Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Храмешин Сергей Николаевич
Должность: Научный руководитель
Дата подписания: 19.08.2025 14:47:23
Уникальный программный ключ:
9e604e7f43158d9188ee2ea08e15bab0641b06c9

В. К. ИВАНОВ

ФИЗИКА

МЕХАНИКА

Учебное пособие

ЛАНЬ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2025

УДК 531
ББК 22.2я73

И 20 **Иванов В. К.** Физика. Механика : учебное пособие для вузов / В. К. Иванов. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 244 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-507-51464-9

Учебное пособие содержит лекции по физике для студентов первого курса физических направлений подготовки. Последовательность изложения механики соответствует логической структуре физики как науки. В первую часть курса входят разделы, посвященные законам и явлениям механики, как нерелятивистской, так и релятивистской, в инерциальных системах отсчета. Рассматривается также движение в неинерциальных системах отсчета и колебательное движение. В основу разделов положены законы сохранения и соответствующие им свойства симметрии пространства-времени. При создании учебного пособия использован многолетний опыт чтения общего курса физики на физических факультетах и институтах Санкт-Петербургского политехнического университета.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению бакалавриата «Физика» и «Техническая физика». Пособие может быть также использовано будущими бакалаврами, обучающимися по другим физическим направлениям, начинающими преподавателями, в системах повышения квалификации, в качестве дополнительного учебного пособия для общетехнических образовательных программ.

УДК 531
ББК 22.2я73

Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА

© Издательство «Лань», 2025
© В. К. Иванов, 2025
© Издательство «Лань», художественное оформление, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вводная лекция «Общая физическая картина мира» (конспективно)..... 8
1. Общие слова о физике 8
1.1. Физика 8
1.2. Основные законы (или основные принципы) 8
1.3. Метод познания в физике 9
2. Фундаментальные взаимодействия 9
3. Кратко об общей картине мира 14
3.1. Предельные размеры и времена жизни изучаемых объектов 14
3.2. Макрофизика 15
3.3. Микрофизика 16
3.4. Проблемы в современной физике 17
Глава 1. Классическая механика. Инерциальные системы отсчета 18
1.1. Введение 18
1.1.1. О механике. Границы применимости классической механики 18
1.1.2. Системы координат. Система отсчета 19
1.1.3. Основные кинематические характеристики движения 23
1.1.4. Системы единиц 25
1.2. Инерциальные системы отсчета и законы Ньютона 26
1.2.1. Инерциальные системы отсчета (ИСО) 26
1.2.2. Законы Ньютона 26
1.2.3. Реализация ИСО 27
1.3. Преобразования Галилея 29
1.3.1. Принцип относительности Галилея 29
1.3.2. Инварианты и инвариантность законов Ньютона 30
1.3.3. Уравнение движения тела с переменной массой 31
1.4. Закон сохранения импульса. Сохранение массы. 33
1.4.1. Импульс (количество движения) 33
1.4.2. Столкновение двух частиц 34
1.4.3. Сохранение массы в процессах столкновения 34
1.5. Центр инерции 36
1.5.1. Центр инерции системы частиц 36
1.5.2. Система центра инерции 38
1.6. Основные задачи динамики 39
1.6.1. Основное уравнение динамики 39
1.6.2. Основные задачи динамики 40
1.7. Работа и энергия 42
1.7.1. Работа силового поля. Мощность 42
1.7.2. Кинетическая энергия 45
1.8. Консервативные и неконсервативные силы 47
1.8.1. Определение консервативных сил 47
1.8.2. Поле центральных сил 49

1.8.3. Неконсервативные силы 50
1.9. Потенциальная энергия. Потенциал поля 51
1.9.1. Понятие потенциальной энергии 51
1.9.2. Примеры потенциальных энергий 53
1.9.3. Связь между силой и потенциальной энергией (градиент) 55
1.9.4. Поле и потенциал поля 58
1.10. Закон сохранения энергии. Границы движения 59
1.10.1. Полная механическая энергия в потенциальном поле 59
1.10.2. Система с диссипативными силами 60
1.10.3. Границы движения 60
1.10.4. Излучение квантов. Эффект Мессбауэра 63
1.11. Момент импульса и момент силы 65
1.11.1. Линейное и вращательное движения 65
1.11.2. Уравнение моментов 67
1.11.3. Момент импульса и момент силы относительно оси 68
1.12. Закон сохранения момента импульса 70
1.12.1. Момент импульса системы точек 70
1.12.2. Закон сохранения МИ для замкнутых систем 71
1.13. Движение частицы в центральном поле 73
1.13.1. Сохранение момента импульса в центральном поле 73
1.13.2. Закон сохранения энергии 75
1.13.3. О траектории частицы 76
1.14. Столкновение двух тел 80
1.14.1. Приведенная масса 80
1.14.2. Неупругие столкновения 82
1.14.3. Упругие столкновения 84
1.15. Рассеяние частиц. Эффективное сечение 86
1.15.1. Рассеяние на силовом центре 86
1.15.2. Эффективное сечение 87
1.15.3. Упругое рассеяние на твердом шаре 91
1.15.4. Кулоновское рассеяние 92
1.16. Вращение твердого тела 93
1.16.1. Движение твердого тела 93
1.16.2. Вращение вокруг неподвижной оси 94
1.16.3. Кинетическая энергия вращающегося тела 97
1.16.4. Гироскоп 99
1.17. Момент инерции 102
1.17.1. Моменты инерции диска и шара 102
1.17.2. Теорема Штейнера 104
1.17.3. Главные моменты инерции 105
1.17.4. Компоненты тензора инерции 107
1.18. Законы сохранения и симметрия пространства и времени 108
1.18.1. Законы сохранения 108
1.18.2. Закон сохранения импульса и однородность пространства 109

1.18.3. Закон сохранения момента импульса и изотропия пространства ... 110
1.18.4. Закон сохранения энергии и однородность времени ... 110
Глава 2. Релятивистская механика ... 113
2.1. Принципы специальной теории относительности ... 113
2.2. Эксперименты по определению скорости света ... 114
2.2.1. О природе и скорости света ... 114
2.2.2. Астрономические способы определения скорости света ... 116
2.2.3. Лабораторные способы измерения скорости света ... 118
2.2.4. Опыты по распространению света в среде ... 119
2.2.5. Максимальность скорости света ... 123
2.3. Замедление времени и сокращение длины.
Одновременность событий ... 125
2.3.1. Замедление времени для движущегося наблюдателя ... 125
2.3.2. Сокращение длины движущегося тела ... 127
2.3.3. Синхронизация часов и одновременность событий ... 128
2.4. Преобразования Лоренца ... 130
2.4.1. Преобразования из общих свойств пространства и времени ... 130
2.4.2. Преобразования *y* и *z* координат ... 131
2.4.3. Преобразования *x* и *t* координат ... 132
2.5. Следствия из преобразований Лоренца ... 135
2.5.1. Одновременность событий в различных ИСО ... 135
2.5.2. Сокращение отрезков длины ... 136
2.5.3. Преобразование промежутков времени ... 137
2.5.4. Преобразование скорости, сложение скоростей ... 137
2.5.5. Примеры проявлений релятивистских эффектов ... 140
2.6. Интервал. «Четырехмерное пространство-время» ... 144
2.6.1. Интервал ... 144
2.6.2. Пространство Минковского ... 145
2.6.3. 4-векторы ... 147
2.6.4. Геометрическая иллюстрация 4-радиуса-вектора ... 147
2.6.5. Геометрическое истолкование преобразований Лоренца ... 150
2.6.6. Парадокс близнецов и другие парадоксы ... 152
2.7. Релятивистская механика ... 156
2.7.1. Как строить релятивистскую механику? ... 156
2.7.2. Собственное время и 4-вектор скорости ... 156
2.7.3. 4-вектор энергии-импульса ... 158
2.7.4. Релятивистское уравнение движения ... 159
Пространственная часть ... 159
2.7.5. Релятивистское уравнение движения. Временная часть ... 161
2.8. Энергия и способы ее выражения ... 162
2.8.1. Инвариант 4-вектора энергии-импульса
и его нулевая компонента ... 162
2.8.2. Выражения для энергии одной частицы ... 164
2.8.3. Взаимосвязь энергии и массы покоя ... 167

2.9. Примеры применения релятивистской механики 168
2.9.1. Дефект массы и энергия связи 168
2.9.2. Реакция распада частиц 169
2.9.3. Рождение и аннигиляция электрон-позитронных пар 170
Глава 3. Классическая механика. Неинерциальные системы отсчета 174
3.1. Силы инерции 174
3.1.1. Неинерциальные системы отсчета 174
3.1.2. Поступательно движущиеся НСО 174
3.2. Движение в произвольной системе отсчета 179
3.2.1. Системы с поступательным и вращательным движением 179
3.2.2. Скорость в К-системе 181
3.2.3. Ускорение в К-системе 182
3.2.4. Переносное ускорение 183
3.2.5. Уравнение относительного движения 184
3.3. Движение материальной точки относительно Земли 185
3.3.1. Уравнение движения тел относительно Земли 185
3.3.2. Ускорение свободного падения и вес тел 186
3.3.3. Отклонение падающих тел. Маятник Фуко 187
3.4. Инертная и гравитационная массы. Принцип эквивалентности 189
3.4.1. Инертная и гравитационная массы 189
3.4.2. Опыт Этвеша 190
3.4.3. Принцип эквивалентности сил инерции и сил гравитации 192
3.4.4. Поведение часов и масштабов в присутствии полей тяготения 195
3.4.5. Элементы теории тяготения Эйнштейна 197
Глава 4. Колебания 200
4.1. Малые отклонения от положения равновесия.
Гармонические колебания 200
4.1.1 Малые отклонения от положения равновесия 200
4.1.2. Гармонические колебания 202
4.2. Собственные колебания 205
4.2.1. Начальные условия колебаний 205
4.2.2. Математический и физический маятники 208
4.2.3. Энергия гармонических колебаний 209
4.2.4. Ангармоничные колебания 213
4.3. Сложение колебаний 214
4.3.1. Векторная диаграмма. Сложение колебаний одинаковой частоты ... 214
4.3.2. Сложение гармонических колебаний
с близкими частотами. Биения 215
4.3.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний 217
4.3.4. Разложение в спектр периодических функций 220
4.4. Затухающие колебания 221
4.4.1. Уравнение и общее решение уравнения затухающих колебаний 221
4.4.2. Свойства и характеристики затухающих колебаний 223
4.4.3. Апериодическое движение 224

4.5. Вынужденные колебания 225
4.5.1. Полное решение уравнения вынужденных колебаний 225
4.5.2. Переходный режим и установившиеся колебания 227
4.5.3. Амплитудно-частотная характеристика. Резонанс 228
4.5.4. Фазово-частотная характеристика. 231
4.6. Автоколебания. Параметрические колебания 233
4.6.1. Автоколебания 233
4.6.2. Параметрическое возбуждение колебаний 235
4.6.3. Колебания связанных систем 235
4.7. Распространение колебаний. Волны 237
4.7.1. Плоские волны 237
4.7.2. Волновое уравнение и волны 239
Литература 241

ВВОДНАЯ ЛЕКЦИЯ «ОБЩАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ КАРТИНА МИРА» (КОНСПЕКТИВНО)

1. Общие слова о физике

1.1. Физика

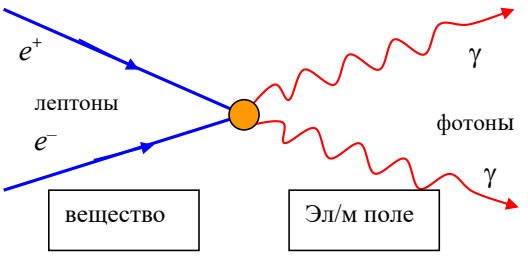
Физика — раздел естествознания, изучающий наиболее общие свойства и формы движения материи.

Под материей понимается и вещество, и различные физические поля. Поле и вещество взаимосвязаны.

Примеры вещества: твердые и жидкие тела, атомы и молекулы, электроны, протоны, нейтроны и другие элементарные частицы.

Примеры полей: электромагнитное поле (безмассовые переносчики электромагнитного взаимодействия — кванты поля — *фотоны*), гравитационное поле (переносчики взаимодействия — гравитационные волны, кванты поля — *гравитоны*) и др.

Пример взаимосвязи вещества и поля: аннигиляция электронно-позитронной пары с образованием квантов электромагнитного поля (см. диаграмму) и обратный аннигиляции процесс — рождение электронно-позитронной пары при взаимодействии кванта света с вакуумом (при наличии дополнительного тела).



1.2. Основные законы (или основные принципы)

В науке важно установить основные *законы* (или основные принципы) при изучении всякого круга явлений. Исходя из них, можно объяснить известные явления и предсказать новые явления. Родоначальником метода принципов был Исаак Ньютон, который установил основные законы механики.

Законы и принципы не выводятся, они не могут быть доказаны логически. Их доказательством является опыт. Отсюда следует, что *физика — наука экспериментальная*.

Законы выражаются в виде количественных соотношений, записанных в виде формул.

Все физические законы носят *приближенный* характер, они ограничены своей областью применения.

Более общие законы содержат в себе менее общие — частные, при этом частные законы и следствия из них могут быть получены из более общих принципов (основных) логическим путем.

1.3. Метод познания в физике

Построение физики как науки носит модельный характер. При создании моделей принимают во внимание только существенные для данного круга явлений свойства и связи и пренебрегают остальными, менее существенными.

Когда можно говорить о *появлении науки?* Наука характеризуется созданием принципов, из которых могут быть получены следствия, которые проверены на опыте. При построении теории или модели явления характерно несущественные связи отбрасывать, оставляя только существенные связи.

Упрощенно можно представить следующую последовательную *схему познания* в физике:

на первом этапе изучается физическое явление →
→ строится физическая модель (или теория) явления →
→ в рамках модели проявляются новые черты явления →
→ проводится их проверка на опыте (направленная) →
→ в процессе проверок происходит уточнение модели →
→ в связи с ними появляются новые предсказания →
→ проводятся снова опыты для проверки предсказаний →
→ в модель включается новое, что не описывается старой теорией →
→ происходит расширение и уточнение (обобщение) теории →
→ сравнение с обновленным экспериментом и т. д.

Нильс Бор в 1923 г. выдвинул *принцип соответствия*, который состоит в следующем: каждая новая теория, претендующая на более широкую область применимости, чем старая, должна включать последнюю как предельный случай.

2. Фундаментальные взаимодействия

Современные экспериментальные данные свидетельствуют, что существует только четыре качественно различных вида взаимодействия. Их называют фундаментальными взаимодействиями. Фундаментальные взаимодействия переносятся квантами — переносчиками взаимодействий. Все остальные силы в нашем мире являются частными проявлениями этих фундаментальных взаимодействий.

В настоящее время большое значение приобретает идея объединения фундаментальных взаимодействий, поэтому, строго говоря, при их объединении фундаментальных взаимодействий становится меньше. Однако при энергиях, реализующихся в нашей обычной жизни, эти проявления фундаментальных взаимодействий имеют качественные и количественные различия, поэтому рассмотрим их отдельно в порядке увеличения интенсивности.

1. *Гравитационное взаимодействие*. Гравитационное взаимодействие присуще всем видам материи, имеет вид притяжения или тяготения и описывается общей теорией относительности (ОТО — Альберт Эйнштейн, 1915–1916 гг.). В случае пренебрежения всеми релятивистскими эффектами (т. е. в случае малых скоростей) и рассмотрения слабых стационарных гравитационных полей ОТО сводится к ньютоновской *теории всемирного тяготения*. Тогда сила F и энергия U взаимодействия двух точечных частиц с массами m_1 и m_2 определяются следующими фундаментальными соотношениями:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \quad U(r) = G\frac{m_1 m_2}{r},$$

где r — расстояние между частицами; G — *ньютоновская гравитационная постоянная*, играющая роль константы гравитационного взаимодействия. Константа G равна

$$G = 6.67\cdot10^{-8}\ \text{дин}\cdot\text{см}^2/\text{г}^2 = 6.67\cdot10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$$

(напомним единицы силы дин = г·см/с^2 и Н = кг·м/с^2).

Видно, что энергия взаимодействия убывает достаточно медленно с расстоянием между частицами — обратно пропорционально r. Сила взаимодействия убывает с расстоянием обратно пропорционально квадрату расстояния. О таких силах, которые убывают с расстоянием обратно пропорционально квадрату расстояния, говорят как о дальнодействующих силах. Радиус действия таких сил равен бесконечности.

Чтобы говорить о величине взаимодействия (интенсивности), удобно иметь безразмерную константу связи. Чтобы получить такую константу, можно использовать *фундаментальные постоянные*:

— *постоянную Планка*:

$$\hbar = 6.62607015\cdot10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{с} = 1.05459\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}$$

(напомним единицы энергии Дж = кг·м^2/с^2 и эрг = г·см^2/с^2);

— *скорость света*:

$$c = 2.9979\cdot10^{10}\ \text{см/с} = 2.9979\cdot10^{8}\ \text{м/с},$$

а также необходимо ввести эталонную массу, например *массу протона*:

$$m_p = 1.67265\cdot10^{-24}\ \text{г} = 1.67265\cdot10^{-27}\ \text{кг}.$$

Тогда безразмерная константа связи гравитационного взаимодействия равна

$$\frac{Gm_p^2}{\hbar c} \sim 6\cdot10^{-39},$$

что, конечно, является очень малой величиной. Гравитационные взаимодействия ответственны за силу тяготения на Земле, за образование звезд, планет, планетарных и звездных систем, галактик.

В квантовой теории тяготения переносчиками гравитационного взаимодействия являются *гравитоны* (или гравитационные волны) — безмассовые частицы $m_G = 0$. Гравитационные волны предсказываются общей теорией относительности и многими другими теориями гравитации, но ввиду их чрезвычайной малости не были зарегистрированы в течение 100 лет со времени их предсказания Эйнштейном.

14 сентября 2015 г. коллаборация LIGO (Лазерно-интерферометрическая гравитационно-волновая обсерватория), в которую входят более 1000 человек (из 16 стран, в том числе из России), впервые наблюдала колебания «пространства — времени» — гравитационные волны, дошедшие до Земли от катастрофы, произошедшей далеко во Вселенной. Физики утверждают, что гравитационные волны возникли в результате слияния двух черных дыр массами 36 и 29 солнечных масс и образования одной более массивной вращающейся черной дыры. Это произошло на расстоянии около 1.3 млрд световых лет от Земли, при этом три солнечные массы ушли на излучение. Ранее столкновения двух черных дыр никогда не наблюдалось. Это открытие подтверждает одно из важных положений общей теории относительности Эйнштейна о существовании гравитационных волн.

2. *Слабое взаимодействие*. Так называемые слабые взаимодействия присущи всем элементарным частицам (кроме фотона, гравитона). Они ответственны за распад элементарных частиц, причем за счет этих сил происходит нарушение пространственной четности. Характерно, что если в каком-либо процессе появляется или участвует элементарная частица *нейтрино* (или *антинейтрино*), то взаимодействие, определяющее этот процесс, является слабым. Типичный пример: распад нейтрона n (β-распад нейтрона) на протон p, электрон e^- и антинейтрино $\tilde{\nu}$:

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}.$$

Существуют также слабые взаимодействия, не сопровождающиеся участием нейтрино или антинейтрино.

Интенсивность слабого взаимодействия характеризуется константой связи Ферми G_F. Эта константа имеет размерность, и, чтобы образовать безразмерную величину для сравнения с другими константами взаимодействия, необходимо использовать какую-нибудь эталонную массу, например массу протона m_p (1.67265 10^{-27} кг). Тогда безразмерная константа связи слабого взаимодействия будет равна

$$G_F m_p^2 \sim 10^{-5}.$$

Видно, что слабое взаимодействие гораздо интенсивнее гравитационного, однако, с другой стороны, оно является самым слабым взаимодействием, которое проявляется в распаде элементарных частиц.

Слабое взаимодействие, в отличие от гравитационного, является короткодействующим, характерный радиус действия сил $r \le 10^{-15}$ см. Переносчиками слабых взаимодействий являются частицы конечной массы — заряженные $W^{\pm}$-*бозоны* и нейтральные Z^0-*бозоны*. Эти элементарные частицы имеют спин, равный 1, и массы, равные по порядку величины $100m_p$ или 160 $000m_e$. Масса

электрона m_e = 9.1095·10^{-28} г. Если взять в качестве эталонной массы массу электрона, то безразмерная константа слабого взаимодействия примерно равна $G_F m_e^2 \sim 10^{-10}$.

Примечание 1. Можно оценить массу W-бозона исходя из соотношения неопределенностей $pr \sim \hbar$, где $r \sim 2\cdot10^{-16}$ см — радиус действия сил и скорости движения бозона, близкой к скорости света: $m_W \sim \frac{p}{c} \sim \frac{\hbar}{rc} \sim \frac{1.05\cdot10^{-27}}{2\cdot10^{-16}\cdot3\cdot10^{10}} \sim 1.6\cdot10^{-22}$ г.

3. *Электромагнитное взаимодействие*. Электромагнитные взаимодействия проявляются при взаимодействии зарядов, магнитных моментов (токов) и электромагнитных полей. Они осуществляются квантами электромагнитного поля — *фотонами* (частицы-волны с массой покоя $m_\gamma = 0$).

Простейший пример: два покоящихся заряда q_1 и q_2 взаимодействуют с

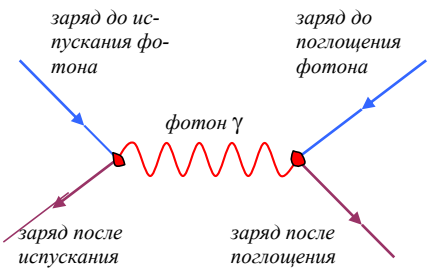
$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}; \qquad \vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r},$$

где r — расстояние между ними; k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц, заряды в системе СГС измеряются в единицах заряда СГС, а в системе СИ — в кулонах. Зависимость силы Кулона от расстояния означает, что взаимодействие является дальнодействующим, как и гравитационное взаимодействие (радиус действия сил $r \sim \infty$).

Классическая теория электромагнитного взаимодействия — электродинамика Максвелла — обобщение опытных фактов и явлений в виде системы дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитные явления. В качестве константы связи служит *заряд электрона* как минимальный обнаруженный электрический заряд свободной частицы:

$$e = 4.8032\cdot10^{-10} \text{ ед. СГС} = 1.60219\cdot10^{-19} \text{ Кл.}$$

В квантовой теории переносчиком электромагнитного взаимодействия является квант электромагнитного поля — *фотон*, частица, имеющая нулевую массу покоя и спин 1. Квантовое электромагнитное взаимодействие двух зарядов изображается следующим образом: заряд испускает фотон, в силу чего его состояние изменяется. Другой заряд поглощает этот фотон и также изменяет свое состояние.



