рассмотрения, ввести представления о структуре атомов или молекул.

3.6.2. Классическая теория дисперсии

Рассмотрим классическую теорию дисперсии, построенную Х. А. Лоренцом на основании уравнений Ньютона. Она справедлива в основном для газовых сред, где можно не учитывать сложное взаимодействие между атомами и электронами.

В простейшем случае, когда взаимодействием между атомами или молекулами можно пренебречь (разреженные среды, например газы) и считать, что поле, действующее на отдельный атом, совпадает со средним полем волны.

При этом достаточно учесть действие поля волны на изолированный атом, который упрощенно в этой модели рассматривается как гармонический осциллятор (т. е. рассматриваются упруго связанные электроны).

Очевидно, что применение к описанию движения электрона законов классической физики с точки зрения современной физики совершенно не оправдано. Правильную теорию атома дает квантовая механика. Поэтому и последовательная теория дисперсии, использующая реалистическую модель среды, должна быть квантовой. Использование здесь упрощенной модели атома как гармонического осциллятора основано лишь на том замечательном факте, что квантовая теория дисперсии приводит к практически тем же результатам, что и классическая, хотя и с некоторыми особенностями.

Все электроны в атоме можно разделить на *внешние* (оптические) и *внутренние* электроны, т. е. электроны внутренних оболочек. Для разных длин волн разные электроны атома дают вклад в дисперсию. В оптическом диапазоне вклад дают только внешние электроны. В классической теории дисперсии оптический электрон (электрон внешней оболочки атома) в атоме рассматривается как затухающий гармонический осциллятор, характеризуемый определенной собственной частотой ω_0 и постоянной затухания γ. Запишем уравнение Ньютона, для движения электрона в поле электромагнитной волны, пренебрегая магнитной силой Лоренца $\frac{e}{c}\left[\vec{v},\vec{H}\right]$:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - g\dot{\vec{r}} + e\vec{E}' . \qquad (3.6.2)$$

Здесь $\vec{r}$ – смещение электрона из положения равновесия; $-k\vec{r}$ — квазиупругая сила; $g\dot{\vec{r}}$ — аналог силы трения (учитывает, что свет может поглощаться); $\vec{E}'$ — напряженность электрического поля, действующего на электрон. Вообще говоря, поле $\vec{E}'$ отличается от среднего макроскопического поля $\vec{E}$, входящего в уравнения Максвелла, однако в случае достаточно разреженных газов этим различием можно пренебречь. Тогда уравнение движения оптического электрона в поле $\vec{E}(t)$ световой волны имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}(t), \qquad (3.6.3)$$

где входящие параметры определены как обычно в теории колебаний (гл. 4 «Колебания» [1]):

$$2\gamma = \frac{g}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} . \qquad (3.6.4)$$

Постоянная затухания γ, характеризующая силу «сопротивления», пропорциональную скорости электрона, содержит вклад, обусловленный *радиационным затуханием*: согласно классической теории электрон обязательно излучает электромагнитные волны. Другие причины затухания (взаимодействие с другими атомами и неупругие соударения) связаны с *диссипацией* энергии

электромагнитного поля, т. е. в конечном итоге превращением её в теплоту. Диссипативное затухание можно считать истинным поглощением и включить его вклад в константу γ.

Относительная роль отдельных членов уравнения зависит от рассматриваемой области частот. Например, при частотах ω падающей электромагнитной волны, далеких от собственной частоты ω_0 осциллятора, затуханием, как правило, можно пренебречь. Собственную частоту ω_0 атомного электрона будем рассматривать как формально введенную постоянную, которая определяет частоту линии поглощения в спектре исследуемого вещества. Эти постоянные γ и ω_0 не могут быть получены из классической физики, здесь они вводятся как параметры.

Пусть падает плоская монохроматическая волна, т. е. поле $\vec{E}(t)$, действующее на осциллятор, изменяется со временем по гармоническому закону. Запишем падающую волну в комплексной форме:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}. \qquad (3.6.5)$$

Заметим, E_0 можно считать постоянной (т. е. не зависящей от координат), если амплитуда колебаний электрона мала по сравнению с длиной волны. Нас интересует частное решение уравнения (3.6.3), описывающее *установившиеся* вынужденные колебания осциллятора (напомним, при больших временах общее решение однородного уравнения исчезает — см. [1]). Эти колебания, совершаемые под действием гармонической (синусоидальной) силы, также будут гармоническими, а их частота совпадает с частотой вынуждающей силы. Поэтому решение уравнения для смещения $\vec{r}(t)$ в случае установившихся колебаний будем искать в виде $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$.

В результате получаем следующее решение:

$$\vec{r}(t) = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}\vec{E}(t). \qquad (3.6.6)$$

Так как электрон смещается относительно ядра, то атом приобретает дипольный момент. Индуцируемый электрическим полем дипольный момент атома пропорционален напряженности поля $\vec{p}(t) = e\vec{r} = \beta\vec{E}$ и, следовательно, можно записать:

$$\vec{p}(t) = \beta\vec{E} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}\vec{E}(t). \qquad (3.6.7)$$

Зависящий от частоты ω коэффициент пропорциональности между векторами $\vec{p}$ и $\vec{E}$ называется *атомной поляризуемостью* $\beta(\omega)$:

$$\vec{p} = \beta(\omega)\vec{E}.$$

Если N — концентрация атомов вещества, то вектор поляризации определяется $\vec{P} = N\vec{p}$, тогда для диэлектрической *восприимчивости* можно записать

$$\alpha(\omega) = N\beta(\omega) = \frac{N\,e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \qquad (3.6.8)$$

Диэлектрическая проницаемость связана с восприимчивостью соотношением $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$. Таким образом, для разреженной среды, содержащей N осцилляторов в 1 см^3, получаем *диэлектрическую проницаемость как функцию частоты*:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N\,e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \qquad (3.6.9)$$

Иногда для упрощения записи вводят константу ω_p, имеющую размерность частоты и называемую *плазменной* или *Ленгмюровской частотой*:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}. \qquad (3.6.10)$$

Тогда диэлектрическую проницаемость можно записать в виде

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \qquad (3.6.11)$$

Вследствие затухания атомных осцилляторов диэлектрическая проницаемость оказывается комплексной величиной. Выделяя вещественную и мнимую часть, можно получить выражения для зависящих от частоты показателя преломления $n(\omega)$ и показателя затухания $\eta(\omega)$. Вводим, как и ранее в § 3.4, эти показатели следующим образом:

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n - i\eta. \qquad (3.6.12)$$

Тогда, подставив (3.6.12) в (3.6.11) и приравняв отдельно реальные и мнимые части, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} n^2 - \eta^2 &= 1 + \frac{\omega_p^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \\ n\eta &= \frac{\omega_p^2\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \end{aligned} \qquad (3.6.13)$$

Из (3.6.13) можно получить показатели преломления и затухания, однако, в общем виде выражения для показателей преломления $n(\omega)$ и затухания $\eta(\omega)$ весьма громоздки, поэтому анализ физических результатов электронной теории дисперсии имеет смысл провести для сравнительно простых частных случаев.

Примечание 1. *Хенрик Антон Лоренц, нидерландский физик-теоретик, 1853–1928,* Нобелевская премия 1902 г. за разработку теории эффекта Зеемана.
Ирвинг Ленгмюр, американский физик, 1881–1957, Нобелевская премия 1932 г. по химии.

3.6.3. Нормальная и аномальная дисперсии

1. *Нормальная дисперсия*. При частотах, далеких от собственной частоты ω_0 атомных осцилляторов, выполняется условие

$$2\omega\gamma << \left|\omega_0^2 - \omega^2\right|, \tag{3.6.14}$$

поэтому мнимой частью, ответственной за поглощение, в выражении для дисперсии можно пренебречь. Тогда зависимость показателя преломления от частоты принимает вид

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{3.6.15}$$

Для разреженных сред второй член этого выражения мал по сравнению с первым, поэтому можем приближенно записать (вспоминая разложение в ряд $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ при $x << 1$):

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{2\pi N e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{3.6.16}$$

При тех частотах, где полученная формула применима (т. е. частотах вдали от ω_0), показатель преломления возрастает с увеличением частоты. Такой характер зависимости $n(\omega)$ называют *нормальной дисперсией*. На рисунке 3.37 показана зависимость $n(\omega) - 1$ от частоты электромагнитной волны.

Для низких частот ($\omega < \omega_0$) показатель преломления $n(\omega)$ больше единицы, т. е. фазовая скорость c/n волны в среде меньше скорости света в пустоте. Это значит, что измененная средой волна отстает от падающей волны по фазе.