Удобно ввести безразмерную константу связи электромагнитного взаимодействия, для чего используем фундаментальные постоянные $\hbar$ и c. Эта константа называется *постоянной тонкой структуры*:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

Таким образом, безразмерная константа электромагнитного взаимодействия ~ 10^{-2}. Это означает, что электромагнитное взаимодействие значительно сильнее слабого и гравитационного взаимодействия.

С современной точки зрения электромагнитное и слабое взаимодействия представляют собой различные стороны единого *электрослабого взаимодействия*. Создана объединенная теория электрослабого взаимодействия — теория Вайнберга — Салама — Глэшоу, объясняющая с единых позиций все аспекты электромагнитных и слабых взаимодействий. Пока энергии взаимодействия достаточно малы, электромагнитное и слабое взаимодействия отделены и не влияют друг на друга. С ростом энергии начинается их взаимовлияние, и при достаточно больших энергиях эти взаимодействия сливаются в единое. Характерная энергия объединения оценивается по порядку величины как 10^2 ГэВ = 10^{11} эВ (электронвольт $\rightarrow$ 1 эВ = $1.6\cdot10^{-12}$ эрг =$1.6\cdot10^{-19}$ Дж). Для сравнения отметим, что энергия связи атома водорода ~ 10^{-8} ГэВ, а энергия связи атомного ядра ~ 10^{-2} ГэВ существенно меньше характерной энергии объединения. По этой причине электромагнитное и слабое взаимодействия не проявляют в обычных физических явлениях своей единой сущности.

4. *Сильное взаимодействие.* Сильное взаимодействие ответственно за устойчивость атомных ядер, проявляется в ядерных реакциях, т. е. описывает взаимодействие между *нуклонами* и *гиперонами*, объединенными общим названием — *адроны*. Адроны — сильно взаимодействующие элементарные частицы, к которым относятся нейтрон n, протон p, гипероны λ, Σ ... Сильное взаимодействие зарядонезависимое, т. е. оно одинаковое для протонов и нейтронов.

Классическая квантовая теория ядра описывала сильные взаимодействия как обмен π-*мезонами*. Поскольку масса π-мезона конечная, то и радиус действия ядерных сил конечен: $r \le 10^{-13}$ см. Безразмерная *константа сильного взаимодействия* ~ 1, т. е. сильное взаимодействие является на самом деле наиболее сильным из всех фундаментальных взаимодействий.

Примечание 2. Оценка массы π-мезона. Пользуясь длиной волны де Бройля, укладывающейся на орбите одного нуклона вокруг другого, или, что то же самое, соотношением неопределенностей, имеем

$$m_\pi \sim \frac{p}{c} \sim \frac{\hbar}{cr} \approx \frac{1.05\cdot10^{-27}}{3\cdot10^{10}\cdot10^{-13}} \approx 0.3\cdot10^{-24}\,г \approx 300 m_e$$

Современная квантовая теория сильных взаимодействий — *квантовая хромодинамика*. Согласно этой теории все адроны состоят из кварков. *Кварки* — элементарные частицы ненулевой массы со спином 1/2 и с дробным электрическим зарядом по отношению к электронному заряду. Кварки формируются в три пары (дублеты) и записываются парами в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Каждый тип кварков принято называть *ароматом* (6 ароматов). При этом *u*-, *c*-, *t*-кварки имеют электрический заряд $\frac{2}{3}|e|$, а *d*-, *s*-, *b*-кварки — $-\frac{1}{3}|e|$. Кроме того, каждый кварк (каждый аромат) может обладать разным *цветом* (так называют их различные характеристики — квантовые числа). Выделяют три цвета: желтый, синий и красный. Каждому кварку соответствует *антикварк*, имеющий по отношению к данному кварку противоположный электрический заряд и антицвет. В итоге существуют 36 кварков и антикварков.

Силы между кварками осуществляются квантами сильных взаимодействий — *глюонами*, которые являются переносчиками сильных взаимодействий со спином 1 и массой, равной 0. При этом в процессе взаимодействия цвета кварков могут меняться. Все наблюдаемые частицы (адроны) бесцветны, т. е. они есть объединение как минимум трех разноцветных кварков. Мезоны также бесцветные частицы, но они образуются двумя кварками с одним цветом и антицветом.

Отличительная черта кварк-кваркового взаимодействия через глюоны состоит в том, что с уменьшением расстояния между кварками их взаимодействие ослабляется, а с увеличением расстояния — растет. Внутри адрона кварки можно рассматривать как свободные частицы (понятие *асимптотической свободы*), но они не могут вылетать из адронов. Поэтому одиночные кварки и глюоны как частицы, обладающие цветом, не могут существовать как свободные частицы. Явление удержания элементарных частиц, обладающих цветом, внутри адронов получило название *конфайнмента*.

В настоящее время существует тенденция объединения всех фундаментальных взаимодействий в одно с единой константой. Создана модель *великого объединения*, в рамках которой объединяются сильное, слабое и электромагнитное взаимодействия и при этом характерная энергия объединения оказывается $\sim 10^{15}$ ГэВ. Отметим, что наибольшая энергия, достижимая на современных ускорителях, не превышает 10^3 ГэВ. Проблема объединения всех фундаментальных взаимодействий остается открытой.

3. Кратко об общей картине мира

3.1. Предельные размеры и времена жизни изучаемых объектов

Согласно современным физическим представлениям о мире получаем следующую иерархию объектов по мере уменьшения их размеров:

Вселенная → метагалактики и галактики → звезды и звездные системы →
→ планеты → макротела → микроструктуры → макромолекулы →
→ наноструктуры → молекулы и атомы → ядра → элементарные частицы.

Приведем кратко диапазон их характерных размеров и времени жизни.

1. Размер Вселенной 10^{28} см = 10^{10} световых лет ⇔ радиус элементарных частиц 10^{-17} см (1 световой год равен $\approx 10^{18}$ см).

Часто для оценки больших расстояний вводится единица расстояния

$$1 \text{ парсек} = 3.0857 \cdot 10^{18} \text{ см}.$$

2. Время жизни: время жизни Вселенной 10^{10} лет (= 10^{18} с) $\Leftrightarrow$ время жизни некоторых микрочастиц и резонансов $10^{-24}...10^{-25}$ с. Время жизни Вселенной отсчитывается с момента ее образования — рождение как взрыв — особая точка.

3. Массы: масса Млечного пути (наша галактика) порядка $4 \cdot 10^{44}$ г $\Leftrightarrow$ масса Солнца $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$ г $\Leftrightarrow$ масса электрона $m_e = 0.91 \cdot 10^{-27}$ г.

4. Общее число звезд во Вселенной ~ 10^{23}, в нашей Галактике — ~ 10^{11}.

5. Число атомов в видимой части Вселенной ~ 10^{80}–10^{82}. Число атомов в Солнце ~ 10^{57}, Земле ~ $4 \cdot 10^{51}$.

6. Средняя плотность вещества во Вселенной $\rho \sim 10^{-30}$ г/см^3.

Во Вселенной постоянно происходят эволюционные процессы рождения и умирания звезд и звездных систем. Рождаются новые и сверхновые звезды. Вспышка сверхновой — явление, в ходе которого звезда резко увеличивает свою яркость на 4–8 порядков с последующим сравнительно медленным затуханием вспышки.

3.2. Макрофизика

Космофизика (астрофизика) — наука, изучающая физические явления в космосе. За последние 20–30 лет в этой области произошла настоящая революция, обнаружены интереснейшие объекты.

1. *Нейтронные звезды* — состоят в основном из нейтронов, образуются в результате гравитационного коллапса: средняя плотность $\rho \sim 2 \cdot 10^{17}$ кг/м^3, средний радиус $r \sim 20$ км, масса $M < 2M_{\odot}$. Черные дыры — особые сильно сжатые объекты, нейтронные звезды, которые поглощают все, что на них попадает.

2. *Пульсары* — нейтронные звезды, испускающие импульсное излучение (за счет аккреции вещества).

3. *Барстеры* — двойные системы (звезда + нейтронная звезда) с периодическим излучением в рентгеновской области.

4. *Квазары* — объекты, обладающие самым мощным излучением (в основном в радиодиапазоне) во Вселенной. Размер квазаров — несколько парсек.

Важный фундаментальный вопрос: Вселенная замкнута или нет? Этот вопрос остается открытым до настоящего времени. Более того, последние измерения скорости разбегания галактик приводят к новым, еще до конца неисследованным явлениям во Вселенной.

Так, появились новые данные о Вселенной.

Тёмная материя в астрономии и космологии — это гипотетическая форма материи, которая не испускает электромагнитного излучения и не взаимодействует с ним. Это свойство данной формы вещества делает невозможным её прямое наблюдение. Однако возможно обнаружить присутствие тёмной материи по создаваемым ею гравитационным эффектам. Обнаружение тёмной материи поможет решить проблему скрытой массы, которая, в частности, заключается в аномально быстрой скорости вращения внешних областей галактик.

Тёмная энергия (*dark energy*) в космологии — феномен, объясняющий факт, что Вселенная расширяется с ускорением. На основании проведённых в конце 1990-х гг. наблюдений сверхновых звёзд был сделан вывод, что расширение Вселенной ускоряется со временем. Затем эти наблюдения были подкреплены другими источниками: измерениями реликтового излучения, гравитационного линзирования, нуклеосинтеза Большого взрыва.

Существуют два варианта объяснения сущности тёмной энергии:

- тёмная энергия есть *космологическая константа* — неизменная энергетическая плотность, равномерно заполняющая пространство *Вселенной* (иначе говоря, постулируется ненулевая энергия вакуума);
- тёмная энергия есть некая квинтэссенция — динамическое поле, энергетическая плотность которого может меняться в пространстве и во времени.

Окончательный выбор между двумя вариантами требует высокоточных измерений скорости расширения Вселенной, чтобы понять, как эта скорость изменяется со временем. Темпы расширения Вселенной описываются космологическим уравнением состояния. Разрешение уравнения состояния для тёмной энергии является одной из самых насущных задач современной наблюдательной космологии.

Тёмная энергия также должна составлять значительную часть так называемой *скрытой массы* Вселенной.

3.3. Микрофизика

За последние 30–40 лет в микрофизике также произошла революция, поменялись многие привычные представления в следующей цепочке:

$$\text{АТОМ} \Rightarrow \text{ЯДРО} \Rightarrow \text{ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ.}$$

Наиболее существенные изменения произошли в физике элементарных частиц в связи с достижениями как в области экспериментальных исследований, так и теоретических достижений. Была создана и развита Стандартная модель — теоретическая конструкция в физике элементарных частиц, описывающая электромагнитное, слабое и сильное взаимодействие всех элементарных частиц. Стандартная модель не является теорией всего, так как не описывает тёмную материю, тёмную энергию и не включает в себя гравитацию. В середине 1980-х гг. было подтверждено существование промежуточных векторных бозонов, что привело к принятию Стандартной модели как основной модели в физике элементарных частиц. В дальнейшем модель расширялась, в частности после обнаружения в 2002 г. нейтринных осцилляций. В рамках этой модели предсказывалось существование некоторого бозонного поля (бозона Хиггса, постулирован британским физиком Питером Хиггсом в его фундаментальных статьях), которое отвечало бы за появление инертной массы всех элементарных частиц.

Бозон Хиггса, или хиггсовский бозон — элементарная частица (бозон, скалярная частица с нулевым спином), квант поля Хиггса, с необходимостью возникает в Стандартной модели физики элементарных частиц вследствие механизма спонтанного нарушения электрослабой симметрии. Предсказанный первоначально в теории, после нескольких десятков лет поисков 4 июля 2012 г. в

результате исследований на Большом адронном коллайдере (БАК) был обнаружен кандидат на его роль — новая частица с массой около 125–126 ГэВ/с². В марте 2013 г. появились сообщения от отдельных исследователей Европейского центра ядерных исследований (ЦЕРН), что найденная полугодом ранее частица действительно является бозоном Хиггса. В апреле 2014 г. сообщили, что ширина распада этого бозона меньше 17 МэВ. Он обладает нулевыми спином, электрическим зарядом, цветным зарядом.

Стандартная модель не может являться последним словом в физике элементарных частиц, ибо она содержит слишком много внешних параметров, а также не включает гравитацию. Поэтому поиск отклонений от Стандартной модели — одно из самых активных направлений исследования начиная с 2010-х гг. Ожидалось, что эксперименты на Большом адронном коллайдере смогут зарегистрировать множество отклонений от Стандартной модели (с добавлением массивных нейтрино), однако по состоянию на конец 2019 г. после 10 лет экспериментов таких отклонений обнаружено не было.

3.4. Проблемы в современной физике

В заключение кратко перечислим области исследований и проблемы в физике, решению которых были посвящены последние несколько десятков лет.

1. Единая теория поля. Связанная с этим проблема квантования пространства, т. е. наличие фундаментальной длины.
2. Теория физического вакуума.
3. Космология — настоящее и будущее Вселенной.
4. Проблема темной материи и темной энергии.
5. Масса нейтрино.
6. Термоядерный синтез. Проблемы энергетики будущего.
7. Высокотемпературная сверхпроводимость. Скачок произошел в 1986–1987 гг., когда нашли соединения (керамические соединения) с температурой сверхпроводящего перехода ~90 К.
8. Создание когерентных источников света — лазеров — высоких энергий.
9. Поведение вещества в сверхсильных электрических, магнитных и гравитационных полях.
10. Создание новых материалов с заданными свойствами.
11. Кластеры и фуллерены.
12. Наночастицы, наноструктуры, нанотехнологии.
13. Атомные ячейки памяти.
14. Физика открытых систем.
15. И другие.

ГЛАВА 1.
КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

1.1. Введение

1.1.1. О механике. Границы применимости классической механики

Механика — раздел физики, в котором изучается простейшая форма движения материи — перемещение тел в пространстве и во времени. Основные принципы (законы) механики были сформулированы И. Ньютоном.

В принципе, ранее считалось, что все в мире может быть описано этими законами. На этих законах построена классическая механика. Однако опыт показал, что законы Ньютона справедливы не всегда, поэтому классическая механика имеет определенные границы применимости. Далее в курсе физики мы взглянем на классическую механику немного с другой стороны, исходя из законов сохранения, которые являются в некотором смысле более общими, чем законы Ньютона.

Первое ограничение классической механики связано со скоростями рассматриваемых объектов. Опыт показал, что законы Ньютона справедливы при не слишком больших скоростях материальных тел:

$$v \ll c \qquad \left(\frac{v^2}{c^2} \ll 1\right),$$

где c — скорость света (c = 2.9979·10^{10} см/с). При этих скоростях линейные масштабы и промежутки времени не изменяются при переходе от одной системы отсчета к другой (подробнее системы отсчета рассмотрим п. 1.1.2). В этом смысле пространство и время *абсолютны* в классической механике.

Итак, классическая механика описывает движение с малыми относительными скоростями, т. е. классическая механика — *нерелятивистская физика*. Это является первым ограничением применимости классической механики Ньютона — ограничение со стороны больших скоростей.

Опыт также показал, что применение законов ньютоновской механики *неправомерно к микрообъектам*, таким как молекулы, атомы, ядро, электроны и т. д. При описании поведения микрообъектов, начиная с размеров

$$R \le 10^{-8} \text{ см} = 10^{-10} \text{ м} \approx 1 \text{ Ангстрем},$$

справедливы другие законы — *квантовые*. Их необходимо учитывать, когда одна из характерных величин размерности кг·м^2/с = Дж·с (это размерность момента импульса) имеет порядок величины $\hbar$ — постоянной Планка:

$$1.05459 \cdot 10^{-27} \text{ эрг·с} = 1.05459 \cdot 10^{-34} \text{ Дж·с}.$$

Скажем, для электрона, находящегося в атоме, имеем следующие значения физических величин, характеризующих его движение:

— масса электрона — $m_e \sim 10^{-30}$ кг;

— его скорость — $v_e \sim 10^{-2}$·с·м/с;

— радиус орбиты — $r \sim 10^{-10}$ м.

Тогда величина, имеющая размер момента импульса, равна

$$m_e v_e r \sim 10^{-34} \sim \hbar .$$

Таким образом, движение электрона в атоме не может быть описано в рамках классической механики, а описывается *квантовой теорией*.

При столкновении частиц высоких энергий, т. е. больших скоростей и явлений, происходящих на малых расстояниях, необходимо учитывать и релятивистские, и квантовые эффекты одновременно. Этой областью физики занимается *релятивистская квантовая механика.*

Таким образом, на рисунке 1.1.1 в пространстве масштабов расстояний и скоростей схематически показано положение классической механики относительно других разделов физической теории: релятивистской механики (СТО), квантовой механики и релятивистской квантовой механики.

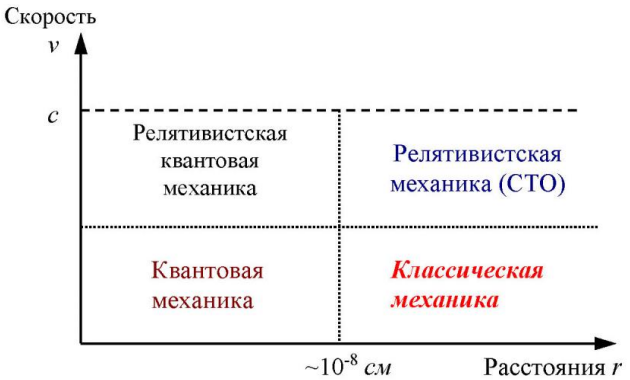


Рис. 1.1.1

Примечание 3. Исаак Ньютон (1643–1727), великий английский ученый, создатель классической физики.

1.1.2. Системы координат. Система отсчета

Любое физическое явление — *последовательность событий*. *Событием* называется то, что происходит в данной точке пространства в данный момент времени. Для описания событий необходимо провести разметку пространства и времени. Последняя осуществляется путем введения отсчетных и реперных (масштабных) тел и связанной с ними системой координат.

В механике, да и в физике вообще, в разных задачах удобно пользоваться различными системами координат. Рассмотрим наиболее часто употребляемые системы координат.

1. *Декартова система координат*: вводится тело отсчета и три взаимно перпендикулярные оси с масштабами по всем трем осям (линейки, см. рис. 1.1.2). Пределы изменения этих координат от $-\infty$ до $+\infty$. При этом координаты точки (материальной точки) определяются вектором (или *радиус-вектором*):

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\,, \tag{1.1.1}$$

где x, y, z — проекции вектора на три взаимно перпендикулярные оси, или, иначе, координаты точки; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — единичные векторы вдоль осей x, y, z соответственно.

$$\left|\vec{e}_x\right| = \left|\vec{e}_y\right| = \left|\vec{e}_z\right| = 1\,. \tag{1.1.2}$$

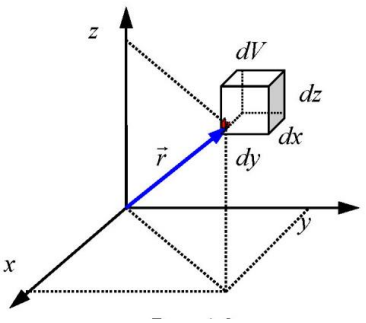


Рис. 1.1.2

Малый элемент объема в такой системе определяется через малые интервалы координат как их произведение (объем параллелепипеда, см. рис. 1.1.2):

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z\,. \tag{1.1.3}$$

Или бесконечно малый элемент объема записывается через бесконечно малые приращения координат:

$$d^3V = dxdydz. \tag{1.1.4}$$

2. *Цилиндрическая система координат*: в качестве осей в цилиндрической системе выбираются: расстояние до оси z–ρ, угол поворота от оси x–φ (по правилу правого винта) и высота вдоль оси z от тела отсчета (рис. 1.1.3*а*). Радиус-вектор точки определяется:

$$\vec{r} = \vec{\rho}(\rho,\varphi) + z\vec{e}_z\,, \tag{1.1.5}$$

где $\vec{\rho}$ — вектор в плоскости, перпендикулярной оси z.

Пределы изменения координат в цилиндрической системе (см. рис. 1.1.3*а*):

$$\begin{aligned} &0 \le \rho < \infty \\ &0 \le \varphi \le 2\pi\,. \\ &-\infty < z < \infty \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

При этом декартовы координаты точки выражаются через координаты цилиндрической системы отсчета следующим образом:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{1.1.7}$$

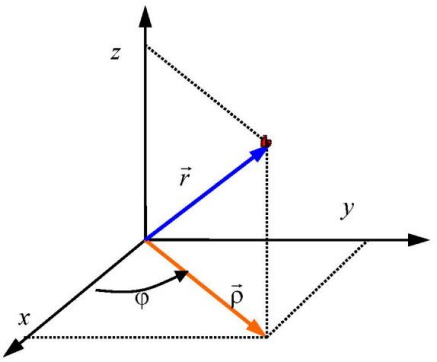


Рис. 1.1.3*а*

Бесконечно малый элемент объема равен произведению ребер малого кубика или параллелепипеда, образованного бесконечно малыми изменениями координат ρ, φ, *z* (см. рис. 1.1.3*б*):

$$d^3V = \rho d\rho \cdot d\varphi \cdot dz\,. \tag{1.1.8}$$

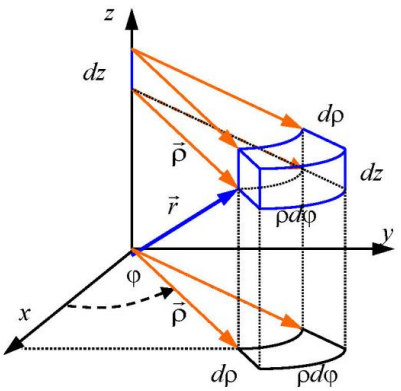


Рис. 1.1.3*б*

3. *Сферическая система координат*: вводится расстояние от тела отсчета до материальной точки *r* и углы поворота от осей *x* и *z* – θ, φ (рис. 1.4). Радиус-вектор есть функция этих координат: $\vec{r} = \vec{r}(r,\theta,\varphi)$, а координаты имеют следующие пределы изменения:

$$\begin{aligned} &0 \le r \le \infty \\ &0 \le \theta \le \pi\,. \\ &0 \le \varphi \le 2\pi \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

При этом декартовы координаты определяются через координаты сферической системы следующим образом (рис. 1.1.4):

$$x = r\sin\theta\cos\varphi;$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi; \qquad (1.1.10)$$
$$z = r\cos\theta.$$

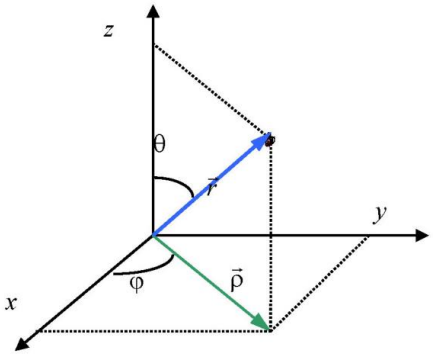


Рис. 1.1.4

Бесконечно малый элемент объема в сферической системе координат равен, как обычно, произведению трех ребер криволинейного кубика или параллелепипеда (см. рис. 1.1.5, криволинейностью кубика можно пренебречь в пределе малых размеров):

$$d^3V = dr \cdot rd\theta \cdot r\sin\theta d\varphi;$$
$$d^3V = r^2 dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \qquad (1.1.11)$$

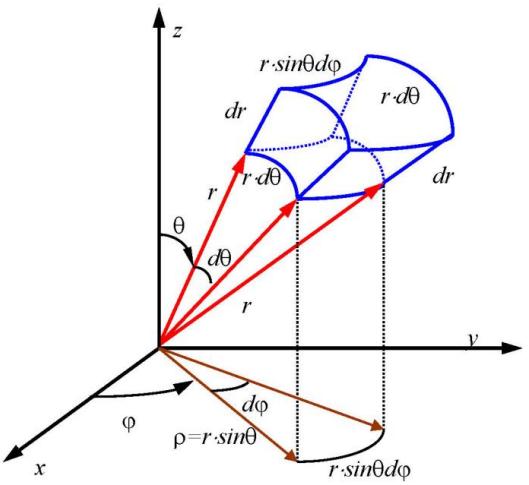


Рис. 1.1.5

Система отсчета. Система координат дополняется *часами*. Часы находятся в различных точках пространства, поэтому их нужно синхронизовать. Синхро-

низация часов производится с помощью сигналов. Пусть время распространения сигнала из точки, где произошло событие, до точки наблюдения равно τ. Тогда наши часы должны показывать время $t = t' + \tau$, если часы в точке события в момент его появления показывают время t'. Такие часы будем считать синхронизированными.

В классической механике считаем, что скорость сигнала (скорость света) $c = \infty$. Тогда можно ввести одни часы во всем пространстве (абсолютное время).

Совокупность системы координат и множества синхронизированных между собой часов в каждой точке пространства образуют *систему отсчета* (СО). Имеется бесконечное множество систем отсчета. Опыт показывает: пока скорости невелики по сравнению со скоростью света $v^2/c^2 << 1$, линейные масштабы и промежутки времени не изменяются при переходе от одной СО к другой. Иначе говоря, *пространство и время абсолютны в классической механике*.

Если $v^2/c^2 \le 1$, то масштабы и интервалы времени зависят от выбора системы отсчета, т. е. пространство и время становятся понятиями относительными. Это область *релятивистской механики*.

1.1.3. Основные кинематические характеристики движения

Рассмотрим для простоты материальную точку в декартовой системе отсчета. *Материальная точка* — это физическое тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Отметим, что понятие «материальная точка» — это чисто модельное рассмотрение положения реального тела, идеализация реальной ситуации. Положение материальной точки определяется радиус-вектором $\vec{r}$ или, например в декартовой системе координат, тремя координатами x, y, z. При этом *радиус-вектор* определяется (1.1.1):

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z .$$

При перемещении материальной точки координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и соответственно радиус-вектор $\vec{r}(t)$ являются функциями времени t. Начало вектора находится в точке отсчета (при $t = 0$), а конец вектора в зависимости от времени определяет траекторию движения тела.

Скорость материальной точки при этом определяется как производная по времени от радиус-вектора:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z . \qquad (1.1.12)$$

Здесь вектор элементарного перемещения равен $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ (см. рис. 1.1.6), а $d\vec{r}$ — бесконечно малое приращение радиус-вектора. Иначе вектор скорости записывается:

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z , \qquad (1.1.13)$$

где компоненты вектора скорости (скорости распространения вдоль координатных осей) равны соответственно:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (1.1.14)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения точки.

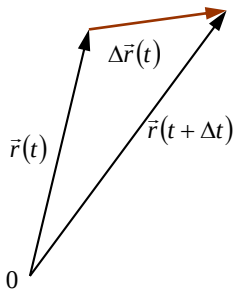


Рис. 1.1.6

Ускорение материальной точки определяется производной скорости по времени (см. рис. 1.1.7):

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{e}_z. \qquad (1.1.15)$$

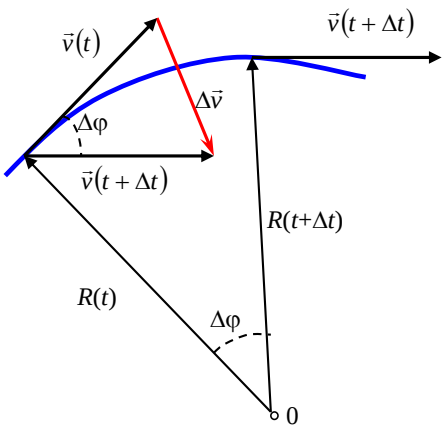


Рис. 1.1.7

Или определяется как вторая производная от радиус-вектора:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.1.16)$$

При этом вектор ускорения может быть записан в обычной декартовой системе координат:

$$\vec{a}(t) = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z; \qquad (1.1.17)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Вектор ускорения в общем случае движения не совпадает с направлением скорости. Поэтому при рассмотрении многих задач о движении тел удобно раскладывать вектор ускорения на две составляющие: *тангенциальную* составляющую $\vec{a}_\tau$, направленную параллельно скорости движения, и *нормальную* $\vec{a}_n$, направленную перпендикулярно вектору скорости (траектории).

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (1.1.18)$$

Тангенциальное ускорение определяет *численное изменение* скорости:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \qquad (1.1.19)$$

Нормальное, или центростремительное, ускорение отвечает за *изменение направления* скорости материальной точки:

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \qquad (1.1.20)$$

где R — радиус кривизны траектории.

Иногда удобно ввести понятия угловой скорости и углового ускорения, если ввести угол поворота радиус-вектора точки $\varphi(t)$, изменяющийся во времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \qquad (1.1.21)$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Более подробно криволинейное движение рассмотрим в курсе ниже.

1.1.4. Системы единиц

Для описания движения материальной точки необходимо ввести основные единицы измерения физических величин. В механике к ним относятся единицы *длины*, *времени* и *массы*. Из них строятся все остальные единицы, описывающие движение, так называемые производные единицы.

В настоящем курсе физики мы будем использовать обе общепринятые системы единиц:

СГС: сантиметр (см), грамм (г), секунда (с);

СИ: метр (м), килограмм (кг), секунда (с).

	Основные единицы			Производные единицы			
Система единиц	**Линейные размеры**	**Время**	**Масса**	**Линейная скорость v**	**Ускорение a**	**Угловая скорость ω**	**Угловое ускорение β**
СГС	см	с	г	см/с	см/с^2	рад/с	рад/с^2
СИ	м	с	кг	м/с	м/с^2	рад/с	рад/с^2
	1 м = 10^2 см		1 кг = 10^3 г				

Напоминаем, что радиан (рад) — это безразмерная единица угла, равная отношению длины дуги, описывающей угол, к ее радиусу.

1.2. Инерциальные системы отсчета и законы Ньютона

1.2.1. Инерциальные системы отсчета (ИСО)

Классическая механика Галилея — Ньютона строится на законах, полученных на опыте и представленных в виде принципов Ньютоном. Удобно и необходимо выбрать такую систему отсчета, чтобы законы механики выглядели наиболее просто. Такую систему отсчета позволяет выбрать *первый закон Ньютона*. Именно первый закон Ньютона предполагает существование *инерциальных систем отсчета* (ИСО).

Существует такая система отсчета, в которой материальная точка, если исключить ее взаимодействие со всеми иными телами, будет двигаться по инерции, т. е. сохранять свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Такая система носит название инерциальной системы отсчета — ИСО. Таким образом, ИСО связана с движением этих *свободных* тел. Все остальные системы отсчета — неинерциальные системы отсчета.

Свободное тело (тело или материальная точка без взаимодействия) — это идеализация, свободных тел, строго говоря, нет в природе. Так как ИСО связана со свободным телом, то и инерциальная система отсчета — идеализация. Утверждение о существовании таких ИСО, хотя бы в принципе, — один из основных законов природы. Важно, что можно ввести бесконечное множество ИСО, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, т. е. с постоянной скоростью, но по физическим свойствам все они эквивалентны. В этом смысле нет выделенной, или, иначе, абсолютной, ИСО.

Примечание 4. Галилео Галилей (1564–1642), итальянский физик.

1.2.2. Законы Ньютона

Итак, основные принципы (законы) механики были сформулированы Ньютоном. Кратко повторим эти принципы, т. е. *законы Ньютона*.

1. *Первый закон Ньютона:* если сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, то тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Значение этого закона становится ясно из первого пункта этого параграфа, когда рассматривали инерциальные системы отсчета.

2. *Второй закон Ньютона*: основное уравнение динамики — ускорение тела $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ пропорционально приложенной к телу силе:

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad \text{или} \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,, \tag{1.2.1}$$

где $\vec{F}$ — равнодействующая всех сил, действующих на тело. Напомним, что здесь скорость определяется как производная от радиус-вектора точки или тела $\vec{r} = \vec{r}(t)$ по времени: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, поэтому ускорение есть вторая производная от радиус-вектора: $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$. Масса m здесь выступает как коэффициент пропорциональности, который определяет меру инертности тела.

Часто второй закон Ньютона записывают через *импульс* тела $\vec{p} = m\vec{v}$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,. \tag{1.2.2}$$

Второй закон Ньютона служит для определения единиц силы, поскольку все остальные единицы уже определены. В системе СИ сила измеряется в ньютонах: $\text{Н} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}$.

В системе СГС (CGS) сила измеряется в динах: $\text{Дн} = \frac{\text{г}\cdot\text{см}}{\text{с}^2}$. Связь между единицами силы определяется соотношением 1 Н = 10^5 Дн.

3. *Третий закон Ньютона*: во взаимодействии двух тел каждое из них действует на другое тело с одинаковой по значению, но противоположной по направлению силой:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}\,. \tag{1.2.3}$$

Законы Ньютона позволяют описывать основные явления и решать задачи динамики в классической механике.

1.2.3. Реализация ИСО

Выбор ИСО на практике зависит от точности описания того или иного явления или задачи. Рассмотрим несколько систем отсчета, которые с различной точностью можно рассматривать как инерциальные.

1. Для обычных механических задач часто рассматривают систему отсчета, связанную с поверхностью Земли, как инерциальную. При этом можно считать ускорение силы тяжести постоянным и примерно равным $g \approx$ ≈ 9.8 м/с^2 = 980 см/с^2. Но для более строгих рассмотрений необходимо учитывать, что Земля вращается и все тела, находящиеся на поверхности Земли, движутся с ускорением, причем различным на экваторе и на полюсе. Поэтому

система отсчета, связанная с поверхностью Земли, — неинерциальная. С какой точностью?

Рассмотрим положение тела на экваторе. Ускорение (центростремительное) a_n, связанное с вращением Земли с угловой скоростью ω ($\omega = d\varphi/dt = v/R_З$, φ — угол поворота Земли), определяется:

$$a_n = \omega^2 R_З = \frac{v^2}{R_З}, \tag{1.2.4}$$

где $R_З$ — радиус Земли: $R_З = 6.4 \cdot 10^3$ км $= 6.4 \cdot 10^8$ см. Оценим угловую скорость вращения Земли, зная, что время оборота Земли вокруг оси ($\varphi = 2\pi$) составляет $T = 1$ сут $= 24 \cdot 60 \cdot 60$ с $= 86\,400$ с:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{6.28}{86\,400} \approx 0.7 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]. \tag{1.2.5}$$

Подставляя в (1.2.4), получаем оценку ускорения на экваторе:

$$a_n = 0.49 \cdot 10^{-8} \cdot 6.4 \cdot 10^8 = 3.2 \left[\frac{\text{см}}{\text{с}^2}\right]. \tag{1.2.6}$$

Центростремительное ускорение меняется при изменении широты, а на полюсе равно 0. Таким образом, получили, что с такой точностью (1.2.6) система отсчета, связанная с поверхностью Земли, может считаться инерциальной, поскольку ускорение силы тяжести на полюсе отличается от ускорения силы тяжести на экваторе на величину ~ 3.2 см/с^2.

2. Рассмотрим степень неинерциальности системы отсчета, связанной с центром Земли. Земля вращается вокруг Солнца, что дает поправку на ускорение на величину, на порядок меньшую по сравнению с (1.2.6). Период обращения Земли вокруг Солнца $T = 1$ год $= 3 \cdot 10^7$ с. Радиус орбиты Земли $R_О = 1.5 \cdot 10^{13}$ см. Тогда ускорение центра Земли при вращении вокруг Солнца равно

$$a_З = \omega^2 R_О \approx \frac{(6.28)^2}{9 \cdot 10^{14}} 1.5 \cdot 10^{13} = 0.6 \left[\frac{\text{см}}{\text{с}^2}\right]. \tag{1.2.7}$$

Эту поправку необходимо учитывать, если рассматриваем движение космических объектов с точностью до 10^{-4}.

3. Система отсчета, связанная с центром Солнца, — это инерциальная система отсчета с высокой точностью. В самом деле, скорость движения Солнца $v_С \approx 3 \cdot 10^5$ м/с и ускорение Солнца вокруг центра Галактики:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{9 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{20}} \sim 3 \cdot 10^{-10} \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]. \tag{1.2.8}$$

Получаем ничтожно малое ускорение, и с такой точностью центр Солнца является инерциальной системой отсчета.

1.3. Преобразования Галилея

1.3.1. Принцип относительности Галилея

Принцип относительности гласит: *все инерциальные системы отсчета (ИСО) по своим физическим свойствам эквивалентны, т. е. никакими механическими опытами, проводимыми внутри ИСО, нельзя установить, покоится ли эта система отсчета или движется равномерно и прямолинейно*.

Принцип относительности утверждает, что все законы механики (природы) инвариантны во всех ИСО. Рассмотрим две ИСО: К- и К′-системы, изображенные на рисунке 1.3.1. В каждой системе отсчета имеются свои тела отсчета в точках О и О' и свои часы. Любое событие с точки зрения наблюдателя из К-системы характеризуется координатами и временем, пусть они равны (x, y, z, t). Пусть с точки зрения наблюдателя из К'-системы эти величины равны «штрихованным» координатам (x', y', z', t'). Найдем связь между «штрихованными» и «незаштрихованными» координатами и временем.

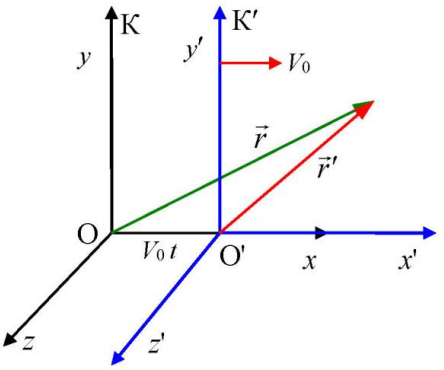


Рис. 1.3.1

Итак, рассмотрим преобразование координат и времени события при переходе от К'-системы к К-системе, если скорость К'-системы равна $\vec{V}_0$ и направлена вдоль оси x (рис. 1.3.1):

$$\begin{cases} x = x' + V_0 t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}. \qquad (1.3.1)$$

В общем случае, когда направление скорости К′-системы относительно К-системы произвольно, формулу преобразования координат при переходе от К′-системы к К-системе можно записать в следующем виде:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}_0 t. \qquad (1.3.2)$$

Обратный переход от К-системы к К′-системе записывается:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}_0 t' = \vec{r} - \vec{V}_0 t\,. \qquad (1.3.3)$$

Отметим, что согласно принципу относительности Галилея все механические явления в ИСО К- и К′-системах происходят одинаково. То есть движения тел отсчета в точках О и О′ относительно друг друга происходят с одной и той же скоростью и в К-, и в К′-системе:

$$V_0 = V_0'; \quad \vec{V}_0 = -\vec{V}_0'\,.$$

Тогда, сравнивая уравнения (1.3.2) и (1.3.3), находим, что $t = t'$, что уже было записано в (1.3.1). Это означает, что время «течет» одинаково во всех ИСО. Иначе говоря, равенство $t = t'$ — условие абсолютной одновременности событий. Время *инвариантно* во всех ИСО.

Для получения преобразования скорости дифференцируем радиус-вектор материальной точки по времени *t* в К-системе:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.3.4)$$

и дифференцируем по времени *t*′ в системе К′:

$$\vec{v}\,' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}\,'}{\Delta t'} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\,. \qquad (1.3.5)$$

Итак, дифференцируя (1.3.2) и (1.3.3) по времени *t* и учитывая, что скорость $\vec{V}_0$ не зависит от времени, получаем *преобразование Галилея для скорости*:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}\,' + \vec{V}_0 \\ \vec{v}\,' &= \vec{v} - \vec{V}_0 \end{aligned}\,. \qquad (1.3.6)$$

Рассмотрим ускорение материальной точки:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{и} \qquad \vec{a}\,' \equiv \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta \vec{v}\,'}{\Delta t'} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt}\,. \qquad (1.3.7)$$

Дифференцируя (1.3.6) по времени и учитывая, что скорость $\vec{V}_0$ постоянна, получаем *инвариантность ускорения* в любых ИСО:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' \qquad (1.3.8)$$

Таким образом, координаты и скорость материальной точки преобразуются при переходе от одной ИСО к другой, следуя преобразованиям Галилея, а ускорение остается инвариантным.

1.3.2. Инварианты и инвариантность законов Ньютона

Помимо ускорения существуют и другие физические величины, которые остаются неизменными в различных ИСО, т. е. являются инвариантами. Рассмотрим важнейшие из них.

1. *Расстояние между двумя точками* — инвариант; что легко увидеть из (1.3.2) и (1.3.3); в самом деле, имеем

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2{}' - \vec{r}_1{}' = \Delta\vec{r}\,' . \qquad (1.3.9)$$

2. *Относительная скорость двух тел* $\vec{v}_{\text{отн}}$ — инвариант; действительно, из (1.3.6) имеем

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2{}' - \vec{v}_1{}' = \vec{v}'_{\text{отн}}. \qquad (1.3.10)$$

3. *Сила* всегда есть функция разности координат (парная сила, например) и относительных скоростей (например, сила трения) $\vec{F}(\vec{r},\vec{v})$. Поэтому сила инвариантна относительно преобразований Галилея:

$$\vec{F} = \vec{F}\,'. \qquad (1.3.11)$$

<u>Пример.</u> Сила упругости в К-системе имеет вид:

$$F = -k(x - x_0),$$

где k — коэффициент упругости.

В К′-системе эта сила равна:

$$F' = -k(x' - x'_0).$$

Подставив преобразования координат $x' = x + vt$ и $x'_0 = x_0 + vt$, получаем:

$$F' = -k(x' - x'_0) = -k(x - vt - x_0 + vt) = -k(x - x_0) = F\ .$$

4. *Масса* — инвариант $m = m'$ при переходе от одной ИСО к другой.

Отсюда получаем важный результат: *законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея*. Так, второй закон Ньютона — *основное уравнение динамики*:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i,$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \qquad (1.3.12)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

инвариантен в любой ИСО.

1.3.3. Уравнение движения тела с переменной массой

Получим уравнение для движения тела с переменной массой, пользуясь инвариантностью законов в различных ИСО. В качестве примера рассмотрим движение ракеты. Пусть:

а) в момент времени t ракета имеет массу m;

б) присоединяемая (отделяемая) масса имеет скорость $\vec{u}$ относительно массы m;

в) рассмотрим ИСО, скорость которой $\vec{V} = \vec{v}$ совпадает со скоростью ракеты в момент времени *t*, такая система отсчета называется сопутствующей системой отсчета;

г) за время от *t* до *t* + *dt* материальная точка приобретает импульс $md\vec{v}$ как за счет внешних сил $\vec{F}dt$, так и за счет присоединяемой (отделяемой) массы $dm \cdot \vec{u}$:

$$md\vec{v} = \vec{F}dt + \vec{u}dm.$$

Разделив обе части на *dt*, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}. \qquad (1.3.13)$$

Это уравнение И. В. Мещерского. Оно описывает движение тела, к которому присоединяется масса со скоростью $\vec{u}$ (это определяется знаком «+» в уравнении (1.3.13)). В силу принципа относительности Галилея это уравнение справедливо в любой ИСО, а не только в сопутствующей ИСО, где оно было получено.

Рассмотрим частные случаи уравнения Мещерского.

А. Величину $\vec{F}_R = \vec{u}\,dm/dt$ в уравнении (1.3.13) обычно называют *реактивной силой*. Пусть движущееся тело теряет массу, т. е. $dm/dt < 0$, и скорость выброса массы $\vec{u}$ направлена в противоположную сторону скорости тела $\vec{v}$. Тогда реактивная сила есть сила ускорения (движение ракеты) $F_R > 0$.

Как меняется скорость ракеты, если внешняя сила равна нулю $\vec{F} = 0$? Тогда уравнение Мещерского для замкнутой системы «ракета — газ» (внешние силы равны нулю, а масса *dm* отделяется с относительной скоростью *u*) имеет вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{u},$$

и запишем проекции этого уравнения на направление движения, сократив на *dt*:

$$mdv = -udm.$$

Если скорость истечения газов постоянна u, находим решение для скорости ракеты:

$$v = -u\ln m + C.$$

Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а масса равна $m = m_0$, то имеем

$$v = -u\ln\frac{m}{m_0} = u\ln\frac{m_0}{m}. \qquad (1.3.14)$$

Это уравнение К. Э. Циолковского.

Б. Если скорость $\vec{u} = 0$, то $\vec{F}_R = 0$ и уравнение похоже на основное уравнение динамики, но только с массой, зависящей от времени $m = m(t)$:

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,. \qquad (1.3.15)$$

Пример такого движения: движение цистерны, из которой выливается вода.

В. Рассматривая случай, когда $\vec{u} = -\vec{v}$ (т. е. присоединяемая масса неподвижна в выбранной системе отсчета или отделяемая масса становится неподвижной в этой системе отсчета), имеем:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,, \qquad (1.3.16)$$

т. е. получили основное уравнение динамики для тела с переменной массой. Пример такого движения: движущаяся платформа, на которую сыплется песок из неподвижного бункера.

Примечание 5. Иван Всеволодович Мещерский (1859–1935), русский и советский механик, с 1902 г. профессор, заведующий кафедрой механики Политехнического института.

Константин Эдуардович Циолковский (1857–1935), русский и советский философ, изобретатель и школьный учитель, основоположник теоретической космонавтики.