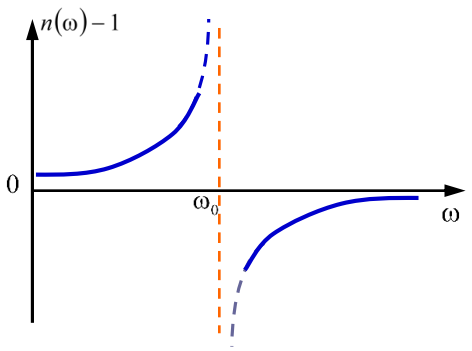


Рис. 3.37

Если же частота электромагнитной волны больше собственной частоты осцилляторов ($\omega > \omega_0$), то $n < 1$ и фазовая скорость волны в среде оказывается больше скорости света в вакууме, т. е. измененная волна опережает по фазе падающую. Напомним, что фазовая скорость может быть больше скорости света, и это не противоречит релятивистской теории, утверждающей, что скорости

материальных тел и электромагнитного сигнала не могут превышать c. Понятие показателя преломления применимо к *монохроматической волне*, имеющей бесконечную протяженность в пространстве и во времени, т. е. к установившимся вынужденным колебаниям осцилляторов среды. А монохроматическая волна не может служить для передачи сигнала.

На рисунке 3.37 показана зависимость (3.6.16), однако надо иметь в виду, что область частот около собственной частоты колебаний $\omega \approx \omega_0$ здесь схвачена неточно.

Зависимость показателя преломления от частоты была получена для разреженной среды, т. е. предполагалось, что действующее на отдельный атом поле совпадает со средним макроскопическим полем $\vec{E}$. В плотном веществе (жидкости, твердые тела) это предположение несправедливо.

2. *Аномальная дисперсия*. Обратимся опять к выражению (3.6.9), описывающему диэлектрическую проницаемость разреженной среды, и исследуем дисперсию *вблизи собственной частоты* ω_0 атомного осциллятора. В этом случае диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(\omega)$ и показатель преломления $\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n - i\eta$ являются комплексными величинами.

Найдем вещественную n и мнимую η части показателя преломления из выражений (3.6.13). При частотах, близких к собственной частоте осциллятора в полученных выражениях возможны упрощения. При частотах $\omega \approx \omega_0$ везде, кроме разности $\omega_0^2 - \omega^2$, частоту ω можно заменить на ω_0, а разность квадратов частот можно преобразовать следующим образом:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0 \Delta\omega,$$

где $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$. Теперь для первого уравнения из (3.6.13) получаем

$$n^2 - \eta^2 \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}$$

и аналогично для второго уравнения:

$$n\eta \approx \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{\gamma}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}. \qquad (3.6.17)$$

Зависимости $n(\omega) - 1$ и $\eta(\omega)$ от частоты в окрестности $\omega \approx \omega_0$ представлены на рисунке 3.38.

Зависимость показателя затухания от частоты характеризует *спектральный контур линии поглощения* (максимум в $\eta(\omega)$ на рис. 3.38). В рассматриваемой модели среды, как системы неподвижных затухающих атомных осцилляторов, этот контур имеет *лоренцевскую* форму с максимумом при $\Delta\omega \approx 0$, т. е. при $\omega \approx \omega_0$. Ширина максимума на половине высоты равна 2γ и растет с увеличением постоянной затухания.

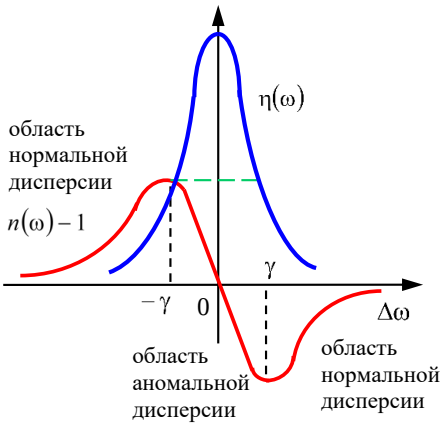


Рис. 3.38

Уменьшение показателя преломления с частотой, которое происходит в пределах ширины спектрального контура линии поглощения (рис. 3.38), называют *аномальной дисперсией*. Экспериментально она была открыта Ф. Леру в 1860 г. в опытах по преломлению белого света призмой, наполненной парами йода. Оказалось, что синие лучи преломляются меньше красных, т. е. показатель преломления убывает с частотой.

При получении (3.6.17) и при построении графика на рисунке 3.38 использовалось примерное равенство $\omega \approx \omega_0$, хотя, строго говоря, резонансная частота $\omega_{рез}$ отличается от ω_0. Сдвиг резонансной частоты от ω_0 происходит при наличии затухания и вынуждающей силы (см. гл. 4 «Колебания» [1]). Поэтому максимум в показателе затухания происходит примерно при частоте ω_0 только при небольших значениях постоянной затухания γ.

Если в атомах имеются другие электроны с другими собственными частотами ω_k, то диэлектрическая проницаемость принимает вид

$$\varepsilon = 1 + \sum_k \frac{4\pi N_k \, e_k^2 / m_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\gamma_k \omega}. \qquad (3.6.18)$$

Примерная зависимость диэлектрической проницаемости ε от частоты распространяющегося излучения представлена на рисунке 3.39.

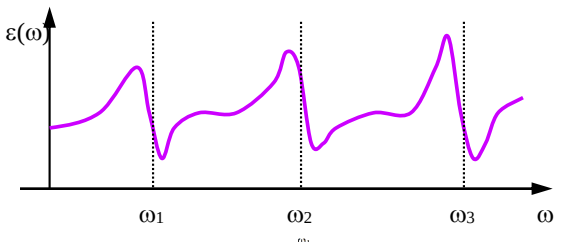


Рис. 3.39

По мере возрастания частоты и ее приближения к собственным частотам поведение дисперсии соответствует нормальной дисперсии. В окрестности полосы поглощения диэлектрическая проницаемость ε уменьшается с частотой — область аномальной дисперсии (см. рис. 3.39).

Примечание 2. Помимо дисперсии, связанной с вынужденными колебаниями электронов и ионов, существует другой вид дисперсии в средах с полярными молекулами. Меняется «ориентационная» поляризация и обусловленная ей диэлектрическая проницаемость. При облучении светом частоты ω появляется вынужденное вращение (колебание) молекул с той же частотой, а амплитуда вращений зависит от частоты ω или длины волны света λ. У полярных диэлектриков дисперсия проявляется начиная с сантиметрового диапазона и показатель преломления убывает с ростом частоты — аномальная дисперсия.

Примечание 3. В области радиоволн (λ > 1 см) существенна только одна собственная частота $\omega_0 = 0$, которой обладают свободные электроны. Тогда получаем

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2/m}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Если нет свободных электронов, то нет и дисперсии для радиоволн.

Примечание 4. *Франсуа Пьер Леру, французский физик, 1832–1907.*

3.7. Вращение плоскости поляризации

3.7.1. Естественная оптическая активность

При пропускании линейно поляризованного света через плоско параллельный слой некоторых веществ плоскость поляризации света оказывается повернутой относительно своего исходного положения. Это явление называется *вращением плоскости поляризации*, или *оптической активностью*. Различают *естественную оптическую активность*, когда поворот плоскости поляризации происходит при прохождении в среде в отсутствии внешних полей, и *искусственную оптическую активность*, когда поворот плоскости поляризации происходит во внешнем магнитном поле.

В 1811 г. Д. Араго наблюдал поворот плоскости поляризации при пропускании света через пластинки кварца. Свет был поляризован линейно, а пластинки кварца вырезаны перпендикулярно к оптической оси.

Экспериментально Ж. Био установил, что угол поворота плоскости поляризации зависит от длины d пути в кристаллической пластинке и от длины волны света λ:

$$\varphi = \alpha d, \tag{3.7.1}$$

где коэффициент пропорциональности α называется *вращательной способностью*. Вращательная способность зависит от длины волны λ. Так для кристаллов кварца имеем α = 15°/мм — для красной волны, α = 27°/мм — для зеленого света, α = 51°/мм — для фиолетового света.

Сейчас известно очень много кристаллических и аморфных веществ, которые вращают плоскость поляризации. Эти вещества содержат оптически активные молекулы. Имеются *право и левовращающие* вещества (направление

вращения обычно рассматривают по отношению к наблюдателю, к которому приближается свет).

Наблюдение происходит по следующей схеме: свет пропускается через два скрещенных николя и вещество, помещенное между ними (рис. 3.40).

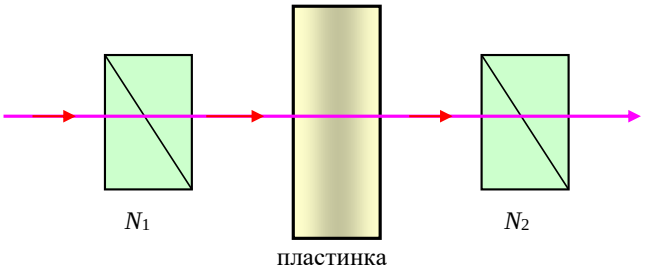


Рис. 3.40

Френель доказал экспериментально, что при вступлении в оптически активную среду луч света испытывает *двойное круговое лучепреломление*: лучи, *поляризованные по правому и левому кругу, идут внутри оптически активной среды с различными скоростями*. Если падающий свет был поляризован линейно, то при выходе из такой среды эти волны складываются вновь в линейно поляризованную волну, но с повернутой на некоторый угол плоскостью поляризации.