1.4. Закон сохранения импульса. Сохранение массы

1.4.1. Импульс (количество движения)

Импульс частицы массы *m* определяется:

$$\vec{p} = m\vec{v}\,, \qquad (1.4.1)$$

где $\vec{v}$ — скорость частицы. Импульс системы материальных точек равен сумме импульсов каждой из точек:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots = \sum_i \vec{p}_i\,. \qquad (1.4.2)$$

Введем понятие замкнутой системы. *Замкнутая система* — совокупность материальных точек (или тел), взаимодействующих друг с другом, но не взаимодействующих с другими (внешними) телами. Понятие замкнутой (иначе изолированной) системы справедливо только в ИСО, иначе в другой, неинерциальной системе возникают дополнительные силы.

Важнейший экспериментальный закон — *закон сохранения полного импульса* замкнутой системы во времени:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const}, \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0\,. \qquad (1.4.3)$$

Или иначе в проекциях имеем:

$$p_x = \text{const}, \qquad p_y = \text{const}, \qquad p_z = \text{const}. \tag{1.4.4}$$

Закон сохранения импульса — следствие *однородности пространства*. Иначе, если замкнутую систему перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе последующих явлений.

1.4.2. Столкновение двух частиц

Пусть замкнутая система состоит из двух материальных точек, которые сталкиваются друг с другом. В любой момент времени импульс системы сохраняется:

$$\begin{aligned} &\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}; \\ &m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}\,'_1 + m_2\vec{v}\,'_2. \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Это уравнение верно для упругих и неупругих ударов. Для абсолютно неупругих ударов массы сталкивающихся тел объединяются, поэтому в правой части уравнения (1.4.5) можно записать импульс объединенного тела $(m_1 + m_2)\vec{v}\,'$. Введем изменение скоростей $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}\,'_1 - \vec{v}_1$, $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}\,'_2 - \vec{v}_2$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$m_1\Delta\vec{v}_1 + m_2\Delta\vec{v}_2 = 0, \tag{1.4.6}$$

или по модулю получаем

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Изменение скоростей обратно пропорционально массам. Рассмотрим изменение скоростей частиц $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$ за малый промежуток времени Δt. Делим обе части уравнения (1.4.6) на малый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2. \tag{1.4.7}$$

Из уравнения (1.4.6) видно, что сообщить одно и то же ускорение большому телу значительно труднее, чем маленькому. Отсюда получаем известное определение *массы как меры инертности тела*. С другой стороны, равенство (1.4.7) определяет третий закон Ньютона.

1.4.3. Сохранение массы в процессах столкновения

В релятивистской механике масса связана с энергией:

$$E = mc^2,$$

где c — скорость света (об этом соотношении подробнее далее в главе 2), и в принципе получаем, что масса системы частиц зависит от энергии столкновения. Так, масса составной частицы может оказаться меньше суммарной массы

отдельных частиц. Это проявление так называемого дефекта масс, когда часть массы переходит в энергию связи составной частицы.

Однако в классической механике подобной связи энергии и массы нет, поскольку масса взаимодействующих частиц сохраняется в процессах столкновения и взаимодействия. Это обстоятельство можно доказать, исходя из принципа относительности Галилея и закона сохранения импульса (ранее в первом пункте п. 1.4 мы воспользовались тем, что масса постоянна).

Рассмотрим *абсолютно неупругое столкновение* двух частиц в ИСО. Именно неупругое взаимодействие сопровождается наибольшим изменением энергии движения, и оно, скорее всего, должно приводить к изменениям массы. Итак, в К-системе записываем закон сохранения импульса двух частиц массами m_1 и m_2, имеющих скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, до и после столкновения:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m\vec{v}\,, \tag{1.4.8}$$

где m — масса составной частицы; $\vec{v}$ — ее скорость. В К'-системе, которая движется со скоростью $\vec{V}_0$ относительно К-системы, закон сохранения импульса имеет вид:

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m\vec{v}'\,. \tag{1.4.9}$$

Запишем преобразования скорости при переходе из К-системы в К'-систему:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{V}_0, \qquad \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{V}_0, \qquad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_0, (.) \tag{1.4.10}$$

Далее подставляя (1.4.10) в (1.4.9) и учитывая (1.4.8), получаем

$$m_1\vec{V}_0 + m_2\vec{V}_0 = m\vec{V}_0\,.$$

Сокращая на скорость $\vec{V}_0$ К'-системы, имеем

$$m_1 + m_2 = m\,. \tag{1.4.11}$$

Это уравнение дает условия аддитивности массы и ее сохранения. *Аддитивность и закон сохранения массы* верны лишь приближенно, в меру справедливости преобразования Галилея.

С другой стороны в силу релятивистского соотношения, связывающего энергию и массу $E = mc^2$, всякие неупругие процессы в системе частиц должны приводить к изменению ее массы. Рассмотрим, с какой точностью можно считать справедливым закон сохранения массы в других процессах, в которых выделяется или поглощается энергия.

Химические реакции. М. В. Ломоносов провозгласил: сумма масс вещества до реакции равна сумме масс после реакции. Проверим, насколько верно это утверждение, ведь в химических реакциях выделяется энергия, следовательно, в силу взаимосвязи энергии и массы сохранение массы имеет приближенный характер. Рассмотрим конкретный пример химической реакции горения, в которой выделяется энергия:

$$\underset{12\,г}{C} + \underset{32\,г}{O_2} = \underset{44\,г}{CO_2} + \underset{4\cdot10^{12}\,эрг}{энергия}. \qquad (1.4.12)$$

Тогда при таких количествах вещества изменение массы составляет:

$$\Delta m = E/c^2 = 4\cdot10^{12}/9\cdot10^{20} \approx 0.45\cdot10^{-8}\ г.$$

Итак, относительное изменение массы продуктов до и после реакции равно

$$\frac{\Delta m}{m} \le 10^{-10}. \qquad (1.4.13)$$

Это маленькая величина, т. е. с очень большой точностью масса в химических реакциях сохраняется.

Ядерные реакции. В ядерной физике происходят реакции с очень большим энерговыделением, при этом относительное изменение массы $\Delta m/m$ — заметная величина. Это явление приводит к так называемому дефекту масс в атомных ядрах и элементарных частицах. Рассмотрим это явление подробнее в главе 2.

Примечание 6. Михаил Васильевич Ломоносов (1711–1765), русский учёный-естествоиспытатель, профессор химии (1745), действительный член Санкт-Петербургской Императорской академии наук (1745) и почётный член Королевской шведской и Болонской академий наук.

1.5. Центр инерции

1.5.1. Центр инерции системы частиц

Центр инерции (сокращения: ЦИ или ЦМ — *центр масс*) системы частиц есть точка, координаты которой определяются средним значением координат частиц, взятых с весовыми множителями, пропорциональными их массам. Так, X — координата ЦИ системы частиц определяется:

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}. \qquad (1.5.1)$$

Аналогично определяются другие координаты Y и Z:

$$Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots};$$

$$Z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}. \qquad (1.5.1а)$$

Тогда в векторной форме радиус-вектор, определяющий положение центра инерции $\vec{R}$, может быть записан:

$$\vec{R} = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z. \qquad (1.5.2)$$

И учитывая, что координаты точек (частиц тела) могут быть записаны в векторной форме:

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z;$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z,$$

из (1.5.1)–(1.5.2) получаем

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i-1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}, \qquad (1.5.3)$$

где M — полная масса системы N частиц.

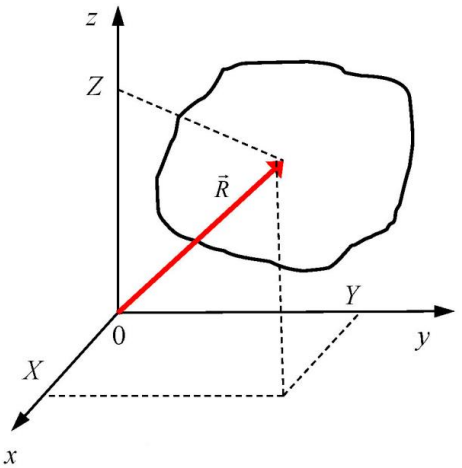


Рис. 1.5.1

Когда система материальных точек имеет непрерывное распределение масс (жидкое или твердое тело), то тело разбивается на маленькие кусочки массой $\Delta m_i = \rho\Delta V_i$ (где ρ — плотность вещества; ΔV_i — элементарный объем i-го кусочка) и центр масс такой системы определяется через предел:

$$\vec{R} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i\vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M}\int_{V_0} \vec{r}\cdot dm = \frac{1}{M}\int_{V_0} \vec{r}\rho dV, \qquad (1.5.3а)$$

где M — полная масса тела. Интеграл от векторной величины разбивается на интегралы по проекциям на оси x, y, z и каждый из них вычисляется отдельно в пределах объема тела V_0.

Продифференцируем обе части уравнения (1.5.3) по времени и получим скорость перемещения ЦИ, выраженную через скорости отдельных частиц (массы материальных точек неизменны):

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{P}}{M}. \qquad (1.5.4)$$

Здесь $\vec{P}$ — полный импульс системы, т. е. скорость центра инерции есть полный импульс системы, деленный на полную массу системы. Отсюда получаем, что центр инерции замкнутой системы обладает замечательным свойством: *скорость ЦИ замкнутой системы постоянна* (поскольку полный импульс сохраняется), тогда как отдельные частицы движутся с изменяющимися скоростями. Итак, имеем

$$\vec{P} = M\vec{V}\,. \tag{1.5.5}$$

Физический смысл соотношения (1.5.5): *полный импульс системы можно рассматривать как импульс одной материальной точки, находящейся в центре инерции системы и имеющей массу, равную сумме масс всех частиц.*

1.5.2. Система центра инерции

Система центра инерции (СЦИ) — это система отсчета, начало координат которой находится в точке центра инерции. Эти системы играют важную роль в механике. В замкнутой системе частиц СЦИ является инерциальной системой отсчета. Переход в СЦИ обычно приводит к упрощению задачи, так как при рассмотрении в ней системы частиц скорость центра инерции равна нулю $\vec{V} = 0$ и, значит, исключается движение частиц как целого, при этом остается только *относительное движение частиц*. В СЦИ становятся ясными свойства внутренних процессов, проходящих в системе частиц.

<u>Пример</u>: атом водорода состоит из протона (масса M, координата $\vec{r}_N$) и электрона (масса m, координата $\vec{r}_e$). Координату центра инерции запишем по определению

$$\vec{R} = \frac{M\,\vec{r}_N + m\vec{r}_e}{M + m}\,. \tag{1.5.6}$$

Перейдем в СЦИ и определим координаты протона и электрона в этой системе отсчета. Получаем следующие координаты ядра и электрона:

$$\vec{r}_N' = \vec{r}_N - \vec{R} = \frac{m}{m+M}\left(\vec{r}_N - \vec{r}_e\right), \quad \vec{r}_e' = \vec{r}_e - \vec{R} = \frac{M}{m+M}\left(\vec{r}_e - \vec{r}_N\right). \tag{1.5.7}$$

Таким образом, в СЦИ координаты обеих частиц выражаются через вектор $\vec{r} = \left(\vec{r}_N - \vec{r}_e\right)$, равный по модулю относительному расстоянию между электроном и ядром. Атом как целое покоится, а движение электрона и ядра внутри системы описывается этой относительной координатой.

Итак, для замкнутых систем, состоящих из большого числа частиц, переход в систему центра инерции уменьшает число независимых координат частиц, исключая координаты, определяющие движение системы как целого.

1.6. Основные задачи динамики

1.6.1. Основное уравнение динамики

В п. 1.2 законы Ньютона были рассмотрены как законы, основанные на экспериментальных измерениях и являющиеся обобщением полученных данных. Во втором законе Ньютона сила и параметры движения (координата, скорость, ускорение) определялись независимо. Однако этот закон можно рассматривать иначе и силу вводить как величину, определяющую скорость изменения импульса, т. е. как причину нарушения закона сохранения импульса в неизолированной системе. В самом деле, если система изолирована (замкнута), то имеем

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0. \qquad (1.6.1)$$

Если система не изолирована (или рассматриваем отдельные тела внутри замкнутой системы), то импульс системы (тела) не сохраняется:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} \neq 0 \quad \text{и} \quad \vec{P} \neq \text{const}. \qquad (1.6.2)$$

Функцию координат и скорости материальной точки, определяющую производную ее импульса по времени, называют *силой*. Поэтому *основное уравнение динамики*, или второй закон Ньютона, записывается

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}\left(\vec{r},\vec{v}\right) \ \text{ или } \ m\vec{a} = \vec{F}\left(\vec{r},\vec{v}\right). \qquad (1.6.3)$$

Это векторное уравнение, поэтому на самом деле это три уравнения для трех проекций:

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dP_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dP_z}{dt} = F_z. \qquad (1.6.4)$$

Это общее определение силы, однако конкретное содержание эти уравнения получают лишь тогда, когда определена эта функция $\vec{F}\left(\vec{r},\vec{v}\right)$. Установление таких зависимостей является основной задачей динамики.

В ряде конкретных задач в силу независимости движения по осям *x*, *y*, *z* могут сохраняться некоторые проекции импульса $\vec{P}$, тогда как для других проекций записываются уравнения типа (1.6.3) и (1.6.4).

<u>Пример 1</u>: рассмотрим сохранение компоненты импульса по оси *x*: $dP_x/dt = 0, P_x = \text{const}$. Получаем, что проекция силы на ось *x* F_x равна нулю, а проекция скорости — v_x = const. То есть если проекция силы равна нулю, то тело сохраняет движение с постоянной скоростью вдоль оси *x*. Это фактически первый закон Ньютона. Итак, получаем, что первый закон Ньютона является как бы следствием второго закона Ньютона. Однако имеет смысл еще раз напомнить, что выделение первого закона Ньютона в отдельный закон необходимо, так как с его помощью определяется инерциальная система отсчета, т. е.

такая система отсчета (ИСО), в которой справедлива запись второго закона Ньютона в виде (1.6.3).

Пример 2: рассмотрим два тела в замкнутой системе, при этом полный импульс тел сохраняется:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}. \qquad (1.6.5)$$

Дифференцируя по времени, имеем

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \text{или} \quad m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2. \qquad (1.6.6)$$

Отсюда получаем третий закон Ньютона:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \qquad (1.6.7)$$

В силу того, что в замкнутой системе $d\vec{P}/dt = 0$, получаем важное следствие, что сумма внутренних сил в замкнутой системе равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_{i(\text{int})} = 0. \qquad (1.6.8)$$

Это условие позволяет нам отделять движение системы тел как целого от внутреннего движения тел относительно центра инерции.

1.6.2. Основные задачи динамики

Движение тел определяется вторым законом Ньютона, при этом существуют два основных типа задач динамики.

1. Известна зависимость координаты от времени (траектория частицы) $\vec{r}(t)$, и тогда находим силу $\vec{F}$.

2. Известна сила $\vec{F}(\vec{r},\vec{v})$, и тогда находим траекторию частицы $\vec{r}(t)$.

Первая задача решается прямым дифференцированием координаты по времени. Например, зависимость координаты от времени для тела, брошенного со скоростью v_0 под углом α к горизонту в однородном поле тяжести, равна

$$\vec{r}(t) = v_0\cos\alpha \cdot t\vec{e}_x + \left(v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}\right)\vec{e}_z. \qquad (1.6.9)$$

Здесь единичные векторы $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_z$ направлены вдоль поверхности и перпендикулярно поверхности Земли соответственно; g — ускорение свободного падения. Дифференцируя (1.6.9) дважды по времени, получаем

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \cdot \vec{e}_x - mg\,\vec{e}_z = -mg\,\vec{e}_z. \qquad (1.6.10)$$

Получаем, как и следовало ожидать, силу тяжести Земли.

Еще один пример: пусть изменение координат частицы со временем выражается следующим соотношением:

$$\vec{r}(t) = \alpha t^2\vec{e}_x + \beta\left(1 - e^{-kt}\right)\vec{e}_y + \gamma t\,\vec{e}_z, \qquad (1.6.11)$$

где α, β, γ и k — постоянные известные величины. Сила, действующая на тело массы m с такими координатами, равна

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\alpha m\vec{e}_x - \beta k^2 m e^{-kt}\vec{e}_y + 0\cdot\vec{e}_z = m\left(2\alpha\vec{e}_x - \beta k^2 e^{-kt}\vec{e}_y\right). \qquad (1.6.12)$$

Действующая сила имеет положительную постоянную составляющую по оси x и убывающую (по экспоненте) отрицательную составляющую по оси y. Вдоль оси z сила равна нулю.

Вторая задача решается интегрированием, при этом используются начальные условия на положение и скорость частицы. Для примера рассмотрим одномерное движение, когда внешняя сила, действующая на тело массой m, зависит только от времени действия t и определяется следующим выражением:

$$F(t) = A\cdot e^{-\alpha t}. \qquad (1.6.13)$$

Пусть нас интересует зависимость пути от времени, если в начальный момент времени $t = 0$ координата его равна нулю $x(t=0)=0$, а скорость $v(t=0)=v_0$. Уравнение динамики приобретает вид:

$$F(t) = A\cdot e^{-\alpha t} = m\frac{dv}{dt}. \qquad (1.6.14)$$

Решаем это уравнение методом разделения переменных: все, что зависит от скорости, переносим в одну сторону уравнения, а все, что зависит от времени, — в другую. Тогда можно взять неопределенный интеграл от обеих частей уравнения и добавить произвольную постоянную в одну из сторон уравнения:

$$\begin{aligned} &mdv = Ae^{-\alpha t}dt;\\ &m\int dv = A\int e^{-\alpha t}dt + C;\\ &mv = -\frac{A}{\alpha}e^{-\alpha t} + C. \end{aligned} \qquad (1.6.15)$$

Константа C определяется из начального условия, что в начальный момент времени скорость равна $v(t=0)=v_0$:

$$mv_0 = -\frac{A}{\alpha} + C \text{ и } C = mv_0 + \frac{A}{\alpha}. \qquad (1.6.16)$$

Далее используем определение скорости и снова разделяем переменные:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = v = v_0 + \frac{A}{\alpha m} - \frac{A}{\alpha m}e^{-\alpha t};\\ &dx = \left(v_0 + \frac{A}{\alpha m} - \frac{A}{\alpha m}e^{-\alpha t}\right)dt. \end{aligned}$$

Интегрируем обе части уравнения и добавляем новую константу:

$$x = \int\left(v_0 + \frac{A}{\alpha m} - \frac{A}{\alpha m}e^{-\alpha t}\right)dt + C_1 = \left(v_0 + \frac{A}{\alpha m}\right)t + \frac{A}{\alpha^2 m}e^{-\alpha t} + C_1. \qquad (1.6.17)$$

Константа C_1 определяется из начального условия для координаты $x(t=0)=0$:

$$0=\frac{A}{\alpha^2 m}+C_1 \text{ и } C_1=-\frac{A}{\alpha^2 m}. \qquad (1.6.18)$$

Окончательно получаем, что x-я координата частицы под действием силы (1.6.13) меняется со временем по закону:

$$x=\left(v_0+\frac{A}{\alpha m}\right)t+\frac{A}{\alpha^2 m}e^{-\alpha t}-\frac{A}{\alpha^2 m}=\left(v_0+\frac{A}{\alpha m}\right)t+\frac{A}{\alpha^2 m}\left(e^{-\alpha t}-1\right). \qquad (1.6.19)$$

Нетрудно привести и разобрать также другие примеры движения частицы под действием силы, зависящей от времени.

Стоит отметить, что чаще в задачах необходимо определять траекторию движения, когда сила зависит от координат и (или) скорости движения. В этом случае задача также решается путем интегрирования, но пути решения уравнений динамики могут быть различными для каждой конкретной ситуации.

1.7. Работа и энергия

1.7.1. Работа силового поля. Мощность

Если на материальную точку (частицу) в каждой точке пространства действует сила, то всю совокупность сил называют *силовым полем*. В общем случае величина силы может меняться при переходе от одной точки пространства к другой и, кроме того, зависеть от времени. Силовое поле можно изображать в виде силовых линий, построенных в пространстве, касательная к которым определяет направление действия силы в данной точке (см. рис. 1.7.1).

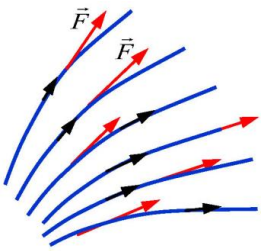


Рис. 1.7.1

Рассмотрим движение материальной точки в силовом поле $\vec{F}$ (рис. 1.7.1). Пусть перемещение в поле сил равно $d\vec{l}$. Тогда *элементарная работа*, совершаемая силой $\vec{F}$, определяется скалярным произведением вектора силы на вектор перемещения:

$$\begin{aligned}\delta A&=F\cdot dl\cdot\cos\theta=F_l\cdot dl=(\vec{F},d\vec{l});\\ \delta A&=\vec{F}\cdot d\vec{l}=F_x dl_x+F_y dl_y+F_z dl_z,\end{aligned} \qquad (1.7.1)$$

где θ — угол между направлением действующей силы и вектором перемещения (рис. 1.7.2), а F_l — проекция силы на направление перемещения.

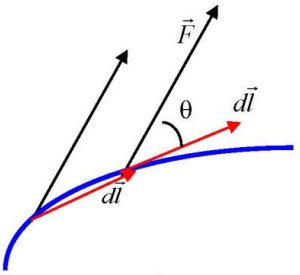


Рис. 1.7.2

Работа — скалярная величина. В зависимости от угла между силой и перемещением работа может иметь разные знаки:

$$\left.\begin{array}{ll} \theta < \pi/2 & \delta A > 0 \\ \theta = \pi/2 & \delta A = 0 \\ \theta > \pi/2 & \delta A < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{— работа совершена силой} \\ \text{— работа силой не совершается} \\ \text{— работа совершена против силы} \end{array}$$

Рассмотрим работу на конечном пути от точки 1 до точки 2 (см. траекторию частицы на рис. 1.7.3). Разобьем весь путь L от точки 1 до точки 2 на элементарные перемещения dl, на каждом из которых силу можно считать постоянной. Работа — аддитивная величина, т. е. работа на конечном участке пути равна алгебраической сумме работ, совершенных над частицей на таких элементарных перемещениях:

$$A_{12} = \sum_i \delta A_i = \sum_i \left(\vec{F}_i, d\vec{l}_i\right) = \sum_i F_i dl_i \cos\theta_i. \qquad (1.7.2)$$

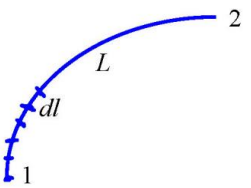


Рис. 1.7.3

Устремив к нулю длины перемещений, а их число — к бесконечности, получим предел суммы, который есть не что иное, как интеграл, вычисляемый по пути движения частицы, т. е. иначе *интеграл по траектории*:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L F_l dl. \qquad (1.7.3)$$

Такой интеграл по траектории еще называют криволинейным интегралом. Итак, работа — криволинейный интеграл вектора $\vec{F}$ вдоль траектории L. Этот интеграл дает по определению работу силы F при перемещении частицы по траектории L.

Графическая иллюстрация представлена на рисунке 1.7.4. На графике отложена проекция силы на направление движения F_l в зависимости от положе-

ния частицы на траектории L. Площадка под кривой на расстоянии элементарного перемещения dl равна элементарной работе $\delta A = F_l dl$. Работа на всем участке 1–2 равна площади под всей кривой от точки 1 до точки 2.

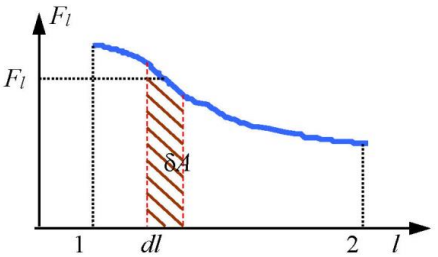


Рис. 1.7.4

Рассмотрим несколько примеров.

А. Рассмотрим постоянную силу F = const. На рисунке 1.7.5 эта сила показана пунктирной линией. Работа постоянной силы A прямо пропорциональна пройденному расстоянию L (на рис. 1.7.5 — красная линия). Пример такой работы: работа силы тяги против постоянной силы трения.

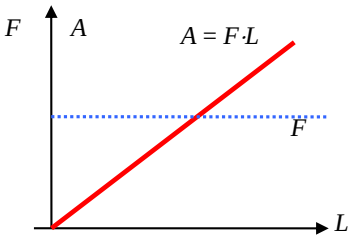


Рис. 1.7.5

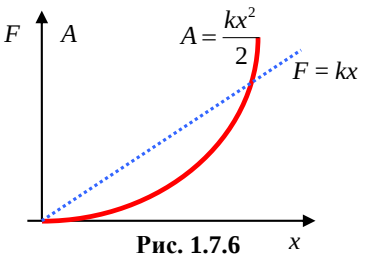


Рис. 1.7.6

Б. Рассмотрим силу упругости, которая пропорциональна смещению из положения равновесия x:

$$F = -kx,$$

где k — постоянная упругости. Сейчас нас интересует только модуль силы упругости $F = kx$. На рисунке 1.7.6 она изображается прямо пропорциональной зависимостью от x (пунктирная линия). Полная работа силы упругости определяется интегралом

$$A = \int_0^x kx'\,dx' = \frac{kx^2}{2}, \qquad (1.7.4)$$

т. е. работа зависит от пути перемещения квадратично (парабола — сплошная линия на рис. 1.7.6).

Примечание 7. Элементарная работа δA — это работа силы на бесконечно малом пути, и она не есть полный дифференциал какой-либо функции, поскольку определяется именно переходом из одной точки в другую. Иначе говоря, A не функция состояния:

$$\delta A \neq d(A) \text{ и } \int_1^2 \delta A = A_{12} \neq A_2 - A_1.$$

Однако в дальнейшем мы часто будем писать dA вместо δA, подчеркивая бесконечно малую работу и по-прежнему понимая, что для работы интеграл по пройденному пути равен работе на этом пути $\int_1^2 dA = A_{12}$.

Единицы работы.

Система СИ (основные единицы: м, кг, с): единица работы 1 Дж = 1 Н · 1 м = = 1 кг·м^2/с^2.

Система СГС (основные единицы: см, г, с): единица работы 1 эрг = = 1 Дн · 1 см = 1 г·см^2/с^2.

Связь между единицами работы: 1 Дж = 10^7 эрг.

Внесистемные единицы работы — электронвольт, килоэлектронвольт и т. д.:

$$1\ \text{эВ} = 1.602\cdot10^{-12}\ \text{эрг};$$
$$1\ \text{КэВ} = 10^3\ \text{эВ},\ 1\ \text{МэВ} = 10^6\ \text{эВ},\ 1\ \text{ГэВ} = 10^9\ \text{эВ},\ 1\ \text{ТэВ} = 10^{12}\ \text{эВ}.$$

Работа равнодействующей силы равна сумме работ каждой отдельной силы. Так, если сила, действующая на тело, может быть представлена в виде суммы двух сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то работа полной силы равна:

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = \left(\vec{F}_1, d\vec{l}\right) + \left(\vec{F}_2, d\vec{l}\right) = dA_1 + dA_2. \qquad (1.7.5)$$

Работа, отнесенная к единице времени, — *мощность силы*:

$$W = \frac{dA}{dt}. \qquad (1.7.6)$$

Обычные единицы мощности: в системе СГС — эрг/с, единица мощности в СИ имеет специальное название Ватт — 1 Вт = 1 Дж/с. Зная мощность, можно получить работу за промежуток времени от t_1 до t_2:

$$dA = W \cdot dt;$$
$$A = \int_{t_1}^{t_2} W(t) \cdot dt. \qquad (1.7.7)$$

Весьма полезно выражение мощности через мгновенную скорость тела $\vec{v} = d\vec{r}/dt$:

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{\left(\vec{F}, d\vec{l}\right)}{dt} = \left(\vec{F}, \frac{d\vec{l}}{dt}\right) \equiv \left(\vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \left(\vec{F}, \vec{v}\right). \qquad (1.7.8)$$

1.7.2. Кинетическая энергия

Преобразуем выражение для работы, пользуясь основным уравнением динамики (1.6.3) и выражением для элементарного перемещения $d\vec{l} = \vec{v}dt$:

$$A = \int_L \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = \int_L \left(\vec{F}, \vec{v}\right) dt = \int_L \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{v}\right) dt = \int_L \left(\vec{v}, d\vec{p}\right). \qquad (1.7.9)$$

Скалярное произведение под интегралом можно представить в виде:

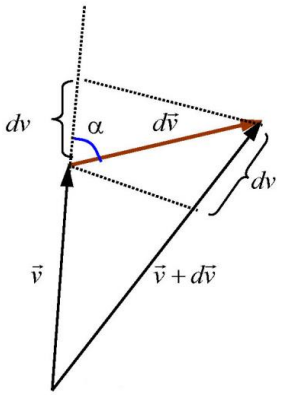
$$\vec{v}d\vec{p} = m\vec{v}d\vec{v} = mvdv. \qquad (1.7.10)$$

Заметим, что это соотношение (1.7.10) сразу не очевидно, так как вектор скорости $\vec{v}$ и вектор ее изменения $d\vec{v}$ находятся под углом друг к другу. Однако из графической иллюстрации (см. рис. 1.7.7), где α — угол между вектором скорости и вектором ее изменения, можно увидеть следующее:

$$\left(\vec{v}, d\vec{v}\right) = v \cdot \left|d\vec{v}\right| \cos\alpha = v \cdot dv,$$

где dv — элементарное приращение длины вектора скорости, заметим при этом, что $\left|d\vec{v}\right| \neq dv$.

Рис. 1.7.7



Соотношение (1.7.10) можно получить и другим способом. Продифференцируем обе части очевидного соотношения: $\left(\vec{v}, \vec{v}\right) = v^2$, и тогда имеем

$$2\left(\vec{v}, d\vec{v}\right) = 2vdv.$$

Итак, подставляя (1.7.10) в (1.7.9) и рассматривая работу на конечном участке пути от точки 1 до точки 2, получаем

$$A_{12} = \int_1^2 \left(\vec{v}, d\vec{p}\right) = m\int_1^2 vdv = m\int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (1.7.11)$$

Введем *кинетическую энергию* как величину, характеризующую движение тела в данной системе отсчета:

$$E_{kin} \equiv K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \qquad (1.7.12)$$

Таким образом, из (1.7.11) делаем вывод: работа силы при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2 равна приращению кинетической энергии этой точки:

$$A_{12} = K_2 - K_1. \qquad (1.7.13)$$

Кинетическая энергия *аддитивна*. Для системы частиц кинетическая энергия всей системы материальных точек равна сумме кинетических энергий отдельных частиц:

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i}. \qquad (1.7.14)$$

Отметим важный момент: *кинетическая энергия системы определяется работой не только внешних, но и внутренних сил*. Этим кинетическая энергия отличается от импульса, который меняется только за счет внешних сил (внутренние силы не меняют импульса всей системы).

Пример: система двух сталкивающихся зарядов (рис. 1.7.8) — кинетическая энергия системы меняется, а импульс всей системы остается постоянным:

Рис. 1.7.8

Можно также записать преобразование кинетической энергии при переходе от одной ИСО к другой:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}' + \vec{V}\right)^2 = \frac{mv'^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + m\vec{v}' \cdot \vec{V} = \\ = K' + \frac{mV^2}{2} + \vec{p}' \cdot \vec{V}. \qquad (1.7.15)$$

Видно из (1.7.15), что *кинетическая энергия не инвариантна* относительно преобразований Галилея.

1.8. Консервативные и неконсервативные силы

1.8.1. Определение консервативных сил

Все силы в макроскопической механике делятся на *консервативные* и *неконсервативные*.

Начнем рассмотрение с примера работы силы тяжести:

$$mg = \text{const}.$$

Пусть материальное тело переходит из точки 1, находящейся на высоте z_1, в точку 2 на высоте z_2 (рис. 1.8.1). Вычислим сначала работу силы тяжести вдоль прямой линии 1–2 (стрелочка на рис. 1.8.1):

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \int_1^2 mg \cdot \cos\alpha \cdot dl = mg\cos\alpha\, L_{12} = mgh = mg\left(z_1 - z_2\right),$$

где $h = z_1 - z_2 = L_{12}\cos\alpha$.

Однако же эта формула справедлива при перемещении вдоль произвольной кривой, например по пути 1–3–2. Это легко увидеть, если разбить путь на

маленькие участки, считая их прямолинейными. Тогда элементарная работа на таких малых участках равна

$$dA = mg\cos\alpha\, dl\,,$$

где теперь угол α — угол между касательной к траектории и вертикалью (силой тяжести) в каждой точке траектории. Суммируя по всем участкам и учитывая, что $\cos\alpha dl = dz$, получаем ту же формулу для полной работы силы тяжести, что и выше:

$$A = mg\left(z_1 - z_2\right) = U_1 - U_2\,. \qquad (1.8.1)$$

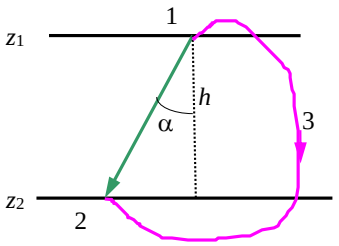


Рис. 1.8.1

Здесь мы ввели функцию $U = mgz$, зависящую только от положения точки. Итак, работа силы тяжести не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки.

Определение: *консервативными называются силы, работа которых не зависит от пути перемещения, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы*.

Таким образом, работа консервативных сил не зависит от пути перехода. Сила тяжести — консервативная сила.

Можно ввести другое, эквивалентное определение консервативных сил: *работа консервативных сил по замкнутому контуру равна* 0.

Легко увидеть, что эти определения эквивалентны, если рассмотрим работу по последовательному перемещению по произвольной замкнутой траектории 1–3–2–4–1 (рис. 8.2). В самом деле, для консервативной силы имеем

$$A_{132} = A_{142}\,.$$

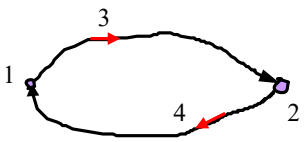


Рис. 1.8.2

С другой стороны работа меняет знак при изменении направления обхода, т. е. $A_{142} = -A_{241}$. Тогда и получаем

$$A_{132} + A_{241} = 0\,, \qquad (1.8.2)$$

что и доказывает, что работа консервативных сил по замкнутому пути равна нулю.

1.8.2. Поле центральных сил

Это важный пример силового поля. Сила $\vec{F}$ называется *центральной*, если она направлена к одной и той же точке (или от нее) и зависит только от расстояния r до этой точки, которую называют *силовым центром*:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r) = F(r)\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\vec{e}_r, \qquad (1.8.3)$$

где $\vec{e}_r$ — единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора. Формула (1.8.3) действительна в системе координат, начало которой помещено в силовой центр (рис. 1.8.3).

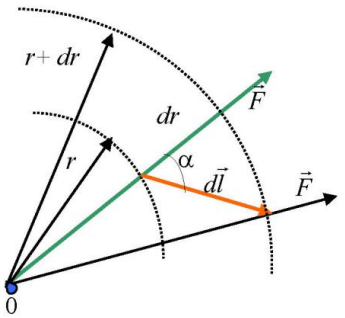


Рис. 1.8.3

Пусть под действием силы точка перемещается на величину $d\vec{l}$. Тогда элементарная работа в поле центральных сил равна:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = F \cdot dl\cos\alpha.$$

Из рисунка 1.8.3 легко увидеть, что

$$dl \cdot \cos\alpha = dr,$$

где dr — приращение абсолютного радиуса. Таким образом, элементарная работа также зависит только от абсолютного значения и приращения r:

$$dA = F(r)dr. \qquad (1.8.4)$$

Полная работа, как и в случае однородной силы тяжести, может быть записана как разность двух функций в начальной и конечной точках:

$$A_{12} = \int_1^2 F(r)dr = U(r_1) - U(r_2). \qquad (1.8.5)$$

<u>Примеры</u> такого силового поля или взаимодействия: гравитационное $F = Gm_1m_2/r^2$ и кулоновское $F = kq_1q_2/r^2$ взаимодействия.

$$dA = \vec{F}_1d\vec{r}_1 + \vec{F}_2d\vec{r}_2 = \vec{F}(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{F} \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}d\vec{r}.$$

Здесь $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ — вектор относительного расстояния. Поскольку сила направлена по вектору относительного расстояния, то работа равна

$$dA = Fdr,$$

т. е. записывается в виде алгебраического произведения (вместо скалярного произведения, как и в (1.8.4)). При этом полная работа записывается таким же интегралом (1.8.5). Таким образом, значение этого интеграла зависит только от относительного перемещения взаимодействующих точек и не зависит от абсолютных перемещений каждой из точек в отдельности.

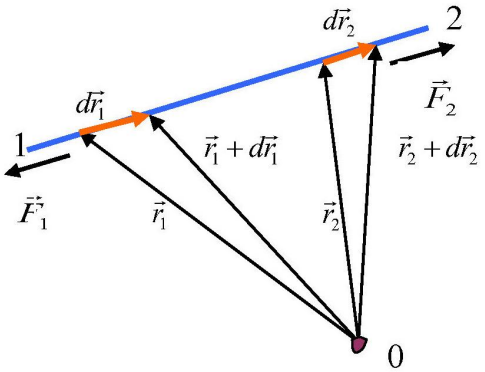


Рис. 1.8.4

Выводы: работа центральных сил не зависит от пути перехода. *Все центральные силы консервативны*.

1.8.3. Неконсервативные силы

К неконсервативным силам относятся все остальные силы. Среди них выделяют *диссипативные* и *гироскопические* силы.

1. Диссипативные силы.

К диссипативным силам относятся, прежде всего, силы трения, пропорциональные силе нормального давления N:

$$F_{\text{тр}} = kN,$$

где k — коэффициент сопротивления, а также любые силы сопротивления при движении тел в среде. Для жидкостей и газов обычно сила сопротивления пропорциональна скорости частицы $F_{\text{с}} \sim v$:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -r\vec{v},$$

где r — коэффициент сопротивления среды. Важно, что для *замкнутой системы работа диссипативных сил всегда отрицательна*, так как действие силы всегда направлено против вектора перемещения или скорости.

$$A_{\text{тр}} = \int \vec{F}_{\text{тр}} d\vec{l} = -\int F_{\text{тр}} dl < 0. \qquad (1.8.6)$$

Примечание 8. Для незамкнутой системы сила трения может быть источником движения, т. е. их работа может быть положительной.

Итак, получаем определение диссипативных сил: диссипативными называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна.

2. Гироскопические силы.

Гироскопические силы зависят от скорости движения материальной точки $\vec{v}$ и действуют перпендикулярно к направлению этой скорости. *Работа гироскопических сил всегда равна нулю*.

Приведем примеры гироскопических сил. К ним относится, например, сила Лоренца. Сила Лоренца — это сила, действующая на заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле индукции $\vec{B}$:

— в системе СИ

$$\vec{F}_{\text{лор}} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]; \tag{1.8.7а}$$

— в системе СГС

$$\vec{F}_{\text{лор}} = \frac{q}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right]. \tag{1.8.7б}$$

Здесь c — скорость света, квадратные скобки означают векторное произведение векторов. Векторное произведение дает новый вектор, который перпендикулярен векторам в квадратных скобках и имеет длину:

$$\left|\vec{F}_{\text{лор}}\right| = qvB \cdot \sin\alpha, \text{ или } \left|\vec{F}_{\text{лор}}\right| = \frac{q}{c}vB \cdot \sin\alpha, \tag{1.8.8}$$

где α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

В классической механике при описании движения относительно неинерциальной системы отсчета вводится *сила Кориолиса* — сила, возникающая при движении тела со скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ относительно вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ системы отсчета:

$$\vec{F}_{\text{кор}} = 2m\left[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\omega}\right]. \tag{1.8.9}$$

Модуль вектора силы Кориолиса равен

$$\left|\vec{F}_{\text{кор}}\right| = 2mv_{\text{отн}}\omega \cdot \sin\alpha, \tag{1.8.10}$$

где α — угол между векторами $\vec{v}_{\text{отн}}$ и $\vec{\omega}$.

Геометрический и физический смысл векторного произведения, а также гироскопические силы будут рассмотрены подробнее ниже в курсе физики.

1.9. Потенциальная энергия. Потенциал поля

1.9.1. Понятие потенциальной энергии

Если поле сил (сила, определенная в каждой точке пространства) не зависит от времени, то такое поле сил называется *стационарным*.

Определение: *стационарное силовое поле, в котором работа силы поля на пути между любыми двумя точками не зависит от выбора пути, а только от положения самих этих точек, называется потенциальным полем, а силы — консервативными*.

Верно и обратное, если работа сил на замкнутом пути равна нулю, то силовое поле потенциально.

Для потенциального поля можно ввести понятие *потенциальной энергии*. В системе, где действуют консервативные силы, зависящие только от конфигурации (взаимного расположения тел), всякая работа связана с изменением конфигурации. Работа таких сил равна нулю, если все тела в системе вернулись в исходную конфигурацию. Тела, находящиеся в силовых полях, обладают возможностью совершить работу. Так, например, тело, находящееся в поле силы тяжести, или растянутая пружина, обладают определенным запасом работы, которую они могут совершить.

Определение: запас работы, определяемый начальной конфигурацией тел системы, называется *потенциальной энергией системы*.

Запас работы можно отсчитывать от разных конфигураций или разного положения тел.

Пример: тело поднято на высоту h от поверхности земли и на высоту H от дна колодца. Для этих двух случаев запас работы различен, таким образом, запас работы зависим от точек отсчета (рис. 1.9.1).

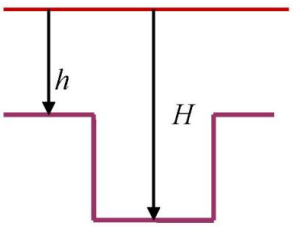


Рис. 1.9.1

Однако при перемещении тела в поле сил работа, равная изменению потенциальной энергии, не зависит от отсчетной конфигурации: просто заменяя одно нулевое положение (положение точки отсчета) другим, потенциальная энергия меняется на постоянную величину. Итак, потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной, определяемой точкой отсчета.

Потенциальная энергия может быть, как положительной величиной (> 0), так и отрицательной (< 0). Так, потенциальная энергия взаимодействия двух положительных зарядов, или двух отрицательных зарядов, больше нуля (обычно на бесконечности потенциальная энергия положена равной нулю), а потенциальная энергия взаимодействия положительного и отрицательного зарядов — меньше нуля.

Работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из положения 1 в положение 2, равна разности (или убыли) потенциальной энергии:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \qquad (1.9.1)$$

Легко увидеть, что работа при переходе из одного положения (1) в другое (2) не зависит от точки отсчета потенциальной энергии. Пусть точка (0) — какое-то начальное положение, от которой производится отсчет потенциальной энергии с неопределенной константой C:

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20} = (U_1 + C) - (U_2 + C) = U_1 - U_2 . \qquad (1.9.2)$$

Физический смысл имеет только работа при переходе между рассматриваемыми положениями точки. Из (1.9.2) видно, что начало отсчета потенциальной энергии никоим образом не влияет на работу при переходе из точки (1) в точку (2). Поэтому говорят, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной величины, а работа определяется разностью потенциальных энергий в двух состояниях системы, поэтому постоянная не играет роли.

1.9.2. Примеры потенциальных энергий

1. *Однородное поле тяжести* (уже рассматривали в п. 1.8):

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2 = U_1 - U_2 . \qquad (1.9.3)$$

Потенциальная энергия в однородном поле тяжести:

$$U = mgh + C .$$

Можно условно положить константу равной нулю (отсчитывать высоту, скажем, от уровня моря), тогда

$$U = mgh . \qquad (1.9.4)$$

2. *Потенциальная энергия растянутой* (*сжатой*) *пружины* (см. рис. 1.9.2). Растянутая или сжатая пружина за счет возвращающей силы совершает колебательное движение около положения равновесия (после того как отпущена). Такие системы, совершающие колебательные движения, называются *осцилляторами*. Возвращающая сила растянутой пружины — *сила упругости*, равна

$$F_{упр} = -k(x - x_0). \qquad (1.9.5)$$

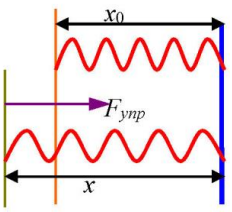


Рис. 1.9.2

Здесь x_0 определяет координату недеформированной пружины, а x — координату подвижного конца пружины. Смещение от положения равновесия определяется разностью $\Delta x = x - x_0$. Элементарная работа растяжения на расстояние dx определяется:

$$dA = |F| \cdot |dx| \cdot \cos\theta = -|F| \cdot |dx|. \qquad (1.9.6)$$

Знак «минус» в (1.9.6) появился из-за того, что вектор перемещения и вектор силы направлены в разные стороны (рис. 1.9.2). Полная работа сил упругости при возвращении пружины в недеформированное состояние равна

$$A = -\int_{x-x_0}^{0} kl\,dl = \frac{k\left(x-x_0\right)^2}{2} = \frac{k\Delta x^2}{2}. \qquad (1.9.7)$$

Эта работа равна убыли потенциальной энергии пружины: $A = U\left(x\right) - U\left(x_0\right)$. Если энергию недеформированной пружины положить равной нулю (в точке $x = x_0$, см. рис. 1.9.3), то запишем потенциальную энергию упругой силы:

$$U\left(x\right) = \frac{1}{2}k\left(x-x_0\right)^2. \qquad (1.9.8)$$

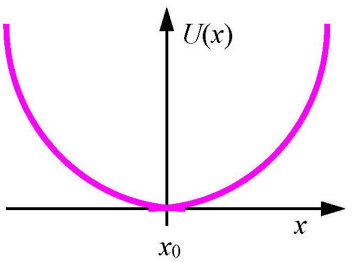


Рис. 1.9.3

Это потенциальная энергия растянутой ($x > x_0$) или сжатой ($x < x_0$) пружины. Поскольку под действием такой силы тело совершает колебательное (осцилляционное) движение, то говорят, что (1.9.8) — *потенциальная энергия осциллятора*.