Пусть свет распространяется вдоль оси z. Тогда линейно поляризованный свет можно разбить на две компоненты по осям x и y:

$$E_x = ACos\chi Cos(\omega t - kz), \quad E_y = ASin\chi Cos(\omega t - kz). \tag{3.7.2}$$

Угол χ — угол между направлением вектора напряженности электрического поля и осью x. Этот угол зависит от z, поэтому можно записать:

$$\chi = -\alpha z. \tag{3.7.3}$$

Если $\alpha > 0$, то поворот плоскости поляризации происходит по часовой стрелке, а если $\alpha < 0$, то поворот плоскости поляризации — против часовой стрелки. Разложим произведения в (3.7.2) в суммы с помощью тригонометрических формул:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{A}{2}Cos(\omega t - kz + \alpha z) + \frac{A}{2}Cos(\omega t - kz - \alpha z) \\ E_y &= \frac{A}{2}Cos\left(\omega t - kz + \alpha z + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{2}Cos\left(\omega t - kz - \alpha z - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

Таким образом, суммарную волну можно представить в виде суммы двух волн: правой $\vec{E}^r$ и левой $\vec{E}^l$ циркулярно-поляризованных волн:

$$\vec{E} = \vec{E}^r + \vec{E}^l. \tag{3.7.5}$$

Компоненты этих волн равны:

$$\begin{cases} E_x^r = \dfrac{A}{2} Cos\left(\omega t - k^r z\right) \\ E_y^r = \dfrac{A}{2} Cos\left(\omega t - k^r z + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}; \qquad \begin{cases} E_x^l = \dfrac{A}{2} Cos\left(\omega t - k^l z\right) \\ E_y^l = \dfrac{A}{2} Cos\left(\omega t - k^l z - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}. \tag{3.7.6}$$

Здесь эффективные волновые числа равны:

$$k^r = k - \alpha, \quad k^l = k + \alpha. \tag{3.7.7}$$

Скорости этих циркулярно-поляризованных волн определяются соответственно:

$$v^r = \frac{\omega}{k - \alpha}, \qquad v^l = \frac{\omega}{k + \alpha}. \tag{3.7.8}$$

Отсюда получаем разность показателей преломления

$$n^l - n^r = \frac{2c}{\omega}\alpha, \qquad \alpha = \frac{\omega}{2c}\left(n^l - n^r\right). \tag{3.7.9}$$

Плоскость поляризации вращается в ту же сторону, что и электрический вектор поляризованной по кругу волны с меньшим показателем преломления, т. е. с большей фазовой скоростью. Например, если $n^l - n^r > 0$ и $\alpha > 0$ — вращение происходит вправо, т. е. по часовой стрелке.

Поляризованные по кругу волны с различным направлением вращения вектора $\vec{E}$ могут отличаться не только скоростями распространения, но и коэффициентами поглощения. При этом если падающий свет был поляризован линейно, то на выходе амплитуды лево и право циркулярно-поляризованных волн будут различны и выходящий свет будет поляризован эллиптически. Это явление называется *круговым дихроизмом*.

3.7.2. Искусственная оптическая активность

Оптически неактивные вещества в магнитном поле становятся оптически активными и вращают плоскость поляризации света, распространяющегося вдоль силовых линий магнитного поля. Это явление суть *эффекта Фарадея* (1846). Наблюдение производится по схеме, изображенной на рисунке 3.41, где П — поляризатор, а А — анализатор.

Угол поворота определяется соотношением

$$\varphi = VBl, \tag{3.7.10}$$

где B — индукция магнитного поля; l — путь, пройденный светом в магнитном поле; V — *постоянная Верде*, или *магнитная вращательная способность*, которая зависит от рода вещества, длины волны, физического состояния веще-

ства. В отличие от естественной оптической активности, где вращение плоскости поляризации зависит от направления распространения света, в эффекте Фарадея поворот плоскости поляризации не зависит от направления распространения света, а зависит только от направления магнитного поля $\vec{B}$.

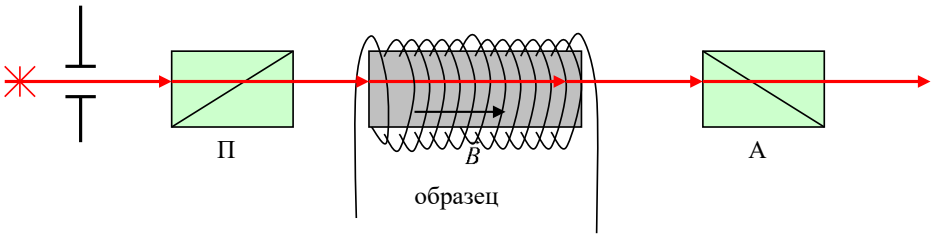


Рис. 3.41

Физическая причина поворота плоскости поляризации состоит в следующем. В магнитном поле электронные орбиты прецессируют с частотой ларморовской прецессии Ω. Эта частота складывается и вычитается из частоты распространяемого света ω. Таким образом, циркулярно поляризованный свет имеет две частоты (левый или правый зависит от направления магнитного поля):

$$\omega_+ = \omega_0 + \Omega,$$

$$\omega_- = \omega_0 - \Omega. \qquad (3.7.11)$$

В силу дисперсии скорости этих волн различны, что приводит к возникновению сдвига фаз между право и лево циркулярно поляризованным светом, и при сложении этих волн после прохождения образца получаем линейно поляризованный свет с повернутой плоскостью поляризации. Угол поворота плоскости поляризации определяется из формулы аналогичной (3.7.9):

$$\varphi = \frac{\omega l}{2c}(n_- - n_+) = \frac{\pi l}{\lambda}(n_- - n_+), \qquad (3.7.12)$$

где через n_- и n_+ обозначены показатели преломления для волн с собственными частотами ω_- и ω_+. Заметим, что эффект Фарадея тесно связан с эффектом Зеемана — расщеплением уровней энергии атома в магнитном поле.

Примечание 1. *Доменик Франсуа Араго, французский ученый, 1786–1853.*
Жан Батист Био, французский физик, 1774–1862.
Мишель Эмиль Верде, французский физик, 1824–1866.

3.8. Искусственная анизотропия

3.8.1. Фотоупругость

Пьезооптический эффект — возникновение оптической анизотропии в первоначально изотропных веществах под воздействием механических напряжений. При этом среды проявляют свойства одноосных кристаллов. Исследователи: немецкий ученый Т. Зеебек (1813) и английский ученый Д. Брюстер (1816).

Этот эффект — следствие зависимости диэлектрической проницаемости от деформации и проявляется в виде двойного лучепреломления или *дихроизма* (см. § 3.7). Разность показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей пропорциональна механическому напряжению $\sigma = F/S$, вызывающему деформацию:

$$n_e - n_o = b\sigma, \tag{3.8.1}$$

где b — константа, характеризующая свойства вещества.

3.8.2. Эффект Керра

Дж. Керр (1875) исследовал связь между оптическими и электрическими явлениями и установил, что оптически изотропное вещество в электрическом поле приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, коллинеарной вектору напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Устанавливается следующее отношение между показателями преломления необыкновенного и обыкновенного лучей:

$$n_e - n_o = B\lambda E^2, \tag{3.8.2}$$

где B — постоянная Керра, λ — длина световой волны. При прохождении пути l разность оптического хода обыкновенного и необыкновенного лучей равна:

$$\Delta = B\lambda E^2 l \tag{3.8.3}$$

и разность фаз

$$\delta\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} B\lambda E^2 l = 2\pi B E^2 l\,. \tag{3.8.4}$$

Эффект Керра — проявление анизотропии у самой молекулы. Количественная теория для газов была развита Ланжевеном в 1910 г. Неполярные молекулы приобретают дипольные моменты и ориентируются в электрическом поле. Полярные молекулы просто ориентируются. Эффект зависит от концентрации молекул. Принципиальная схема наблюдения эффекта Керра изображена на рисунке 3.42.

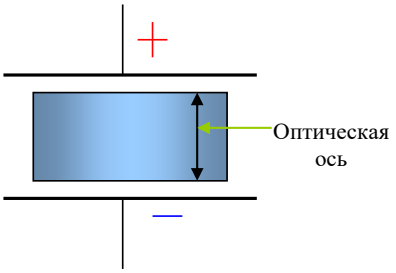


Рис. 3.42

Малая инерционность эффекта Керра (~10^{-10} с) позволяет широко использовать это явление. В частности, ячейки Керра используются как модуляторы.

3.8.3. Эффект Коттона — Мутона (1910)

Эффект Коттона — Мутона — аналог эффекта Керра в магнитном поле. Если молекулы обладают анизотропией и постоянными магнитными моментами, то в магнитном поле такие молекулы могут получить преимущественную пространственную ориентацию. Напомним, что вещества, обладающие собственными магнитными моментами, называются парамагнетиками. В достаточно сильных магнитных полях в парамагнетиках возникает анизотропия, и вследствие чего при прохождении электромагнитного излучения появляется двойное лучепреломление. В этом случае среда ведет себя как оптически одноосный кристалл. Схема эксперимента изображена на рисунке 3.43.

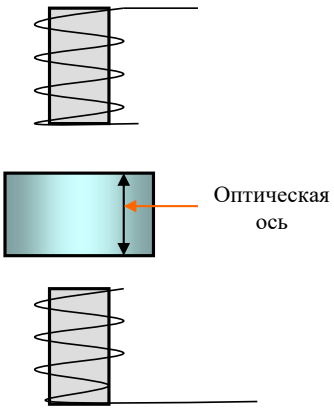


Рис. 3.43

Зависимость разности показателей преломления ($n_e - n_o$) от индукции магнитного поля B при распространении света перпендикулярно к оптической оси записывается:

$$n_e - n_o = C\lambda B^2, \qquad (3.8.5)$$

где C — постоянная, зависящая от свойств среды и ее физического состояния.

В отличие от эффекта Фарадея в эффекте Коттона — Мутона наблюдается квадратичная зависимость разности показателей преломления от величины магнитного поля.

3.8.4. Линейный электрооптический эффект Поккельса

Электрооптический эффект Поккельса (1893) — линейный электрооптический эффект, состоящий в изменении показателей преломления света в

кристаллах под действием внешнего электрического поля. В отличие от эффекта Керра электрооптический эффект Поккельса пропорционален первой степени напряженности электрического поля:

$$n_e - n_o = \alpha E. \qquad (3.8.6)$$

Следствием этого эффекта в кристаллах является двойное лучепреломление или изменение двойного лучепреломления вещества из-за смещения собственной частоты во внешнем электрическом поле. Эффект наблюдается только в кристаллах, не обладающих центром симметрии, например, в кристаллах ниобата лития и арсенида галлия. В силу безинерционности (быстродействие порядка 10^{-10} с) эффект Поккельса широко применяется при создании различных устройств управления оптическим излучением, таких как модуляторы света, дефлекторы, переключатели оптических каналов.

Примечание 1. *Томас Иоганн Зеебек, немецкий физик, 1770–1831.*
Дэвид Брюстер, шотландский физик, 1781–1868.
Джон Керр, шотландский физик, 1824–1907.
Эжени (Эме) Коттон, французский физик, 1881–1967.
Фридрих Карл Поккельс, немецкий физик, 1865–1913.

3.9. Рассеяние света

3.9.1. Природа рассеяния

Изменение какой-либо характеристики потока оптического излучения при его взаимодействии с веществом называют *рассеянием света*.

Процесс рассеяния света (электромагнитных волн, см. рис. 3.44) состоит в заимствовании молекулой или частицей энергии у распространяющейся в среде электромагнитной волны и излучении этой энергии в телесный угол, вершиной которого является рассматриваемая частица. Молекула или частица физически одинаково рассеивает свет, однако механизм этого рассеяния зависит от размеров частицы.

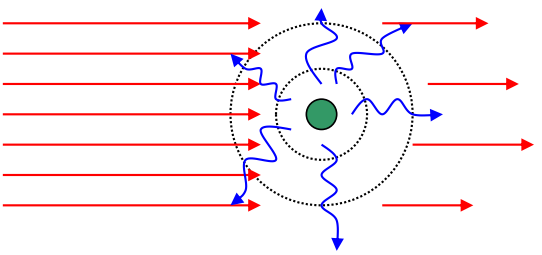


Рис. 3.44

Во многих случаях оказывается достаточным описание рассеяния света в рамках волновой теории излучения. С точки зрения этой теории электрическое поле распространяющейся в веществе световой волны раскачивает входящие в состав атомов и молекул электроны, и они становятся центрами вторичных сферических волн, излучаемых во все стороны. Поэтому распространение света в веществе должно, казалось бы, всегда

сопровождаться рассеянием. Однако в прозрачной однородной среде плоская волна распространяется только в одном направлении, не испытывая рассеяния в стороны. Такой результат сложения всех вторичных волн обусловлен их *когерентностью*.

С макроскопической точки зрения рассеяние света может быть обусловлено только *неоднородностями* среды. При слабых нарушениях однородности рассеянный в стороны свет составляет лишь малую долю первичного пучка. Параллельный пучок света в высококачественном стекле или тщательно очищенной воде почти не виден при наблюдении сбоку, т. е. свет почти не рассеивается в стороны. В то же время пучок света отчетливо виден со всех сторон, если в воде содержатся мельчайшие пузырьки воздуха или капельки другой нерастворимой жидкости, находящиеся во взвешенном состоянии. Рассеяние света происходит и тогда, когда сами частицы имеют размеры, меньшие длины волны видимого света. Такие среды называют мутными. Основные закономерности рассеяния света в мутных средах были впервые экспериментально исследованы Дж. Тиндалем в 1869 г.

В качестве примера рассмотрим легко доступный для воспроизведения опыт. В стеклянную кювету, заполненную водой, добавляют несколько капель молока. При наблюдении сбоку рассеянный свет имеет более голубой оттенок, чем свет источника; напротив, свет, прошедший сквозь кювету, имеет при достаточной её толщине красноватый оттенок.

Если среда может рассматриваться как непрерывная, то рассеяние будет происходить на её оптических неоднородностях. В этом случае диэлектрическая проницаемость среды (показатель преломления) является функцией координат $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ или $n = n(\vec{r})$. Тогда электромагнитная волна в среде будет определяться суперпозицией падающей и рассеянной волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \quad \text{и} \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}'.$$

Для сплошной среды рассеяние по своему физическому содержанию сводится к дифракции волн на неоднородностях среды.

Опыт показывает, что рассеяние света происходит не только в мутных средах, но и тщательно очищенных от посторонних примесей или включений жидкостях и газах. Рассеяние в чистом веществе, как правило, слабое, но, тем не менее, оно представляется принципиально важным явлением. Физическая причина оптической неоднородности в идеально чистых средах была указана польским физиком М. Смолуховским в 1908 г. Из-за хаотического характера теплового движения молекул в среде возникают *флуктуации плотности* и, следовательно, флуктуации показателя преломления. Такой тип рассеяния света называют *молекулярным*.

Упругое рассеяние — это рассеяние, при котором рассеянный свет характеризуется той же частотой, что и падающее излучение. Различают несколько

типов рассеяния, при этом характер рассеяния зависит от соотношения между длиной волны света λ и линейным размером частиц a.

1. *Рэлеевское рассеяние* — размеры частиц малы по сравнению с длиной волны: $a \le \lambda/15$. Рассеяние света частицами происходит когерентно. Это обычно рассеяние в мутных средах.

2. Если $a > \frac{1}{15}\lambda$ — *рассеяние Ми*. При таком рассеянии имеет значение размер частиц, поскольку разные части частиц не находятся в эквивалентных электромагнитных полях.

3. Много различных случаев рассеяния света происходит при появлении в среде оптических неоднородностей. Такие процессы часто сопровождаются изменением частоты падающего излучения. Среди них, например, важный случай рассеяния на оптических неоднородностях, которые создаются звуковой волной. Под воздействием последней возникает гармоническое распределение плотности среды и в результате наблюдается дифракция света на звуковой волне, происходящая при этом с изменением частоты дифрагированного света. Это явление Мандельштама — Бриллюэна — напоминает (и является следствием) доплеровского изменения частоты при отражении от акустической волны.

4. Специфическое рассеяние — *комбинационное рассеяние* или Рамановское рассеяние, характеризуется изменением частоты рассеянного света по сравнению с частотой падающего. Это рассеяние носит квантовый характер.

5. Можно выделить *многократное рассеяние* — рассеяние в каждом из последовательных актов осуществляется по законам однократного рассеяния. Результат рассматривается как сумма результатов однократных рассеяний с учетом статистических характеристик их следования друг за другом.

Примечание 1. *Джон Тиндаль, английский физик, 1820–1893.*
Мариан Смолуховский, польский физик, 1872–1917.
Густав Адольф Ми, немецкий физик, 1868–1957.
Леонид Исаакович Мандельштам, советский физик, 1879–1944.
Леон Бриллюэн, французский физик, 1889–1969.
Чандрасекхара Венката Раман, индийский физик, 1888–1970.

3.9.2. Элементарный рассеиватель

Элементарным рассеивателем является квазиупругий электрон в поле электромагнитной волны. В § 3.6 мы уже рассматривали его поведение и получили для смещения электрона под действием электрического поля следующую формулу (3.6.6):

$$\vec{r}(t) = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}\vec{E}(t). \qquad (3.9.1)$$

Для простоты введем следующую систему координат: плоская линейно-поляризованная волна распространяется вдоль оси x, а колебания $\vec{E}$ происходят в плоскости (x, z). Эта схема представлена на рисунке 3.45. Предполагая, что затухание мало $\gamma \approx 0$, получим тогда для отклонения электрона от положения равновесия:

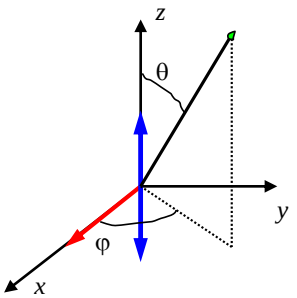


Рис. 3.45

$$z = \frac{e/m \cdot E_0 Cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \approx \frac{e/m \cdot E_0 Cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (3.9.2)$$

Электрон входит в состав атома, т. е. электрически нейтральной системы. Колебания электрона происходят относительно ядра, которое можно считать неподвижным. Следовательно, мы имеем изменяющийся во времени наведенный дипольный момент:

$$p_z(t) = ez = \frac{\frac{e^2}{m} \cdot E_0 Cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (3.9.3)$$

Колеблющийся электрон излучает. Таким образом, моделью элементарного классического рассеивателя света является элементарный электрический диполь, находящийся в поле электромагнитной волны.