Часто во многих задачах начало отсчета по оси x берется от координаты недеформированной пружины: $x_0 = 0$. Тогда координата x определяет отклонение пружины от равновесия.

3. *Потенциальная энергия гравитационного поля*. Сила притяжения двух материальных точек с массами M и m, находящихся на расстоянии r, равна

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\,, \qquad (1.9.9)$$

где G — гравитационная постоянная. Это сила — центральная, консервативная. Для простоты считаем, что масса M покоится, а масса m притягивается к ней и перемещается. Сосчитаем работу по перемещению точки m из бесконечности в точку r_0, отсчитанную от тела массой M:

$$A = -\int_{\infty}^{r_0} G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\,d\vec{r} = G\frac{Mm}{r_0} = U\left(\infty\right) - U\left(r_0\right). \qquad (1.9.10)$$

Выберем начало отсчета потенциальной энергии, считая, что на бесконечности $U(\infty)=0$ (см. рис. 1.9.4):

$$U(r)=-G\frac{Mm}{r}. \qquad (1.9.11)$$

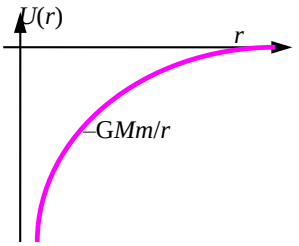


Рис. 1.9.4

Энергия отрицательна. Это означает, что чтобы развести эти два тела на бесконечность, нужно совершить работу внешними силами против сил притяжения. Или иначе, модуль этого выражения дает запас гравитационной энергии (работы) на бесконечном расстоянии между телами до их сближения на расстояние r.

Отметим, что такие же соотношения (с точностью до знака) справедливы для кулоновского взаимодействия, при этом потенциальная энергия взаимодействия зарядов q_1 и q_2:

$$U(r)=k\frac{q_1q_2}{r}, \qquad (1.9.12)$$

где k — постоянная, зависящая от системы единиц. Знак потенциальной энергии зависит от знаков взаимодействующих зарядов.

1.9.3. Связь между силой и потенциальной энергией (градиент)

Установим связь между потенциальной энергией и силой. По заданным консервативным силам можно найти потенциальную энергию. Нас сейчас интересует обратная задача: пусть имеется силовое поле, характеризуемое потенциальной энергией $U(\vec{r})=U(x,y,z)$, и требуется найти силу. Интегральная работа определяется соотношением (1.9.1). Запишем в том же ключе элементарную работу как скалярное произведение силы на перемещение:

$$d\vec{r}=dx\cdot\vec{e}_x+dy\cdot\vec{e}_y+dz\cdot\vec{e}_z,$$

где $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ — единичные векторы вдоль осей x, y, z (орты). С другой стороны, элементарная работа есть убыль потенциальной энергии:

$$\begin{aligned}&\delta A=U(\vec{r})-U(\vec{r}+d\vec{r})=-dU(\vec{r})=\vec{F}d\vec{r};\\&F_xdx+F_ydy+F_zdz=-dU(\vec{r}).\end{aligned} \qquad (1.9.13)$$

Совершим элементарную работу при бесконечно малом перемещении вдоль оси x:

$$F_x dx = U(x,y,z) - U(x+dx,y,z), \tag{1.9.14}$$

где y и z не меняются. Тогда, разделив на dx, получаем *частную производную* от потенциальной энергии по координате x (частная производная от функции нескольких переменных означает производную по одной из переменных, когда остальные переменные остаются постоянными):

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}. \tag{1.9.15}$$

Формально (математически) правильнее поступать, рассматривая перемещение на расстояние Δx, а затем переходить к пределу Δx, оставляя y и z постоянными, и получить частную производную:

$$F_x = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x,y,z) - U(x,y,z)}{\Delta x} \equiv -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}. \tag{1.9.16}$$

Аналогичные соотношения получим для двух других осей. Итак, проекции силы определяются частными производными по соответствующим координатам:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1.9.17}$$

Полный вектор силы равен

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right). \tag{1.9.18}$$

Символически уравнение (1.9.18), если формально вынести потенциальную энергию за скобки, можно записать следующим образом:

$$\vec{F} = -\left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)U(x,y,z) = -\operatorname{grad}U(x,y,z) = -\nabla U(x,y,z). \tag{1.9.19}$$

При этом мы ввели *оператор градиента*:

$$\nabla \equiv \operatorname{grad} \equiv \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.9.20}$$

Примечание 9. Оператором называется то действие, которое нужно совершить с функцией, стоящей справа от оператора. Оператор градиента определяет взятие частных производных от функции, стоящей за оператором справа, и превращает скалярную величину в векторную. В общем смысле оператором называется правило, по которому функции одного класса переводятся в функции другого класса.

Итак, зная потенциальную энергию поля, можно определить силу, действующую в каждой точке пространства. Отметим также, что с точки зрения

математики в выражении (1.9.13) стоит полный дифференциал функции — потенциальной энергии, который записывается в виде

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \qquad (1.9.21)$$

Приращение потенциальной энергии представляет собой скалярное произведение вектора силы $\vec{F}$ в виде (1.9.18)–(1.9.19) и вектора перемещения $d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$, взятое со знаком «минус».

Физический смысл оператора градиента

Рассмотрим частную производную от потенциальной энергии по оси *x*: $\partial U/\partial x$ — это касательная к кривой $U(x)$. Если $\partial U/\partial x > 0$, то сила $F_x = -\partial U/\partial x < 0$ и, следовательно, направлена против направления оси *x*. Таким образом, сила имеет то направление, в котором потенциальная энергия убывает.

Пусть частные производные по координатам от потенциальной энергии возрастают: $\partial U/\partial x > 0$, $\partial U/\partial y > 0$, $\partial U/\partial z > 0$. Тогда градиент потенциальной энергии есть вектор, который складывается из трех направлений возрастания потенциальной энергии по осям *x*, *y*, *z*. По правилам обычного сложения векторов получаем суммарный трехмерный вектор, который указывает направление наиболее быстрого возрастания потенциальной энергии. Сила равна $\vec{F} = -\nabla U$, т. е. направлена в сторону наиболее быстрого убывания потенциальной энергии.

В точках минимума (и максимума) потенциальной энергии сила равна нулю:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Можно построить поверхности равного потенциала, на которых выполняется условие:

$$U(x,y,z) = \text{const}. \qquad (1.9.22)$$

Такие поверхности носят название *эквипотенциальных поверхностей.* На рисунке 1.9.5 для примера приведена серия эквипотенциальных поверхностей. При условии, что

$$U_4 > U_3 > U_2 > U_1.$$

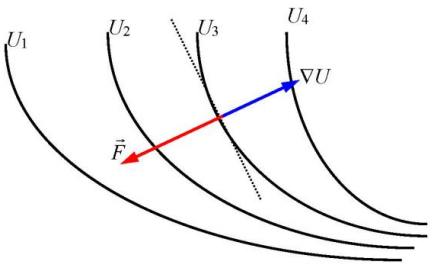


Рис. 1.9.5

На рисунке 1.9.5 показано направление векторов градиента и силы. Вектор градиента и соответственно вектор силы всегда будут направлены перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям.

1.9.4. Поле и потенциал поля

Рассмотрим силу тяготения между двумя телами (или кулоновскую силу взаимодействия между двумя зарядами) в векторной форме:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} \qquad \left(\vec{F} = k\frac{qq_0}{r^3}\vec{r}\right). \tag{1.9.23}$$

Рассмотрим эту силу с точки зрения тела массой m (заряда q). Тогда сила может быть представлена в виде:

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad \left(\vec{F} = q\vec{E}\right), \tag{1.9.24}$$

где вектор $\vec{g}$ (или $\vec{E}$) характеризует силу, действующую на единицу массы (заряда), и носит название *напряженности поля* сил.

В общем случае сила, действующая на тело, может являться результирующей силой со стороны многих тел (зарядов):

$$\vec{F} = -Gm\sum_i \frac{M_i}{r_i^3}\vec{r}_i \qquad \left(\vec{F} = kq\sum_i \frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i\right). \tag{1.9.25}$$

При этом все равно можно ввести понятие напряженности поля со следующей интерпретацией: частица массой m (заряда q) находится в поле, создаваемом окружающими телами, и характеризуемым вектором напряженности $\vec{g}$ (или $\vec{E}$). Таким образом, для напряженности поля выполняется принцип суперпозиции:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + ... + \vec{g}_i + ... = \sum_i \vec{g}_i\,. \tag{1.9.26}$$

Отметим, что для статических задач (статика рассматривает равновесие тел, которое не меняется со временем) понятие поля условно и без него вполне можно обойтись. Однако в динамике (процессы, зависящие от времени) поле является физической реальностью.

Можно ввести потенциал поля (по аналогии с потенциальной энергией):

$$\int_1^2 \vec{g}d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2, \tag{1.9.27}$$

где потенциал поля определяется как потенциальная энергия частицы единичной массы:

$$j(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{m}. \tag{1.9.28}$$

Гравитационный потенциал равен

$$\varphi_{\text{гр}}(r) = -G\frac{M}{r}. \qquad (1.9.29)$$

Соответственно потенциал кулоновского поля записывается:

$$\varphi_{\text{кул}}(r) = k\frac{q}{r}. \qquad (1.9.30)$$

Примечание 10. Иногда в физике, особенно в квантовой физике, когда рассматривают конкретную задачу или частицу, находящуюся в силовом поле, под потенциалом понимают потенциальную энергию $U(r)$.

Работу поля можно представить в виде

$$A_{12} = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (1.9.31)$$

Для поля, создаваемого несколькими телами, потенциал равен сумме потенциалов:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i. \qquad (1.9.32)$$

Связь напряженности и потенциала поля определяется также через градиент аналогично (1.9.19):

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}). \qquad (1.9.33)$$

1.10. Закон сохранения энергии. Границы движения

1.10.1. Полная механическая энергия в потенциальном поле

Рассмотрим движение материальных точек или тел в силовом потенциальном поле. В п. 1.7 было показано, что при перемещении из точки 1 в точку 2 работа силового поля равна изменению кинетической энергии K:

$$A_{12} = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = K_2 - K_1. \qquad (1.10.1)$$

Здесь V_1, V_2 — скорости тела массой m в точках 1 и 2. С другой стороны, для консервативных сил работа равна «уменьшению» потенциальной энергии силового поля:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \qquad (1.10.2)$$

Откуда получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = U_1 - U_2. \qquad (1.10.3)$$

Для любого числа частиц (т. е. любой системы), находящихся в поле консервативных сил, выполняется равенство

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 .$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий называется *полной энергией*:

$$E = K + U. \qquad (1.10.4)$$

Таким образом, получаем *закон сохранения полной механической энергии*:

$$E_1 = E_2 \qquad (1.10.5)$$

или

$$E = \text{const}.$$

В системе с одними консервативными (и гироскопическими) силами полная энергия остается постоянной. В такой системе могут лишь происходить превращения потенциальной энергии в кинетическую энергию и обратно.

1.10.2. Система с диссипативными силами

Пусть в системе наряду с консервативными силами действуют диссипативные силы (например, силы трения). Тогда работа всех сил при перемещении из точки 1 в точку 2 по-прежнему равна изменению кинетической энергии. Разделим всю работу на две части — на работу консервативных и диссипативных сил:

$$A_{12} = A_{12}^{\text{кон}} + A_{12}^{\text{дисс}} = K_2 - K_1. \qquad (1.10.6)$$

Работу консервативных сил можно записать через изменение потенциальной энергии поля:

$$A_{12}^{\text{кон}} = U_1 - U_2. \qquad (1.10.7)$$

Тогда получаем следующий *закон изменения полной энергии*:

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дисс}};$$

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{дисс}}. \qquad (1.10.8)$$

Таким образом, в системе с *диссипативными силами полная механическая энергия не остается постоянной*, а уменьшается по величине, так как работа диссипативных сил отрицательна.

1.10.3. Границы движения

Для простоты рассмотрим одномерное движение, при котором движение материальной точки осуществляется таким образом, что она может перемещаться только вдоль определенного направления (в частности, вдоль прямой). Положение точки задается одной координатой x, отсчитываемой вдоль этой траектории.

При движении в поле консервативных сил имеем кинетическую $K(V)$ и потенциальную $U(x)$ энергии, и при этом выполняется закон сохранения энергии:

$$E = \frac{mV^2}{2} + U(x) = \text{const}. \qquad (1.10.9)$$

Поскольку кинетическая энергия всегда больше нуля ($K \geq 0$), тогда полная энергия $E \geq U(x)$. То есть частица может находиться только в той области пространства, где потенциальная энергия не превосходит величину полной энергии. Точки, в которых выполняется равенство полной энергии и потенциальной, а кинетическая энергия обращается в нуль, т. е.

$$E = U(x), \tag{1.10.10}$$

служат для определения границ области пространства, где может происходить движение материальной точки.

Определение: движение, при котором частица остается в конечной области пространства, называется *финитным движением*.

Пример 1. Потенциальная энергия $U(x)$ материальной точки в зависимости от координаты изображена на рисунке 1.10.1. Прямая линия постоянной энергии $E = \text{const}$ пересекает $U(x)$ в двух точках x_1 и x_2. Так как движение возможно только при условии $E \geq U(x)$, то точки x_1 и x_2, называемые *точками поворота*, определяют границы движения. В этих точках полная энергия $E = U(x)$, а кинетическая энергия равна нулю: $K = 0$, т. е. частица не движется. При движении внутри области меняются кинетическая и потенциальная энергии, при этом минимальная потенциальная энергия и максимальная кинетическая энергия достигаются в точке $x = x_0$. Справа от точки x_0 сила действует против оси x, т. е. в сторону x_0, а слева — вдоль оси x, т. е. опять к точке x_0. Это пример *колебательного* (*осцилляторного*) *движения*. Чем больше (выше) полная энергия, тем больше (шире) область движения точки, т. е. тем больше амплитуда колебаний.

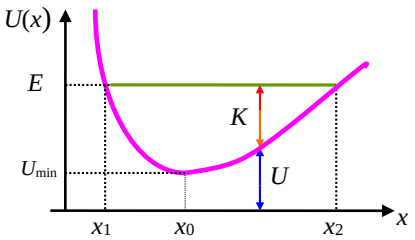


Рис. 1.10.1

Положение равновесия определяется точкой, где сила равна нулю:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 = F. \tag{1.10.11}$$

Когда в этой точке имеем минимум потенциальной энергии — положение равновесия устойчивое, когда максимум — неустойчивое положение равновесия.

Пример 2. Рассмотрим более сложный вид зависимости потенциальной энергии от координаты, изображенный на рисунке 1.10.2. При этом имеем два случая.

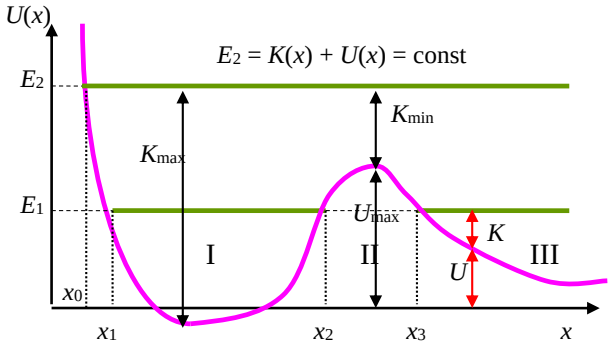


Рис. 1.10.2

1. Рассмотрим движение частицы с энергией $E = E_1$. Движение частицы возможно только в областях I и III, так как только здесь $E \geq U(x)$. Движение в области I, как и в случае примера 1, носит финитный (колебательный) характер.

Движение в области III имеет другой характер. Если частица начинала свое движение из точки x_3, то вследствие того, что $dU/dx < 0$ и сила $F > 0$ (т. е. сила действует направо по оси x), частица будет двигаться направо с ускорением и уйдет на бесконечность. Причем на бесконечности, где потенциальная энергия равна нулю, ее скорость определяется соотношением

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \qquad (1.10.12)$$

Если частица первоначально двигалась справа налево, то в окрестности точки она движется с замедлением, в точке $x = x_3$ она остановится, повернет и пойдет обратно на бесконечность. Такое движение носит название — *инфинитное движение*.

Движение в области II запрещено для частицы с энергией E_1, поэтому переход из области I в область III (и наоборот) запрещен в классической механике. В этом случае говорят, что область II — *потенциальный барьер*, а область I — *потенциальная яма*.

2. В случае, когда полная энергия $E = E_2$ (см. рис. 1.10.2), частица, идущая из бесконечности, проходит над потенциальным барьером до точки x_0 и, отразившись, снова уйдет на бесконечность. Она совершает инфинитное движение. Из бесконечности частица движется с переменной скоростью. Сначала до вершины потенциального барьера частица движется с замедлением, проходит вершину барьера с минимальной скоростью (там, где потенциальная энергия достигает локального максимума), затем ускоряется над скатом потенциальной ямы при уменьшении x, проходит минимум ямы с максимальной скоростью (K_{max}) и снова замедляет свое движение до скорости, равной нулю в точке x_0. Аналогично рассматривается ее движение в обратную сторону от точки x_0 на бесконечность.

1.10.4. Излучение квантов. Эффект Мессбауэра

Рассмотрим *эффект Мессбауэра* как иллюстрацию законов сохранения энергии и закона сохранения импульса.

Согласно квантово-механическим представлениям атомные ядра (или атомы) имеют дискретные уровни энергии. Если ядро (атом) находится в возбужденном состоянии с энергией E_2, то затем система переходит в нижнее состояние с энергией E_1 с испусканием γ кванта энергии (рис. 1.10.3).

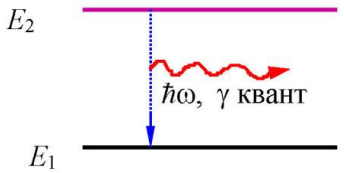


Рис. 1.10.3

Из закона сохранения энергии без учета движения ядра имеем

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_0, \tag{1.10.13}$$

где ω_0 — частота фотона, определяемая разностью энергий уровней; $\hbar$ — постоянная Планка. Однако атом в газе может двигаться, поэтому закон сохранения энергии должен учитывать кинетическую энергию атомов в начальном 1 и конечном 2 состояниях:

$$\left(\frac{p_2^2}{2M} + E_2\right) - \left(\frac{p_1^2}{2M} + E_1\right) = \hbar\omega, \tag{1.10.14}$$

где ω — частота фотона с учетом движения атома; M — масса атома. Закон сохранения импульса для такого процесса имеет вид

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \hbar\vec{k}. \tag{1.10.15}$$

Здесь в правой части (1.10.15) стоит импульс фотона, определяемый $\vec{k}$ — *волновым вектором* фотона, а его модуль — *волновое число* — обратно пропорционален длине волны фотона λ:

$$\left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}, \tag{1.10.16}$$

где c — скорость фотона (света). Выразим $\vec{p}_2$ из (1.10.15) и подставим в закон сохранения энергии (1.10.16):

$$E_2 - E_1 + \frac{\left(\hbar\vec{k} + \vec{p}_1\right)^2}{2M} - \frac{\vec{p}_1^2}{2M} = \hbar\omega.$$

Так как масса атома M велика, а фотон — безмассовая частица, то импульс фотона мал $\hbar k \ll p$, или $\hbar^2 k^2/2M \ll p^2/2M$. Тогда, раскрывая скобки и пренебрегая квадратом фотонного импульса, получаем следующее выражение для энергии фотона:

$$E_2 - E_1 + \frac{\hbar \cdot \left(\vec{k}, \vec{p}_1\right)}{M} = \hbar\omega. \qquad (1.10.17)$$

Величина $\hbar\left(\vec{k}, \vec{p}_1\right)/M$ зависит от скорости атома в конечном состоянии и определяет *энергию отдачи* атома при испускании γ-кванта. В газовой среде атомы обладают разными скоростями (как по величине, так и по направлению), поэтому отдельный атом в силу скалярного произведения $\left(\vec{k}, \vec{p}_1\right)$ получает различную энергию отдачи. Вследствие этого атомы (или ядра) испускают различные по энергии кванты, и поэтому энергетический спектр испущенных фотонов приобретает вид широкого максимума и выглядит примерно так, как показано на рисунке 1.10.4, где I — интенсивность (количество) излученных квантов.

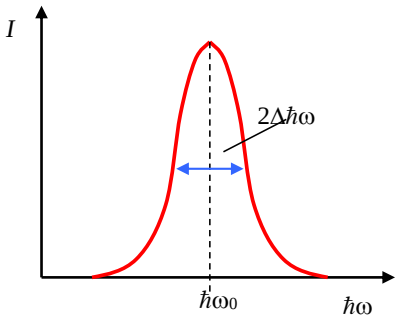


Рис. 1.10.4

Если зафиксируем импульс атома p_1, то тогда максимальные отклонения в энергии кванта определяются значениями косинуса ±1: $\left(\hbar\vec{k}\vec{p}_1\right)_{\max} = \pm\hbar k p_1$, т. е. из (1.10.17) и (1.10.13) получаем:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 \pm \frac{\hbar\omega p_1}{cM} \approx \hbar\omega_0 \pm \frac{\hbar\omega_0 p_1}{cM} = \hbar\omega_0\left(1 \pm \frac{p_1}{Mc}\right).$$

Вводя скорость атома в конечном состоянии $v_1 = p_1/M$, получаем для максимальных отклонений:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0\left(1 \pm \frac{v_1}{c}\right). \qquad (1.10.18)$$

Поэтому, даже если атомы в начальном состоянии имеют одну и ту же энергию, мы вместо определенной линии получаем уширение линии за счет отдачи атома и за счет его движения. Из (1.10.18) получаем оценку для относительного уширения линии за счет теплового движения атомов:

$$\frac{\hbar\omega - \hbar\omega_0}{\hbar\omega_0} = \frac{\Delta\hbar\omega_0}{\hbar\omega_0} \sim \frac{v}{c} \sim 10^{-4}..10^{-10}. \qquad (1.10.19)$$

Минимальная цифра в оценке (1.10.19) получалась при очень низких температурах в газах. Несмотря на небольшое относительное уширение это ограничивало экспериментальные возможности спектроскопии при изучении очень близких энергетических уровней (когда близкие по энергии линии излучения перекрывались).