Ранее в параграфе § 1.10 главы 1 рассматривали излучение, создаваемое ускоренно движущимся зарядом. Напомним, что мы получали для электрического поля излучения следующее соотношение (см. формулу (1.10.5)):

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},t) = -\frac{q\vec{a}_\perp(t')}{c^2 r}, \qquad (3.9.4)$$

где $t' = t - r/c$, $\vec{a}_\perp$ — компонента вектора ускорения на направление, перпендикулярное к радиус-вектору. Там же получили, что вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга) равен:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right] = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\left[\frac{\vec{r}}{r},\vec{E}\right]\right] = \frac{c}{4\pi}E^2\frac{\vec{r}}{r} = \frac{q^2}{c^3}\left(a_\perp(t')\right)^2\frac{\vec{r}}{4\pi r^3}. \qquad (3.9.5)$$

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$ и $\vec{H} = \vec{B} = \left[\frac{\vec{r}}{r},\vec{E}\right]$. Средняя мощность излучения, проходящая через площадку $d\vec{s}$, есть интенсивность, для которой можно получить выражение (см. (1.10.14) и рис. 1.34 в § 1.10):

$$dP(\vec{r},t) = \left(\vec{S},d\vec{s}\right) = \frac{q^2}{c^3}a^2(t')sin^2\,\vartheta(t')\frac{ds}{4\pi r^2}. \qquad (3.9.6)$$

Поскольку для электрического диполя имеем стандартное выражение $p(t') = qz(t')$, при этом $z(t') = z_0 Cos\omega t'$ и $a(t') = \ddot{z} = -\omega^2 z(t')$, то тогда получаем мощность, излучаемую в телесный угол $d\Omega = ds/r^2$:

$$dP = \frac{\omega^4 Sin^2 \vartheta(t')}{4\pi c^3} p^2(t') d\Omega . \qquad (3.9.7)$$

Воспользуемся (3.9.3) и усредним квадрат дипольного момента по периоду:

$$\left\langle p^2(t) \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2 E_0^2 . \qquad (3.9.8)$$

Определим интенсивность рассеяния $I(\vartheta, \varphi)$ как поток энергии, отнесенной к телесному углу $d\Omega$:

$$I(\vartheta,\varphi) \equiv \frac{dP}{d\Omega} = \frac{2\pi^3 c Sin^2 \vartheta}{\lambda^4}\left[\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 E_0^2 . \qquad (3.9.9)$$

Здесь мы воспользовались $\omega = 2\pi c/\lambda$.

Если ввести среднее значение плотности потока падающей волны:

$$\left\langle \left| \vec{S}_0 \right| \right\rangle \equiv \langle S_0 \rangle = \frac{c}{8\pi} \left\langle E^2 \right\rangle . \qquad (3.9.10)$$

то интенсивность рассеянного света записывается:

$$I(\vartheta,\varphi) = \frac{16\pi^4 Sin^2 \vartheta}{\lambda^4}\left[\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 \langle S_0 \rangle = \frac{\omega^4 Sin^2 \vartheta}{c^4}\left[\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 \langle S_0 \rangle . \qquad (3.9.11)$$

Полученное выражение (3.9.11) определяет плотность потока рассеянной энергии в единицу телесного угла от одного элементарного излучателя.

3.9.3. Рэлеевское рассеяние

Рассмотрим рассеивающую частицу малой по сравнению с длиной волны: $a < 0.03\lambda$. Пусть в частице N_0 рассеивателей, все они излучают когерентно, тогда интенсивность излучения от одной частицы равна

$$I_1 = N_0^2 I(\vartheta,\varphi) . \qquad (3.9.12)$$

Если в среде N частиц в единице объема (здесь N — концентрация), они рассеивают некогерентно, тогда интенсивность рассеяния в единице объема

$$I_{V=1} = N N_0^2 I(\vartheta,\varphi) . \qquad (3.9.13)$$

Воспользуемся (3.6.15) и (3.6.10) из параграфа о дисперсии и выразим дисперсионный множитель через показатель преломления:

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi N N_0 e^2}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \qquad (3.9.14)$$

Здесь NN_0 — полное число рассеивателей в единице объема. Тогда интенсивность рассеяния на одну частицу равна:

$$I_1 = \frac{\pi^2 Sin^2 \vartheta}{N^2 \lambda^4}\left(n^2 - 1\right)^2 \langle S_0 \rangle. \qquad (3.9.15)$$

Для изотропных сред (неполярные диэлектрики, газы, кубические кристаллы и другие) более точной является формула Лоренц — Лоренца, которая связывает показатель преломления с электронной поляризуемостью составляющих его частиц (см. также § 2.8, гл. 2 [3]):

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3}\frac{N \cdot N_0 e^2}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \qquad (3.9.16)$$

Тогда для интенсивности рассеяния имеем:

$$I_1(\vartheta, \varphi) = \frac{9\pi^2 Sin^2 \vartheta}{N^2 \lambda^4}\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right)^2 \langle S_0 \rangle. \qquad (3.9.17)$$

Полная интенсивность (во все стороны) определяется из интегрирования по телесному углу:

$$I_{1,tot} = \int I_1(\vartheta, \varphi) d\Omega = \frac{24\pi^3}{N^2 \lambda^4}\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right)^2 \langle S_0 \rangle. \qquad (3.9.18)$$

В результате получили известный закон Рэлея, что интенсивность рассеяния света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны:

$$I_{1,tot} \sim 1/\lambda^4.$$

Можно привести наглядный пример, характеризующий зависимость интенсивности рассеяния от длины волны: цвет неба днем голубой, поскольку в атмосфере Земли в приходящем от Солнца белом свете сильнее рассеивается синий свет как свет с меньшей длиной волны. Однако вечером диск солнца приобретает красноватый оттенок, поскольку у горизонта толщина слоя воздуха увеличивается, а синий свет сильнее поглощается, увеличивая концентрацию света с более длинными волнами.

3.9.4. Угловое распределение рассеянного света

Угловое распределение рассеянного света от отдельной молекулы или малой частицы определяется формулами (3.9.11), (3.9.15), (3.9.17). Они опреде-

ляют важную характеристику рассеяния света — *индикатрису рассеяния*, которая дает графическое изображение зависимости интенсивности рассеянного света $I(\vartheta)$ от угла рассеяния ϑ.

А. Пусть падает поляризованная волна и пусть, как и ранее, вектор $\vec{k}$ направлен вдоль оси x, а вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси z. На рисунке 3.46 показана индикатриса рассеяния. Видно, что максимальное рассеяние наблюдается в плоскости, перпендикулярной направлению колебаний вектора $\vec{E}$ падающей волны.

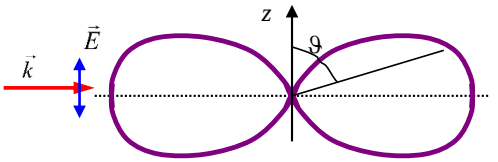


Рис. 3.46

Б. Если падает неполяризованный свет, то электрический вектор можно разложить на два взаимно перпендикулярных вектора:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

вдоль оси z и оси y, соответственно (рис. 3.47). При этом получаем плотность потока энергии падающей волны как сумму потоков, так как рассеяние неполяризованного света должно быть аксиально симметрично относительно направления луча:

$$\langle S_0 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle . \qquad (3.9.19)$$

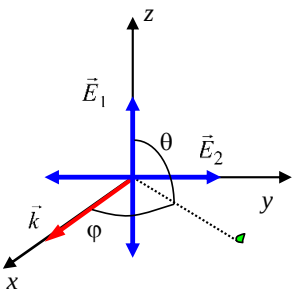


Рис. 3.47

Найдем интенсивность в плоскости (xy) и полученное распределение можно «вращать» относительно оси x (в силу симметрии), чтобы получить пространственное распределение. Поскольку мы рассматриваем в плоскости (xy), то для вектора $\vec{E}_1$ угол $\vartheta = \pi/2$, а для вектора $\vec{E}_2$ в качестве оси z служит ось y и, следовательно, угол $\vartheta \to (\pi/2 - \varphi)$. Тогда

$$I = \frac{9\pi^2}{N^2\lambda^4}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2\left(\langle S_1\rangle Sin^2\frac{\pi}{2} + \langle S_2\rangle Cos^2\varphi\right). \qquad (3.9.20)$$

Для падающего естественного света имеем $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle = \frac{1}{2}\langle S_0 \rangle$, поэтому для углового распределения неполяризованного света в плоскости, проходящей через направление первичного пучка, получаем следующее соотношение — индикатрису (см. также изображение углового распределения на рис. 3.48):

$$I(\varphi) = \frac{9\pi^2}{2N^2\lambda^4}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2\left(1 + Cos^2\varphi\right)\langle S_0 \rangle . \qquad (3.9.21)$$

Для естественного падающего света индикатриса рассеяния симметрична относительного оси первичного пучка и относительно перпендикулярной ему плоскости.

Можно подсчитать степень поляризации рассеянного света под разными углами. Проведем плоскость наблюдения через падающий луч и точку наблюдения. Тогда запишем

$$P = \frac{I_{\perp}(\varphi) - I_{||}(\varphi)}{I_{\perp}(\varphi) + I_{||}(\varphi)} = \frac{Sin^2\varphi}{1 + Cos^2\varphi}, \qquad (3.9.22)$$

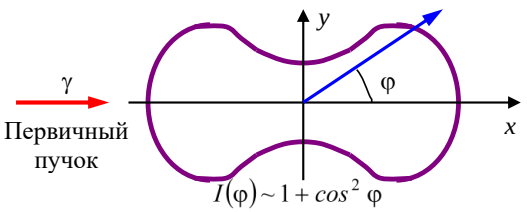


Рис. 3.48

где $I_{\perp}(\varphi)$ — интенсивность рассеянного света с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости наблюдения, а $I_{||}(\varphi)$ — интенсивность рассеянного света с электрическим вектором, лежащим в плоскости наблюдения. Лишь при углах $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ получаем полностью неполяризованный свет. При угле $\varphi = \pi/2$ степень поляризации $P = 1$ — свет линейно поляризован.

Пример: солнечный свет, рассеянный атмосферой в плоскости Земля-Солнце, поляризован перпендикулярно к ней.

3.9.5. Томсоновское поперечное сечение для электрона

Томсоновское рассеяние рассматривается как частный случай рэлеевского рассеяния. Рассматривается свободный электрон (без ядра), у которого собственная частота колебаний равна нулю: $\omega_0 = 0$. Тогда уравнение колебаний электрона принимает простой вид:

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} E_0 Cos\omega t\,. \qquad (3.9.23)$$

При этом выражение для интенсивности или мощности рассеяния (3.9.11) также упрощается:

$$I(\vartheta,\varphi) = \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4 Sin^2\vartheta}{c^4}\left[\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right]^2 \langle S_0 \rangle = \frac{e^4}{m^2c^4} Sin^2\vartheta \langle S_0 \rangle\,. \qquad (3.9.24)$$

Интегрируя по всем углам рассеяния, получаем полную мощность рассеяния:

$$P = \int dP = \frac{e^4}{m^2c^4}\langle S_0 \rangle \int Sin^2\vartheta d\Omega = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}\langle S_0 \rangle\,. \qquad (3.9.25)$$

Полное поперечное сечение рассеяния электромагнитных волн на электроне определяется как отношение рассеянной интенсивности к падающей плотности потока:

$$\sigma = \frac{P}{\langle S_0 \rangle} = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4} = 0.665 \cdot 10^{-24}\,см = 0.665\,барн\,. \qquad (3.9.26)$$

Видно, что полное сечение рассеяния света на электроне определяется фундаментальными постоянными. Обычно это сечение записывают в следующем в виде:

$$\sigma = \frac{8}{3}\pi r_e^2\,, \qquad (3.9.27)$$

где r_e — *классический* или *Томсоновский радиус электрона*:

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2.818 \cdot 10^{-13}\,см\,. \qquad (3.9.28)$$

Отметим, что сечение Томсоновского рассеяния не зависит от частоты падающего излучения и симметрично относительно поперечной плоскости, что справедливо при классическом рассмотрении процесса рассеяния, когда $\hbar\omega \ll mc^2$.

Примечание 2. *Джозеф Джон Томсон, английский физик, 1856–1940,* Нобелевская премия 1906 г. за открытие электрона.

3.9.6. Рассеяние Ми

Рассеяние Рэлея хорошо описывает не только рассеяние на молекулах. Но и на достаточно малых частицах, размеры которых $a < 0.03\lambda$. Если размеры рассеивающих частиц становятся сравнимыми с длиной волны, зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны становится менее заметной. Преобладающим становится рассеяние вперед, и индикатриса сохраняет симметрию лишь относительно направления первичного пучка. Теория рассеяния света на сферических частицах, размеры которых могут быть порядка или больше длины волны, была впервые разработана Г. Ми в 1908 г. Рассеяние Ми можно рассматривать как дифракцию плоской волны на однородных одинаковых сферах, хаотически распределенных в однородной среде и находящихся друг от друга на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны.

Математическое решение задачи Ми — решение системы уравнений Максвелла с граничными условиями на поверхности сферической частицы произвольного радиуса, характеризуемой ε, μ и σ. Решение находится в виде рядов, в которых малым параметром служит $\alpha = ka = 2\pi a/\lambda$, где a — радиус сферической частицы. При параметре $\alpha < 0{,}2$ рассеяние становится *рэлеевским*.

В чем состоит отличие рассеяния Ми от рэлеевского рассеяния?

1. При рассеянии Ми необходимо учитывать влияние переизлучения первичной волны элементарными рассеивателями частицы, которые, вообще говоря, находятся не в одинаковых электромагнитных полях. То есть коэффициенты преломления n в объеме частицы $n \neq 1$. Это необходимо учитывать при решении уравнений Максвелла.

2. В рассеянии Рэлея излучение элементарных рассеивателей одной и той же частицы (молекулы) интерферируют при одинаковой разности фаз независимо от направления. Для рассеяния Ми необходимо учитывать различие в фазах излучения элементарных рассеивателей и разность фаз, вносимую в наблюдаемое излучение конечным расстоянием между элементарными рассеивателями. Отсюда получаем существенную зависимость интенсивности от направления излучения.

Основные результаты состоят в следующем:

1) с ростом параметра a/λ появляется асимметрия рассеяния вперед и назад — превалирует рассеяние вперед. При размерах рассеивателя $a \approx \lambda/4$ индикатрисса примерно выглядит как она изображена на рисунке 3.49 — появляется асимметрия вперед-назад. С ростом размеров рассеивателя a появляется много вторичных максимумов в угловом распределении интенсивности рассеяния (рис. 3.50);

2) слабая зависимость Ми рассеяния от длины волны при размерах частиц $a >> \lambda$.

3) наблюдается частичная поляризация рассеянного света;

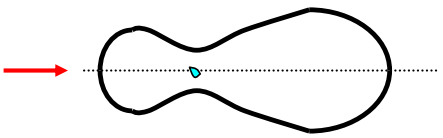


Рис. 3.49

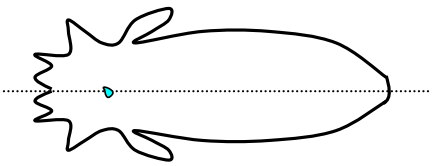


Рис. 3.50

4) если частицы сложные (с разными диэлектрическими проницаемостями по объему), то появляется резкая зависимость от длины волны и условия появления максимумов различны при разных длинах волн, отсюда разные цвета лучей.

Приведем ряд примеров проявления рассеяния Ми:

(1) облака белые за счет рассеяния Ми;

(2) небо голубое в зените и сереет к горизонту;

(3) ослабление света от солнца при заходе и восходе у горизонта.

Примечание 3. *Рассеяние света большими частицами.* Рассеяние света большими частицами ($r >> \lambda$) рассматривают на основе законов геометрической оптики с учетом интерференции лучей, отраженных и преломленных на поверхностях частиц. Важной особенностью этого случая является периодический по углу характер индикатрисы рассеяния и периодическая зависимость сечения рассеяния от параметра r/λ. Рассеяние света на крупных частицах обусловливает ореолы, гало и другие явления, наблюдаемые в аэрозолях, туманах и т. д.

Примечание 4. *Рассеяние света средами.* Рассеяние света средами, состоящими из большого числа частиц, существенно отличается от рассеяния света отдельными частицами. Это связано, во-первых, с интерференцией волн, рассеянных отдельными частицами между собой и с падающей волной; во-вторых, во многих случаях важны эффекты многократного рассеяния (переизлучения), когда свет, рассеянный одной частицей, вновь рассеивается другими; в-третьих, взаимодействие частиц между собой не позволяет считать их движения независимыми.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1
Энергия и поток энергии электромагнитного поля

Другой вариант рассмотрения пункта 1.2.1 (более частное рассмотрение).