Идея Мессбауэра (1958) состояла в том, чтобы уменьшить отдачу атома, поместив атомы в кристалл, где они практически неподвижны. При этом отдачу при испускании γ-кванта будет испытывать не отдельный атом с массой M, а весь кристалл в целом с огромной массой. Таким образом, в соотношении (1.10.16) слагаемое $\hbar\left(\vec{k},\vec{p}_1\right)\Big/M_{\text{кристалл}} \to 0$ и ширина линии резко уменьшается (см. рис. 1.10.5). В кристаллах относительное уширение достигает практически величины *естественной ширины* уровня возбужденного атома:

$$\frac{\Delta\hbar\omega}{\hbar\omega} \sim 10^{-15}. \qquad (1.10.20)$$

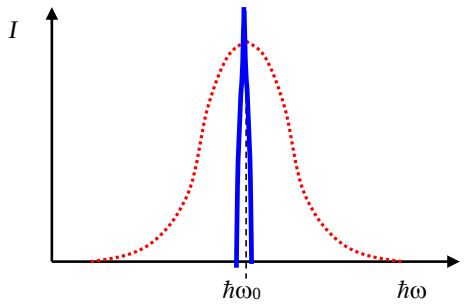


Рис. 1.10.5

Этот эффект открыл новые возможности в спектроскопии. Не только разрешать близкие по энергии линии в спектре, но и измерять малые смещения энергетических линий за счет взаимодействия атомов с окружением. В 1961 г. Мессбауэр получил Нобелевскую премию за новую экспериментальную методику в измерении спектров.

Примечание 11. Рудольф Людвиг Мессбауэр (1929–2011), немецкий физик, Нобелевская премия (1961) за открытие эффекта безотдачного гамма-резонанса.

1.11. Момент импульса и момент силы

1.11.1. Линейное и вращательное движения

В кинематике между поступательным и вращательным движением имеем полное соответствие. Отличие состоит лишь в том, что векторы, определяющие вращательное движение, обладают немного другими свойствами, чем обычные. Это так называемые *аксиальные векторы*, которые определяются через вектор-

ные произведения обычных векторов. Вместо вектора элементарного перемещения вводится вектор малого поворота на угол $d\varphi$ через векторное произведение (см. рис. 1.11.1 и ниже напоминание о векторном произведении векторов, а также Приложение 1 в конце пункта). Итак, скорости и ускорение при вращении материальной точки вводим по аналогии с поступательным движением:

$$\text{перемещение — } d\vec{r} \Leftrightarrow d\vec{\varphi} \text{ — угол поворота } d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}, \vec{r}\right]; \qquad (1.11.1)$$

$$\text{скорость — } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow \vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \text{ — угловая скорость } \vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]; \qquad (1.11.2)$$

$$\text{ускорение — } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \text{ — угловое ускорение;} \qquad (1.11.3)$$

$$\text{импульс — } \vec{p} = m\vec{v} \Leftrightarrow \vec{L} \text{ — момент импульса.} \qquad (1.11.4)$$

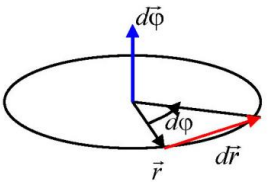


Рис. 1.11.1

<u>Определение</u>: *моментом импульса* материальной точки (МИ, или устаревшее название — *момент количества движения*) относительно точки 0 называется векторное произведение:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] = m\left[\vec{r}, \vec{v}\right]. \qquad (1.11.5)$$

Следовательно, направление вектора МИ перпендикулярно плоскости, образуемой вектором импульса $\vec{p}$ (скорости) и радиус-вектором $\vec{r}$, и определяется по правилу буравчика. Как показано на рисунке 1.11.2, вращаем буравчик в направлении от первого вектора в квадратных скобках ($\vec{r}$) ко второму ($\vec{p}$), тогда поступательное движение буравчика дает направление результирующего вектора $\vec{L}$. По модулю вектор МИ равен

$$L = mvr \cdot \sin\left(\angle\vec{v}, \vec{r}\right), \qquad (1.11.6)$$

где величину $r \cdot \sin\left(\angle\vec{v}, \vec{r}\right) = r\sin\alpha = l$ обычно называют плечом вектора импульса относительно точки 0 (перпендикуляр, опущенный из точки 0 на направление вектора импульса).

МИ системы есть векторная сумма МИ каждой из частиц:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right]. \qquad (1.11.7)$$

Иначе говоря, момент импульса системы есть аддитивная величина.

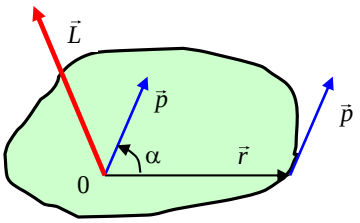


Рис. 1.11.2

1.11.2. Уравнение моментов

Рассмотрим движение одной частицы под действием силы $\vec{F}$, тогда изменение МИ во времени равно

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}[\vec{r},\vec{p}]=\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\vec{p}\right]+\left[\vec{r},\frac{d\vec{p}}{dt}\right]=[\vec{v},\vec{p}]+\left[\vec{r},\frac{d\vec{p}}{dt}\right]=0+\left[\vec{r},\vec{F}\right].$$

Первое векторное произведение в правой части уравнения равно нулю, так как вектор скорости параллелен вектору импульса. Таким образом, получаем уравнение, связывающее изменение момента импульса с действием силы, — *уравнение моментов*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\left[\vec{r},\vec{F}\right]. \qquad (1.11.8)$$

Вектор, стоящий в правой части уравнения, называется *моментом силы* относительно начала отсчета — точки 0:

$$\vec{M}\equiv\left[\vec{r},\vec{F}\right]. \qquad (1.11.9)$$

Формулировка полученного соотношения (1.11.8) звучит так: производная по времени от момента импульса материальной точки относительно неподвижного начала равна моменту действующей силы относительно того же начала.

Модуль вектора момента силы равен:

$$M=F\,r\sin(\angle\vec{F},\vec{r})=F\cdot l, \qquad (1.11.10)$$

где l плечо вектора силы F относительно точки 0. Итак, уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}. \qquad (1.11.11)$$

Уравнение моментов является записью основного уравнения динамики (второго закона Ньютона) для вращательного и криволинейного движения.

Поясним геометрический смысл векторов $\vec{L}$ и $\vec{M}$ и вообще векторного произведения. Направление, как сказано выше, определяется с помощью правила правого винта (буравчика). Величина вектора $\left|\vec{L}\right|$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $\vec{p}$ (рис. 1.11.3):

$$\left|\vec{L}\right|=\left|\vec{r}\right|\cdot\left|\vec{p}\right|\cdot\sin\alpha. \qquad (1.11.12)$$

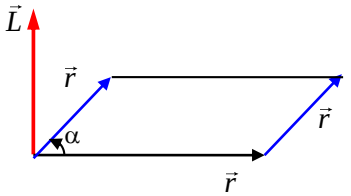


Рис. 1.11.3

В самом деле, величина $|\vec{p}|\sin\alpha$ дает высоту параллелограмма, а величина $|\vec{r}|$ — его основание. То же можно сказать о векторе момента силы $\vec{M}$ (см. (1.11.9) и (1.11.10)).

Уравнение моментов (1.11.11), как и основное уравнение динамики, позволяет решать задачи двух типов.

1. Известна зависимость МИ относительно точки 0, найти момент сил относительно той же точки 0. Задача решается дифференцированием.

2. Известна зависимость от времени момента сил, действующего на частицу относительно точки 0, найти приращение МИ этой частицы. Задача решается интегрированием:

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}dt\,. \qquad (1.11.13)$$

Если известна зависимость момента силы от параметров движения, например угловой скорости, то тогда составляется дифференциальное уравнение, которое решается при заданных граничных и начальных условиях.

1.11.3. Момент импульса и момент силы относительно оси

Уравнение моментов — векторное уравнение, т. е. вместо уравнения (1.11.11) можно записать три уравнения для проекций:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z. \qquad (1.11.14)$$

Нужно различать МИ относительно точки и относительно оси.

Пусть ось z неподвижна и точка отсчета 0, относительно которой рассматриваются моменты, находится на этой оси. *Моментом импульса относительно оси z* называют проекцию вектора $\vec{L}$ на эту ось, который определен относительно произвольной точки 0 на данной оси (см. рис. 1.11.4). Аналогично определяется и момент силы относительно оси.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z\,. \qquad (1.11.15)$$

Если $M_z = 0$, то проекция на ось z не меняется: $L_z = \text{const}$, хотя сам вектор момента импульса может меняться. Например, вектор $\vec{L}$ может вращаться («прецессировать») вокруг оси z при постоянном угле θ (см. рис. 1.11.4).

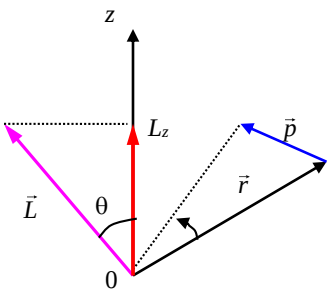


Рис. 1.11.4

Покажем, что проекции момента импульса и момента силы на ось вращения z не зависят от выбора точки 0 на оси z. Запишем векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$ в цилиндрической системе координат, в которой введем координатные оси $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$, как показано на рисунке 1.11.5. На рисунке 1.11.5 показана траектория движения точки **A** и вектор импульса, направленного по касательной к траектории. Радиус-вектор $\vec{r}$ точки **A** записывается:

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z, \tag{1.11.16}$$

где ρ плечо (т. е. перпендикуляр, опущенный из точки A на ось z, как показано на рис. 1.11.5). Вектор импульса имеет вид

$$\vec{p} = p_\rho\vec{e}_\rho + p_\phi\vec{e}_\phi + p_z\vec{e}_z. \tag{1.11.17}$$

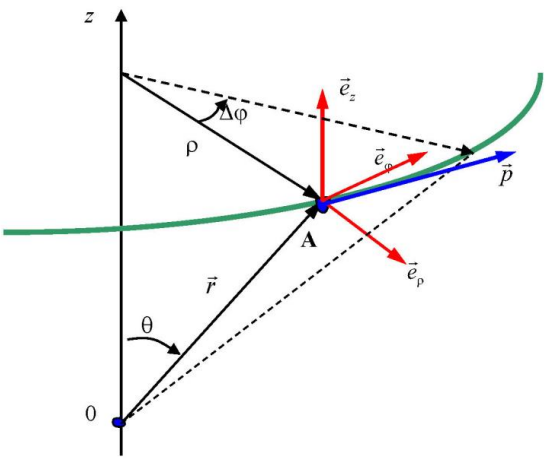


Рис. 1.11.5

Проекция L_z определяется из векторного произведения следующим образом (см. Приложение 1 в конце пункта):

$$L_z = r_\rho p_\phi - r_\phi p_\rho. \tag{1.11.18}$$

Из рисунка 1.11.5 получаем, что проекции радиус-вектора равны:

$$r_\varphi = 0 \quad \text{и} \quad r_\rho = r\cdot\sin\theta = \rho.$$

Так как линейная скорость выражается через угловую скорость с помощью соотношения (1.11.2):

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] \quad \text{и} \quad v_\varphi = \rho\omega_z,$$

записываем выражение для проекции импульса:

$$p_\varphi = mv_\varphi = m\rho\omega_z.$$

Тогда получаем момент импульса относительно оси z в виде

$$L_z = \rho p_\varphi = \rho m v_\varphi = \rho^2 m\omega_z. \tag{1.11.19}$$

Аналогично имеем для проекции момента силы:

$$M_z = \rho F_\varphi. \tag{1.11.20}$$

Видно, что проекции МИ и силы на ось z зависят только от расстояния ρ до оси и не зависят от координаты z. Отсюда следует вывод: проекции момента силы M_z и импульса L_z не зависят от выбора точки (начала отсчета) на оси $0z$.

Приложение 1. Напомним, что векторное произведение в декартовой системе координат для векторов $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ и $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ есть вектор $\vec{C}$, модуль которого равен:

$$\left|\vec{C}\right| = C = \left|\left[\vec{A}, \vec{B}\right]\right| = A\cdot B\cdot\sin\left(\angle\vec{A}, \vec{B}\right).$$

Сам вектор $\vec{C}$ в компонентах записывается в виде:

$$\vec{C} = \left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \vec{e}_x\left(A_yB_z - A_zB_y\right) + \vec{e}_y\left(A_zB_x - A_xB_z\right) + \vec{e}_z\left(A_xB_y - A_yB_x\right).$$

Векторное произведение в цилиндрической системе координат для векторов $\vec{A}(A_\rho, A_\varphi, A_z)$ и $\vec{B}(B_\rho, B_\varphi, B_z)$ записывается аналогичным образом:

$$\left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \vec{e}_\rho\left(A_\varphi B_z - A_z B_\varphi\right) + \vec{e}_\varphi\left(A_z B_\rho - A_\rho B_z\right) + \vec{e}_z\left(A_\rho B_\varphi - A_\varphi B_\rho\right).$$

1.12. Закон сохранения момента импульса

1.12.1. Момент импульса системы точек

Рассмотрим систему материальных точек (частиц). Момент импульса (МИ) всей системы определяется суммой МИ отдельных частиц:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i\,. \tag{1.12.1}$$

Все векторы в (1.12.1) определены относительно одной и той же точки отсчета 0. Момент сил относительно той же точки также равен сумме моментов сил:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i\,. \tag{1.12.2}$$

Разбивая все силы, действующие на частицы системы, на внутренние и внешние, последнее уравнение можно записать:

$$\vec{M} = \vec{M}_{\text{int}} + \vec{M}_{ext} = \sum_{i,k}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] + \sum_{i}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right], \qquad (1.12.3)$$

где $\vec{F}_{ik}$ — сила, действующая на частицу i со стороны материальной точки k, а $\vec{F}_i$ — внешняя сила, действующая на точку i. Нетрудно увидеть, что суммарный момент внутренних сил равен нулю $\vec{M}_{\text{int}} = 0$. Это следует из того, что внутренние парные силы равны по модулю и противоположны по направлению $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, а плечи этих сил одинаковы. В самом деле, из рисунка 1.12.1 видно, что для пары взаимодействующих частиц i и k имеем следующее соотношение:

$$h = r_i \sin\alpha_i = r_k \sin\alpha_k .$$

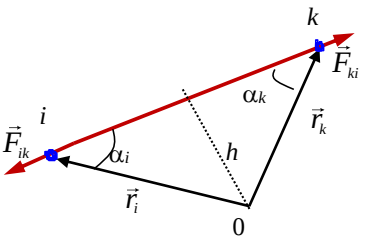


Рис. 1.12.1

Из этого следует, что

$$\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_k, \vec{F}_{ki}\right] = 0 . \qquad (1.12.4)$$

Итак, для системы взаимодействующих частиц уравнение моментов имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext}, \qquad (1.12.5)$$

куда входят только моменты внешних сил.

1.12.2. Закон сохранения МИ для замкнутых систем

Для замкнутой системы внешних сил нет и, следовательно, момента внешних сил $\vec{M}_{ext} = 0$. Тогда из (1.12.5) получаем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \qquad (1.12.6)$$

Или иначе получаем, что момент импульса замкнутой системы сохраняется:

$$\vec{L} = \text{const}. \qquad (1.12.7)$$

Соотношение (1.12.7) отражает *закон сохранения момента импульса замкнутой системы*. Наряду с законами сохранения импульса и энергии закон сохранения МИ является фундаментальным законом природы.

Для одной материальной точки, если момент силы равен нулю $\vec{M}_{ext}=0$, получаем также

$$\vec{L}=\left[\vec{r},\vec{p}\right]=\text{const}. \qquad (1.12.8)$$

Рассмотрим несколько примеров.

А. Рассмотрим движение свободной частицы, относительно точки отсчета 0 имеем $\vec{L}=\left[\vec{r},\vec{p}\right]=\text{const}$. Как видно из рисунка 1.12.2, можно записать

$$L=ph, \qquad (1.12.9)$$

где h — перпендикуляр, опущенный из точки 0, на направление движения частицы. Итак, при свободном движении частицы вдоль прямолинейной траектории ее МИ не меняется относительно выбранного центра 0.

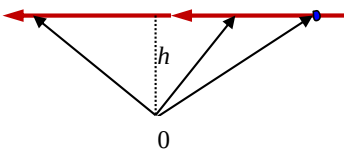


Рис. 1.12.2

Б. При движении частицы по кругу с постоянной скоростью v сила, действующая на частицу, может быть направлена к центру или от него (см. рис. 1.12.3). Таким образом, вектор силы можно записать $\vec{F}=F\vec{e}_r$, и тогда момент этой силы равен нулю $\vec{M}=\left[\vec{r},\vec{F}\right]=0$, поскольку угол между радиус-вектором и вектором силы равен нулю. Поэтому МИ не меняется при движении частицы по окружности с постоянной скоростью:

$$L=rp=mvr=m\omega r^2. \qquad (1.12.10)$$

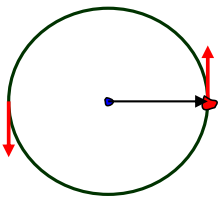


Рис. 1.12.3

Вращение с постоянной скоростью оставляет постоянным момент импульса, вектор которого направлен по оси вращения (на рис. 1.12.3 вектор смотрит на нас из плоскости рисунка).

При переходе к другой точке отсчета момент импульса меняется. В самом деле, рассмотрим отсчет момента импульса от точек 0 и 0′. Как видно из рисун-

ка 1.12.4, переход к другой системе отсчета (т. е. от точки 0 к точке 0′) МИ преобразуется следующим образом:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}' + \vec{R}, \vec{p}] = [\vec{r}', \vec{p}] + [\vec{R}, \vec{p}];$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{R}, \vec{p}], \qquad (1.12.11)$$

где $\vec{R}$ — вектор относительного расстояния между точками отсчета.

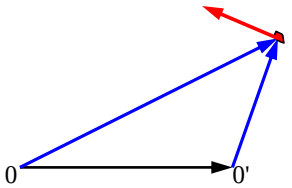


Рис. 1.12.4

1.13. Движение частицы в центральном поле

1.13.1. Сохранение момента импульса в центральном поле

В п. 1.8 рассматривались центральные силы и было показано, что их работа не зависит от пути перехода между двумя точками, т. е. центральные силы консервативны. Итак, центральная сила записывается в виде

$$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{e}_r = F(r)\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (1.13.1)$$

где r — расстояние от центра поля. Очевидно, что в этом случае удобнее задачу рассматривать в сферической системе координат. Поскольку эта сила консервативна, то можно ввести потенциальную энергию, которая также зависит только от расстояния до центра поля:

$$\vec{F} = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r. \qquad (1.13.2)$$

При движении в центральном поле момент силы равен нулю, так как угол между векторами в векторном произведении равен нулю:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = F(r)[\vec{r}, \vec{e}_r] = 0. \qquad (1.13.3)$$

Тогда из уравнения моментов (1.12.5) получаем, что момент импульса (МИ) есть постоянная величина.

При движении частицы в центральном поле полный момент импульса сохраняется. Сохранение МИ происходит, несмотря на то, что система (одна частица во внешнем поле) не является замкнутой.

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = \text{const}. \qquad (1.13.4)$$

Итак, вектор $\vec{L} = \text{const}$, т. е. его величина и его направление сохраняются.

С другой стороны вектор МИ перпендикулярен к векторам $\vec{r}$ и $\vec{p}$ (рис. 1.13.1), откуда следует, что движение частицы происходит в плоскости, перпендикулярной к $\vec{L}$. Получаем, что частица, двигаясь в центральном поле, *имеет плоскую орбиту* (траекторию).

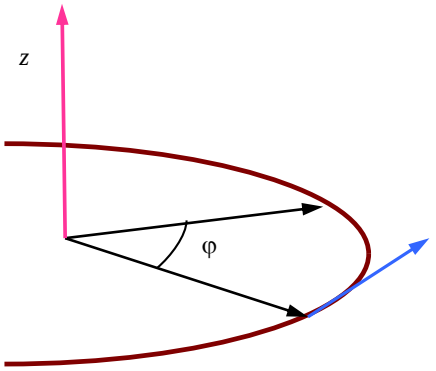


Рис. 1.13.1

Если направим ось z по вектору $\vec{L}$, тогда $L = L_z$ и траектория лежит в плоскости (x, y), перпендикулярной оси z. В п. 1.11 получали, что проекция МИ на ось равна $L_z = m\rho^2\omega_z$. В нашем случае вектор $\vec{r}$ лежит в плоскости орбиты, тогда для момента импульса имеем:

$$L = mr^2\omega = mr^2\frac{d\phi}{dt} = \text{const}. \qquad (1.13.5)$$

Таким образом, МИ частицы характеризуется скоростью изменения азимутального угла φ (угловой скоростью) и расстоянием до центра поля.

<u>Геометрическая интерпретация движения частицы по орбите</u>. Найдем площадь малого сектора OAB (рис. 13.2), определяемого двумя лучами OA и OB и бесконечно малой дугой AB:

$$dS = S_{OAB} \cong \frac{1}{2}(OB)\cdot(AC) = \frac{1}{2}r\cdot(AB)\sin\alpha.$$

Здесь α — угол между радиусом $r = (OB)$ и бесконечно малой дугой $(AB) = v \cdot dt$ (в пределе маленькая дуга AB направлена по касательной к орбите). Тогда для площади сектора получаем:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2}r\cdot v dt\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{r},\vec{v}\right]\right|dt = \\ &= \frac{dt}{2m}\left|\left[\vec{r},\vec{p}\right]\right| = \frac{dt}{2m}L. \end{aligned} \qquad (1.13.6)$$

Введем понятие *секториальной скорости* как площади, описываемой радиус-вектором частицы за единицу времени:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} \equiv \dot{\vec{S}} = \frac{1}{2}[\vec{r},\vec{v}]. \qquad (1.13.7)$$

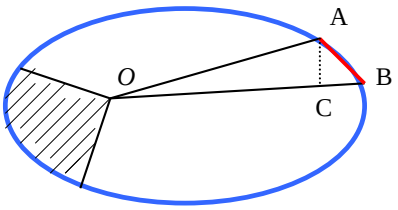


Рис. 1.13.2

Здесь «точка» над вектором (или другой величиной) означает производную от этой величины по времени — такое обозначение часто встречается в механике. В силу сохранения МИ (1.13.4) секториальная скорость постоянна. Суть этого утверждения — второй закон Кеплера, гласящий, что *секториальная скорость постоянна при движении частицы в центральном поле*:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}. \qquad (1.13.8)$$

В результате имеем следующие свойства движения частицы в центральном поле:

1) движение плоское, плоскость проходит через точку O;

2) секториальная скорость постоянна.

Примечание 12. Первый закон Кеплера касается траектории тела в поле с потенциальной энергией $U(r) = \alpha/r$.