Если принять, что энергия электромагнитного поля может быть локализована в пространстве, то её объемная плотность в произвольном месте поля определяется выражением

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}\right) = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right).$$

Рассмотрим теперь изменение во времени энергии поля W, заключенной в объеме V, ограниченном неподвижной поверхностью s.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{8\pi}\int_V \left(\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}\right)dV\right\} = \int_V \frac{\partial w}{\partial t}dV .$$

Если характеристики среды ε и μ не меняются со временем, то

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right).$$

Подставляя сюда из уравнений Максвелла $\partial\vec{D}/\partial t = c\cdot rot\vec{H} - 4\pi\vec{j}$ и $\partial\vec{B}/\partial t = -c\cdot rot\vec{E}$, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j}\vec{E} + \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}rot\vec{H} - \vec{H}rot\vec{E}\right),$$

или в силу векторного тождества $\vec{E}rot\vec{H} - \vec{H}rot\vec{E} = -div\left[\vec{E},\vec{H}\right]$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j}\vec{E} - \frac{c}{4\pi}div\left[\vec{E},\vec{H}\right].$$

Пусть среда неподвижна, и мы пренебрегаем теплом, уходящим из среды вследствие теплопроводности (положив последнюю равной нулю). Тогда изменение внутренней энергии u единицы объема среды происходит за счет изменения энергии электромагнитного поля и работы, совершаемой электрическим полем $\vec{E}$ над токами проводимости $\vec{j}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{j}\vec{E} .$$

Введем обозначение $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div\vec{S} = 0 .$$

Для понимания физической смысла этого уравнения сравним его с уравнением непрерывности — законом сохранения заряда $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$. Использование формальной аналогии позволяет сделать вывод, что энергия течет в пространстве подобно некоторой жидкости, причем вектор $\vec{S}$ приобретает смысл *плотности потока электромагнитной энергии*. В интегральной форме это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \oint \vec{S}d\vec{s} = 0 ,$$

где U — внутренняя энергия объема, ограниченного поверхностью s (рис. П.1). В такой форме уравнение означает, что приращение внутренней энергии U в объеме V происходит за счет электромагнитной энергии, «втекающей» в этот объем из окружающего пространства через поверхность s.

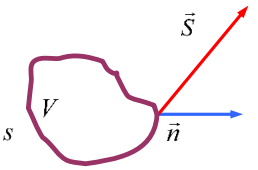


Рис. П.1

Представление о течении энергии сохраняется также при учете теплопроводности, но к плотности потока электромагнитной энергии в этом случае следует добавить *плотность потока тепла*. Таким образом, уравнение $\partial u/\partial t + div\vec{S} = 0$ выражает *закон сохранения энергии в электродинамике* и носит название *теоремы Умова — Пойнтинга*.

Приложение 2
О временной когерентности

Пусть спектральный интервал шириной $\delta\omega$ равномерно заполнен отдельными монохроматическими компонентами излучаемых волн. Мысленно разделим этот интервал на множество пар бесконечно узких (монохроматических) спектральных линий, отстоящих друг от друга по частоте на величину $\delta\omega/2$, или по шкале ($k = \omega/c$) волновых чисел на $\delta k/2$. Будем считать, что спектральные линии имеют одинаковую интенсивность. Тогда полная интенсивность при наложении интерференционных картин от каждой пары монохроматических компонент, отстоящих на $\delta k/2$, определяется выражением (исходя из соотношения (2.1.17)):

$$I(\Delta) = I_1(\Delta) + I_2(\Delta) = 2I_0(1 + cos\,k_1\Delta) + 2I_0(1 + cos\,k_2\Delta) = 4I_0\left[1 + cos\left(\frac{\delta k}{2}\frac{\Delta}{2}\right)cos\,k\Delta\right],$$

где $k = (k_1 + k_2)/2$ — среднее значение волнового числа; $\delta k/2$ — разность волновых чисел спектральных линий. Полосы в такой картине пропадают при такой оптической разности хода $\Delta_{max} = l_{ког}$, когда аргумент первого косинуса становится равным $\pi/2$:

$$\frac{\delta k}{2}\frac{l_{ког}}{2} = \frac{\pi}{2},$$

т. е. получаем длину когерентности:

$$l_{ког} = \frac{2\pi}{\delta k} = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda}.$$

Условие исчезновения полос для всех пар монохроматических компонент, на которые был разделен интервал $\delta\omega$, одинаково. Поэтому при разности хода $\Delta = l_{ког}$ происходит полное размывание суммарной интерференционной картины. Время когерентности определяется:

$$\tau_{ког} = \frac{l_{ког}}{c} = \frac{\lambda^2}{c\delta\lambda}.$$

Длине когерентности соответствует максимально возможный (предельный наблюдаемый) порядок интерференции (см. (2.1.19)), равный

$$m_{max} = \frac{l_{ког}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\omega}{\delta\omega}.$$

Полученный результат (2.2.6) можно использовать для оценки длины когерентности и в случае более сложной формы контура спектральной линии квазимонохроматического света.

Таким образом, для наблюдения интерференции волн необходимо, чтобы выполнялось условие $\Delta < l$, где $l = c\tau$ — протяженность волнового цуга в пространстве, τ — длительность волнового цуга, т. е. разность хода складываемых волн должна быть меньше длины цуга, поэтому длина когерентности — это и есть длина волнового цуга.

Для белого света (солнце, лампа накаливания и т. д.) и его визуального наблюдения диапазон длин волн $\delta\lambda$ простирается приблизительно от 400 до 700 нм, $\delta\lambda$ порядка λ. В этом случае $m \sim 1$ и интерференционные полосы, казалось бы, наблюдаться не должны. Действительно, приемник излучения, обладающий примерно одинаковой чувствительностью на всех участках спектра, например, термоэлемент, покажет при перемещении в поле зрения поперек полос почти равномерное распределение освещенности. Но глаз представляет собой селективный приемник с сильно изменяющейся чувствительностью в зависимости от длины волны, что дает некоторым длинам волн преимущество перед другими. Визуальное наблюдение полос в белом свете облегчается и благодаря способности нашего зрения различать не только интенсивность света, но и его цвет. Поэтому в белом свете глаз различает около десятка окрашенных интерференционных полос. При равной нулю разности хода, т. е. в тех местах, куда обе интерферирующие волны приходят в одинаковых фазах, условие максимума выполняется для всех длин волн. В этом месте получается ахроматическая (неокрашенная) светлая полоса. По обе стороны от нее находятся окрашенные максимумы и минимумы, а за ними поле зрения представляется глазу равномерно освещенным белым светом. Таково происхождение красивых интерференционных цветов в тонких пленках масла или бензина на поверхности воды.

Приложение 3
О пространственной когерентности

Рассмотрим сначала источник, состоящий из двух одинаковых некогерентных светящихся точек S' и S'', расположенных на расстоянии D друг от друга. Пусть в интерференционном опыте свет от каждого из этих источников попадает в точку наблюдения, проходя по двум различным путям. Например, в опыте Юнга эти лучи идут в направлении отверстий S_1 и S_2, являющихся вторичными источниками. Пусть луч, идущий от источника S' по пути I, образует с соединяющей источники линией $S'S''$ угол β_1, а луч, идущий по пути II — угол β_2. Если расстояние между источниками S' и S'' мало ($D << L$, где L — расстояние до точечных отверстий S_1 и S_2), то можно считать, что световые колебания, распространяющиеся от источника S'', образуют с линией $S'S''$ такие же углы β_1 и β_2. Оптическая разность хода лучей, приходящих в точку наблюдения P от источников S' и S'' по первому пути, равна $S''(I) - S'(I) = D\cos\beta_1$. Аналогичное выражение можно написать для лучей, приходящих в точку наблюдения P по второму пути: $S''(II) - S'(II) = D\cos\beta_2$. Вычитая эти равенства и перегруппировывая слагаемые в левой части, получаем

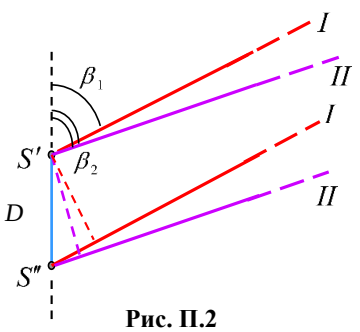


Рис. П.2

$$[S''(I)-S''(II)]-[S'(I)-S'(II)]=D(cos\beta_1-cos\beta_2).$$

В этом выражении в первой скобке записана разность хода колебаний Δ'', приходящих по двум различным путям в точку наблюдения от источника S''. Именно значение Δ'' определяет качество интерференционной картины, создаваемой в точке наблюдения P источником S''. Во второй скобке стоит разность хода Δ' лучей, приходящих в точку наблюдения от источника S'. Разность этих величин определяет сдвиг интерференционных картин, создаваемых источниками S' и S'':

$$\Delta''-\Delta'=D(cos\beta_1-cos\beta_2).$$

Если $\Delta''-\Delta'=0$ (или $|\Delta''-\Delta'|<<\lambda$), максимумы обеих картин совпадают, что обеспечивает максимальную контрастность наблюдаемой (суммарной) интерференционной картины. С увеличением $|\Delta''-\Delta'|$ качество картины ухудшается, и при

$$|\Delta''-\Delta'|=\lambda/2, \quad \text{или} \quad D|cos\beta_1-cos\beta_2|=\lambda/2.$$

наблюдается равномерная освещенность экрана, так как светлые полосы, получаемые от одного источника, совмещаются с темными полосами от другого. При дальнейшем возрастании $|\Delta''-\Delta'|$ интерференционная картина появляется вновь, причем её качество периодически изменяется. Когда выполняется условие $|\Delta''-\Delta'|=m\lambda$ ($m=1,2,...$) картина будет максимально контрастной.

В результате сложения интерференционных картин, создаваемых колебаниями, приходящими от одного источника, получаем

$$I=2I_0(1+\cos k\Delta')+2I_0(1+\cos k\Delta'')=4I_0\left[1+\cos\left(k\frac{\Delta''-\Delta'}{2}\right)\cos\left(k\frac{\Delta''+\Delta'}{2}\right)\right].$$

Интенсивность в максимумах и минимумах определяется первым сомножителем и равна

$$I_{экстр}=4I_0\left[1\pm\cos\left(k\frac{\Delta''-\Delta'}{2}\right)\right].$$

Изменение интенсивности при перемещении точки наблюдения P вдоль экрана определяется быстро осциллирующим вторым сомножителем. Светлые и темные полосы интерференционной картины расположены в тех местах, где $\cos\left(k\frac{\Delta''+\Delta'}{2}\right)=\pm1$.

Рассматривая более общий случай, можно представить протяженный источник (полоска или щель шириной D) состоящим из элементарных взаимно некогерентно излучающих полосок, расположенных перпендикулярно линии, соединяющей точки S' и S''. Разделим мысленно весь источник на множество пар одинаковых элементов так, чтобы расстояние между элементами в любой паре было равно половине ширины полоски (источника), т. е. $D/2$. Если положение светлых полос от одного элемента пары совпадает с положением темных полос от другого элемента той же пары, то интерференционная картина от всего источника наблюдаться не будет, так как условия совпадения одинаковы для всех пар элементов. Это условие получаем из (2.2.10), заменив D на $D/2$ — расстояние между элементами одной пары протяженного источника, т. е.

$$D|cos\beta_1-cos\beta_2|=\lambda.$$

Последующие исчезновения интерференционных полос произойдут, если ширину источника увеличить в любое целое число раз.

При промежуточных значениях ширины источника на равномерном светлом фоне, создаваемом участком щели, на ширине которого укладывается целое число значений D, будут снова появляться интерференционные полосы от оставшейся меньшей части источника.

По этой причине полосы будут видны слабо. В качестве условия хорошего наблюдения интерференционной картины от протяженного источника можно принять неравенство

$$D\left|cos\beta_1 - cos\beta_2\right| \le \lambda/2 .$$

Для источника, размеры которого много больше длины световой волны, геометрия эксперимента должна быть такой, чтобы интерферирующие лучи выходили из источника под малым углом друг другу. Тогда имеем

$$\beta_2 \approx \beta_1 = \beta \approx \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad cos\beta_1 - cos\beta_2 \approx sin\beta(\beta_2 - \beta_1) \approx \beta_2 - \beta_1 = \delta\beta .$$

Условие (2.2.13) можно теперь записать в виде

$$D \cdot \delta\beta \le \lambda/2 .$$

В опыте Юнга $\delta\beta \approx d/L$, поэтому *поперечный* D и *угловой* $\vartheta = D/L$ *размеры источника* должны удовлетворять условиям: $D \le \lambda L/2d$ и $\vartheta \le \lambda/2d$.

Свяжем наложение интерференционных картин, создаваемых отдельными элементами протяженного источника, с понятием *пространственной когерентности колебаний* в пучке света от протяженного источника. Для определенности обратимся опять к схеме опыта Юнга. Пусть теперь экран *A* с отверстием *S* отсутствует, а пучок света падает непосредственно на экран *B* с точечными отверстиями S_1 и S_2. Эти отверстия можно принять за вторичные источники, посылающие световые волны на экран *C*, где наблюдается интерференционная картина.

Если первичный источник точечный, то колебания в отверстиях S_1 и S_2 когерентны и на экране наблюдается контрастная интерференционная картина. Для протяженного источника качество картины будет ухудшаться. При заданном расстоянии *d* между отверстиями S_1 и S_2 контрастность картины зависит от отношения поперечного размера источника *D* к расстоянию *L* между источником и экраном *B*, т. е. от *углового размера источника* $\vartheta = D/L$. Если $\vartheta \le \lambda/2d$, то полосы видны отчетливо. С увеличением углового размера источника контрастность полос уменьшается, и при $\vartheta = \lambda/d$ полосы пропадают совсем. Поэтому *пространственную когерентность* можно понимать как характеристику способности световых колебаний в пространственно удаленных точках S_1 и S_2 поперечного сечения светового пучка к созданию стационарной интерференционной картины при их сведении каким-либо образом в точку наблюдения.

Колебания, приходящие от точечного источника, в точках S_1 и S_2 полностью когерентны, и контрастность интерференционной картины максимальна. Контрастность интерференционной картины, создаваемой колебаниями, приходящими от протяженного источника, зависит от расстояния *d* между точками S_1 и S_2 и углового размера источника ϑ. При $\vartheta \cdot d \ge \lambda$ колебания в точках S_1 и S_2 *некогерентны* и при наложении волн, приходящих из этих точек, наблюдается простое сложение интенсивностей, т. е. интерференция отсутствует.

Пока расстояние *d* между точками S_1 и S_2 мало ($d << \lambda/\vartheta$) колебания в этих точках когерентны. При возрастании *d* качество интерференционной картины ухудшается, и картина полностью исчезает при $d = \lambda/\vartheta$. С дальнейшим ростом *d* контрастность интерференционных полос осциллирует с постепенно убывающей амплитудой, не превышая 20% от максимального значения. Поэтому в качестве размера области когерентности (т. е. поперечного сечения пучка, в пределах которого световые колебания в любой паре точек частично когерентны) можно принять $d_{ког} \approx \lambda/\vartheta$. Поскольку $\vartheta = D/L$, то размер области когерентности возрастает пропорционально расстоянию *L* от источника.

Если источник имеет равномерно светящуюся поверхность в форме прямоугольника, то размеры области когерентности обратно пропорциональны соответствующим сторонам

источника: $d_1 = \lambda/\vartheta_1$, $d_2 = \lambda/\vartheta_2$. В практически важном случае источника в форме равномерно светящегося диска с угловым размером (диаметром) ϑ область когерентности представляет собой круг диаметром $d \approx 1{,}22\lambda/\vartheta$.

Солнечный диск виден с Земли под углом $\vartheta \approx 30' \approx 10^{-2}$ рад. Пренебрегая изменением яркости его поверхности, получаем диаметр области когерентности $d \approx 0{,}06$ мм (для $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ см). Если щели в опыте Юнга расположить на расстоянии, меньшем 0,06 мм, то интерференцию можно наблюдать без вспомогательного экрана *A* при непосредственном освещении щелей S_1 и S_2 лучами Солнца.

Подход к описанию качества интерференционной картины, основанный на понятии пространственной когерентности, отличается от разобранного выше тем, на каком этапе производится суммирование действий различных участков источника. В первом подходе это суммирование производилось на последнем этапе, т. е. в интерференционной картине, а во втором — на промежуточном этапе, т. е. в той плоскости, где расположены отверстия S_1 и S_2.

Для получения интерференционных полос от двух источников (пятен) света недостаточно, чтобы эти источники состояли из попарно когерентных точечных источников. Даже в случае строго монохроматического света необходимо, размеры источников не превосходили определенного предела, зависящего от их взаимного расположения и расстояния между ними, а также от положения экрана.

Два источника, размеры и взаимное расположение которых позволяют наблюдать интерференционные полосы, называют *пространственно когерентными*.

Заключая сказанное о *временной и пространственной когерентности* источников, отметим следующее. Поскольку $k = \omega/c$ (в среде с показателем преломления n: $k = \omega/v = n\omega/c$), то частотному интервалу $\delta\omega$ соответствует интервал значений волнового числа k. Мы установили, что временная когерентность определяется величиной $\delta\omega$. Следовательно, временную когерентность можно связать с разбросом значений модуля волнового вектора $\vec{k}$. Аналогично, пространственная когерентность связана с разбросом направлений вектора $\vec{k}$.

Вадим Константинович ИВАНОВ

ФИЗИКА.
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Учебное пособие

Зав. редакцией физико-математической
литературы *О. Е. Гайнутдинова*
Ответственный редактор *Н. С. Захарова*
Корректор *Е. А. Дмитриева*
Выпускающий *Е. С. Шумская*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028 от 14.04.2016 г.,
выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр-кт Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги,
достаточно обратиться в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 196105, Санкт-Петербург, пр-кт Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru

www.lanbook.com пункт меню «Где купить»
раздел «Прайс-листы, каталоги»

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 115432, Москва, пр-кт Андропова, д. 10
(БЦ Технопарк Плаза), этаж 6, оф. 6.006
тел.: (499) 350-62-10, (495) 252-79-20; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ». 350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазин
Издательство «Лань»: http://www.lanbook.com

магазин электронных книг
Global F5: http://globalf5.com/

Подписано в печать 28.11.24.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 1/16.
Печать офсетная/цифровая. Усл. п. л. 16,58. Тираж 30 экз.

Заказ № 1311-24.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр-кт, д. 42, к. 5.