1.13.2. Закон сохранения энергии

Центральные силы консервативны, следовательно, полная энергия частицы постоянна (как в замкнутой системе). Разложим импульс частицы на две составляющие вектора: $\vec{p} = \vec{p}_r + \vec{p}_\varphi$ (напомним, что ось z направлена перпендикулярно траектории частицы и проекция импульса на эту ось равна нулю, а ось $\vec{e}_\varphi$ направлена перпендикулярно к оси $\vec{e}_r$, см. рис. 1.13.1). Тогда момент импульса и полная энергия определяются соответственно:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}_r + \vec{p}_\varphi] = [\vec{r}, \vec{p}_\varphi]; \quad L = rp_\varphi; \qquad (1.13.9)$$

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m} + U(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \qquad (1.13.10)$$

Слагаемое в (1.13.10) $L^2/2mr^2$ носит специальное название: *центробежная энергия*, поскольку оно связано с вращательным движением частицы. Из уравнения (1.13.10) видно, что в уравнении для определения энергии остается только одна переменная — расстояние до центра r. Таким образом, движение ча-

стицы в центральном поле можно рассматривать как одномерное (радиальное) движение в поле с *эффективной потенциальной энергией*:

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + U_{eff}(r), \quad U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \tag{1.13.11}$$

Таким образом, к обычному центральному потенциалу мы добавили часть, связанную с угловым движением, которая также имеет центральную симметрию.

Задача о движении частицы в центральном поле сводится фактически к одномерной задаче о движении частицы вдоль радиуса в эффективном потенциале.

В качестве примера рассмотрим эффективную потенциальную энергию гравитационного поля с потенциальной энергией:

$$U(r) = -\gamma\frac{Mm}{r} = m\varphi(r),$$

где $\varphi(r)$ — потенциал поля, введенный в п. 1.9. Гравитационный потенциал имеет характер притяжения, а центробежный потенциал имеет отталкивающий характер, как показано на рисунке 1.13.3. Там же показана эффективная (суммарная) потенциальная энергия U_{eff}, которая представляет собой отталкивание на малых расстояниях и притяжение на больших расстояниях и имеет потенциальную яму на промежуточных расстояниях.

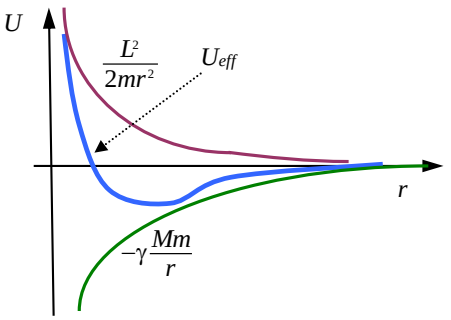


Рис. 1.13.3

1.13.3. О траектории частицы

Запишем уравнения для компонент импульса несколько иначе:

$$\begin{aligned} \vec{p}_r &= m\vec{v}_r = m\frac{dr}{dt}\vec{e}_r = m\dot{r}\vec{e}_r; \\ \vec{p}_\varphi &= m\vec{v}_\varphi = m\left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r}\right] \equiv m[\vec{\omega}, \vec{r}]. \end{aligned} \tag{1.13.12}$$

Вектор угловой скорости направлен перпендикулярно плоскости орбиты, т. е. вдоль вектора $\vec{L}$ и оси z. Так как угол между вектором угловой скорости и радиус-вектором равен $\pi/2$, то

$$p_\varphi = m\frac{d\varphi}{dt}r \equiv mr\dot{\varphi}.$$

Тогда подставляя импульс в уравнения (1.13.9) и (1.13.10), получаем

$$\left.\begin{aligned} E = \text{const} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + U(r) \\ L = \text{const} = mr^2\dot{\varphi} \end{aligned}\right\}. \qquad (1.13.13)$$

Подставляя $\dot{\varphi}$ из второго уравнения (1.13.13) в первое, получаем для скорости радиального движения (производной длины радиуса) следующее выражение:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}\,. \qquad (1.13.14)$$

Последнее уравнение осуществляет связь между радиусом нахождения частицы и временем движения, или в данном случае неявную зависимость радиуса $r = r(t)$ от времени:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}}\,;$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} + \text{const}. \qquad (1.13.15)$$

Исключим время в (1.13.14) и (1.13.15) с помощью второго уравнения в (1.13.13):

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}dt.$$

При этом находим уравнение, определяющее плоскую траекторию частицы, т. е. связь между r и φ:

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} + \text{const}. \qquad (1.13.16)$$

Границы радиального движения частицы определяются равенством (1.13.13), когда радиальная скорость частицы равна нулю $\dot{r} = 0$ (рис. 1.13.4*а*):

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \qquad (1.13.17)$$

Отметим, что равенство нулю радиальной скорости $\dot{r} = 0$ не означает, что частица остановилась, поскольку она обладает скоростью вдоль траектории $v_\varphi \neq 0$ ($L = \text{const}$).

При финитном движении, т. е. когда существуют $r_{\min}$ и $r_{\max}$, траектория не обязательно является замкнутой (рис. 1.13.4*б*). За одну петлю, т. е. при прохож-

дении от r_{max} до r_{min} и снова до r_{max}, радиус-вектор частицы повернется на следующий угол:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L/r^2\, dr}{\sqrt{2m(E-U) - L^2/r^2}}. \qquad (1.13.18)$$

Условие замкнутости траектории состоит в том, чтобы $\Delta\varphi$ было равно рациональной части от 2π, или, иначе, $\Delta\varphi = 2\pi\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа.

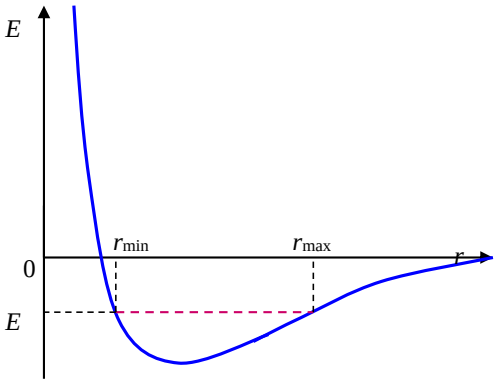


Рис. 1.13.4*а*

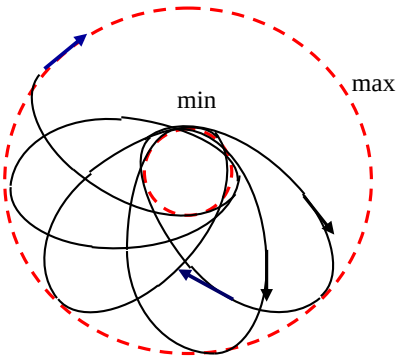


Рис. 1.13.4*б*

В общем случае потенциальной энергии $U(r)$ траектория финитного движения не замкнута. Существуют, однако, *два типа полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты*. Это поля с потенциальной энергией, обратно пропорциональной расстоянию до центра или прямо пропорциональной квадрату расстояния:

$$U(r) \sim \frac{1}{r}, \quad U(r) \sim r^2. \qquad (1.13.19)$$

Задача о движении в кулоновском или гравитационном поле с потенциальной энергией $U(r) = \alpha/r$ — это задача Кеплера. Не решая уравнения (1.13.15) и (1.13.16) для этого поля, запишем ответ: траектория частицы представляет собой одно из *конических сечений* плоскостью, а именно — *эллипс*, *гипербола*, *парабола* (см. рис. 1.13.5, т. е. представляет собой кривую, получающуюся при пересечении поверхности конуса и плоскости).

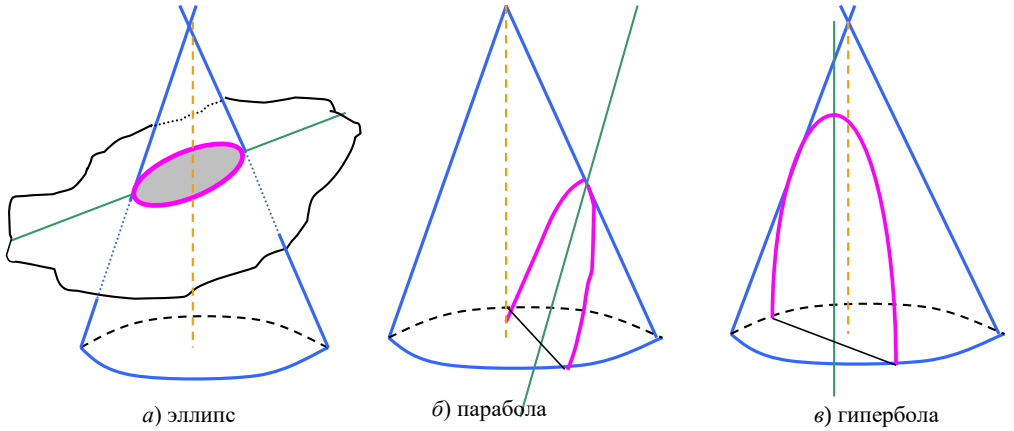


Рис. 1.13.5

Эллипс получается при произвольном сечении плоскостью конической поверхности под углом к оси и боковой образующей. В частном случае получаем окружность, когда плоскость сечения перпендикулярна оси конической поверхности. Гипербола получается, когда плоскость сечения параллельна оси конической поверхности. А парабола есть результат сечения плоскостью, которая параллельна боковой образующей конической поверхности.

Какая траектория реализуется — это зависит от знака постоянной α в формуле $U(r) = \alpha/r$. Так, при отталкивающем взаимодействии $\alpha > 0$ всегда будет гипербола (см. рис. 1.13.5*в* и 1.13.6*а*).

Если имеем притяжение $\alpha < 0$, то траектория может быть любой из вышеприведенных типов, а какая именно, зависит от полной энергии частицы E. Если $E < 0$, то имеем финитное движение и траектория частицы есть эллипс. При энергии, равной $E = 0$, движение инфинитное и траектория имеет вид параболы (со скоростью, равной нулю на бесконечности). Когда полная энергия частицы $E > 0$, получаем также инфинитное движение с траекторией по гиперболе (рис. 13.6*б*).

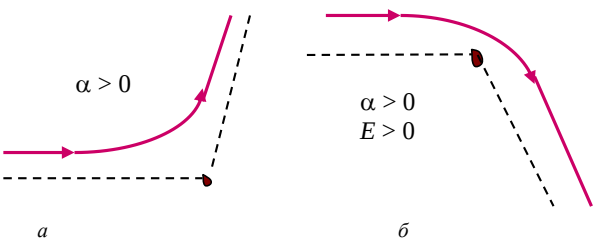


Рис. 1.13.6

1.14. Столкновение двух тел

1.14.1. Приведенная масса

В механике только задача двух тел имеет аналитическое решение в общем виде. В п. 1.13 рассматривалось движение одной частицы в поле, центр которого не двигался. Более реалистический случай — это когда взаимодействуют две частицы, которые образуют замкнутую систему. Поэтому задачу об их движении удобнее решать в системе центра инерции (СЦИ). Центр инерции замкнутой системы из двух частиц либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно вследствие закона сохранения импульса.

Радиус-вектор (координаты) центра инерции (ЦИ) определяется (рис. 1.14.1, см. также п. 1.5):

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (1.14.1)$$

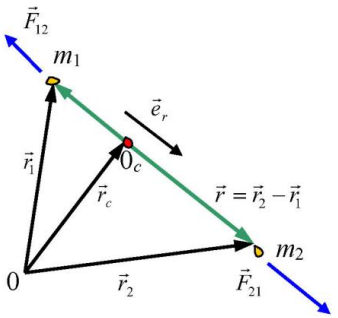


Рис. 1.14.1

Выберем новую систему отсчета, центр которой поместим в центр инерции (т. е. на рис. 1.14.1 совмещаем центры 0 и 0_c), тогда в формуле (1.14.1) имеем $\vec{r}_c = 0$ и следующее соотношение:

$$m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2. \qquad (1.14.2)$$

С другой стороны, расстояние между двумя частицами (рис. 1.14.1) — это относительное расстояние:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (1.14.3)$$

Из этих двух уравнений (1.14.2) и (1.14.3) находим радиус-векторы частиц в системе ЦИ через вектор относительного расстояния:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \qquad (1.14.4)$$

Силы взаимодействия по третьему закону Ньютона могут быть записаны (направления векторов определены в соответствие с рис. 1.14.1):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -F(r)\vec{e}_r. \qquad (1.14.5)$$

Запишем уравнения движения для каждой из частиц:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -F(r)\,\vec{e}_r; \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = F(r)\,\vec{e}_r. \end{cases} \qquad (1.14.6)$$

Перенеся массу в уравнениях (1.14.6) в правую часть, вычтем первое уравнение из второго:

$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) F(r)\vec{e}_r = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F(r)\vec{e}_r\,.$$

Итак, получаем уравнение движения в виде

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F(r)\,\vec{e}_r\,, \qquad (1.14.7)$$

где ввели обозначение $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — *приведенная масса*.

Формально мы перешли к задаче движения одной «эффективной» частицы в поле центральных сил $F(r)$, причем эта движущаяся частица обладает эффективной массой μ.

Таким образом, любая задача о движении *двух взаимодействующих тел* сводится к решению задачи о движении одного тела с эффективной массой в центральном поле. Поэтому все выводы, полученные в предыдущем параграфе, справедливы при решении этой задачи двух тел. В частности, получаем плоские траектории движения двух частиц: сначала находим координаты относительного движения $r(t)$ или траекторию $r(\varphi)$, а затем координаты отдельных частиц $r_1(t)$ и $r_2(t)$. При этом получаем те же траектории для отдельных частиц. Так, для полей типа (1.13.19): эллипсы, параболы и гиперболы.

Приведем несколько примеров задачи двух тел.

А. *Двойные системы звезд*: в такие системы обычно входят звезды с разными массами и соответственно с разными по размерам траекториями — эллипсами (рис. 1.14.2*а*).

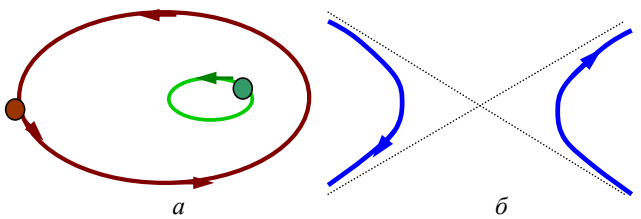


Рис. 1.14.2

Б. *Позитроний* — система, состоящая из электрона и позитрона: у частиц одинаковые массы и одинаковые траектории.

В. *Рассеяние заряженных частиц* друг на друге. На рисунке 14.2*б* показаны траектории сталкивающихся частиц с зарядами одинаковых знаков.

1.14.2. Неупругие столкновения

Неупругие столкновения — это такие столкновения, при которых часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию сталкивающихся тел. Степень неупругости зависит от того, какая часть энергии переходит во внутреннюю энергию. В качестве примера можно рассмотреть следующую задачу: пуля пробивает доску и теряет часть энергии, которая идет на изменение внутренней структуры и теплоту.

Предельный случай неупругого удара — *абсолютно неупругий удар* — это когда оба тела при столкновении сливаются в одно общее (см. рис. 1.14.3). При этом выполняется закон сохранения импульса, а в законе сохранения энергии необходимо учитывать, что часть кинетической энергии удара переходит во внутреннюю энергию частиц.

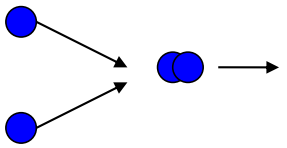


Рис. 1.14.3

В столкновениях атомных частиц неупругие процессы начинают происходить, только начиная с некоторой энергии сталкивающихся частиц, а при меньших энергиях происходят только упругие столкновения. Таким образом, обнаруживается порог неупругой реакции. В качестве пороговой реакции рассмотрим процесс, обратный процессу столкновения частиц, — процесс распада составной частицы.

Распад частиц

Рассмотрим распад частицы массой m на две частицы с массами m_1 и m_2. Рассмотрим этот процесс как в лабораторной системе отсчета, где распадающаяся частица массой m имеет скорость $\vec{V}$ (рис. 1.14.4), так и в СЦИ (рис. 1.14.5), где она покоится. Частицы, появившиеся в результате распада, имеют скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в лабораторной системе отсчета и скорости $\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{02}$ в СЦИ.

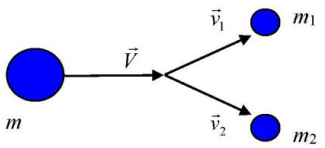


Рис. 1.14.4

Лабораторная система отсчета

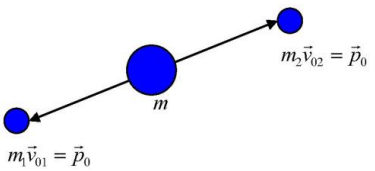


Рис. 1.14.5

Система центра инерции

В СЦИ имеем закон сохранения импульса $p_1 = m_1 v_{01} = p_2 = m_2 v_{02} = p_0$, тогда закон сохранения энергии запишется в следующем виде:

$$E_{\text{вн}} = E_{1\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_2}, \qquad (1.14.8)$$

где $E_{\text{вн}}$ — внутренняя энергия частицы до распада; $E_{1\text{вн}}$ и $E_{2\text{вн}}$ — внутренние энергии частиц после распада. Введем энергию распада, т. е. ту часть энергии, которая выделилась из внутренней энергии распадающейся частицы:

$$\varepsilon = E_{\text{вн}} - E_{1\text{вн}} - E_{2\text{вн}}. \qquad (1.14.9)$$

Тогда получаем

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2} p_0^2.$$

Таким образом, энергия распада частицы равна кинетической энергии частицы с приведенной массой:

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2\mu}. \qquad (1.14.10)$$

Если ε известно, то находим p_0 и скорости частиц в СЦИ:

$$v_{01} = \frac{p_0}{m_1}, \quad v_{02} = \frac{p_0}{m_2}. \qquad (1.14.11)$$

Примечание 13. Эти же уравнения (1.14.10)–(1.14.11) справедливы для абсолютно неупругого удара, если процесс рассматривать в системе центра масс (СЦИ).

Проанализируем возможные углы вылета θ одной из частиц по отношению к скорости первоначальной частицы в лабораторной системе. Пусть $\vec{V}$ — скорость первичной частицы в лабораторной системе отсчета (ЛСО), $\vec{v}_1$ — скорость одной из частиц в ЛСО, $\vec{v}_{01}$ — ее скорость в СЦИ. Тогда, следуя преобразованиям Галилея для скорости, имеем следующее соотношение:

$$\vec{v}_1 - \vec{V} = \vec{v}_{01}, \qquad (1.14.12)$$

Последнее равенство возводим в квадрат:

$$v_1^2 + V^2 - 2v_1 V \cos\theta = v_{01}^2.. \qquad (1.14.13)$$

Здесь θ и есть угол вылета частицы по отношению к скорости первоначальной частицы как угол между векторами $\vec{V}$ и $\vec{v}_1$ в ЛСО. Это уравнение дает зависимость скорости частицы после распада от направления ее вылета в ЛСО.

Можно проанализировать эти зависимости графически, как показано на рисунке 1.14.6. Для этого строим окружность радиусом v_{01}. Затем к центру окружности проводим вектор $\vec{V}$. Вектор $\vec{v}_1$ представляет собой сумму векторов $\vec{V}$ и $\vec{v}_{01}$.

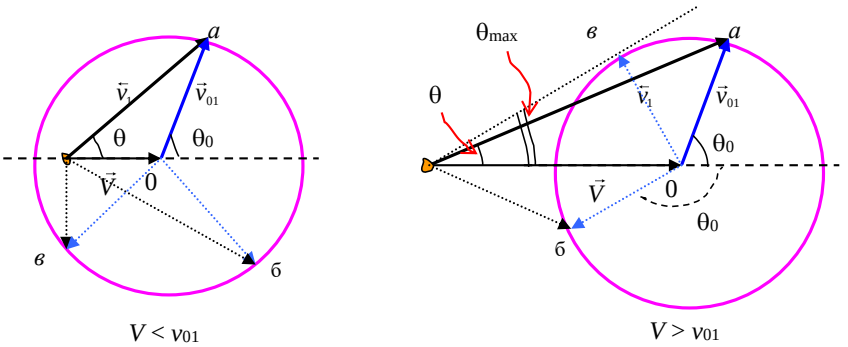


Рис. 1.14.6

Существуют две возможности (см. рис. 1.14.6).

1. Скорость первичной частицы меньше скорости одной из вылетевших частиц (пусть частицы 1) в СЦИ $V < v_{01}$. Это показано на левой части рисунка 1.14.6, где помечены три возможные ситуации с разными направлениями $\vec{v}_{01}$ (т. е. разными углами θ_0): *а–в* (синим цветом помечены векторы в СЦИ). В этом случае частица 1 может вылететь под любым углом θ от 0 до 2π, так как при любом выбранном угле θ_0 имеется угол θ.

2. Скорость первичной частицы больше скорости частицы 1 в СЦИ $V > v_{01}$ как это показано на правой части рисунка 1.14.6, где также помечены три возможные ситуации: *а–в*. Из рисунка 1.14.6 видно, что какое бы мы ни брали θ_0, частица 1 может вылететь только вперед. Существует максимальный угол вылета частицы θ_{max}, который определяется касательной к окружности, случай *в* на правом рисунке 14.6, и который получается из уравнения

$$\sin\theta_{max} = \frac{v_{01}}{V}. \qquad (1.14.14)$$

Аналогичный анализ можно провести для неупругого столкновения.

1.14.3. Упругие столкновения

Столкновение двух частиц называется *упругим*, если оно не сопровождается изменением их внутреннего состояния. В законе сохранения энергии внутреннюю энергию тел можно не учитывать. Выберем лабораторную систему отсчета, где одна из частиц покоится $\vec{p}_2 = 0$, а другая частица налетает с импульсом $\vec{p}_1$. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2}; \qquad (1.14.15)$$
$$\vec{p}_1 = \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2.$$

Выразим $\vec{p}\,'_1$ из закона сохранения импульса и подставим в закон сохранения энергии:

$$\frac{p_1^2}{m_1} = \frac{p_1^2 + p'^2_2 - 2\vec{p}_1\vec{p}\,'_2}{m_1} + \frac{p'^2_2}{m_2}.$$

Вводя угол θ_2 между векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}\,'_2$, выразим p'_2:

$$p'_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos\theta_2. \qquad (1.14.16)$$

Будем интерпретировать полученный результат графически. Проведем вектор $\vec{p}_1$, построим окружность радиусом $m_2 p_1 / (m_1 + m_2)$, центр которой лежит на векторе $\vec{p}_1$, а ее левый край (см. рис. 1.14.7) проходит через начало вектора $\vec{p}_1$. При этом возможны два случая, когда $m_1 > m_2$ и $m_1 < m_2$ (на рис. 1.14.7 случаи *а* и *б* соответственно).

Диаметр окружности, равный $2m_2 p_1 / (m_1 + m_2)$ и будучи умноженный на $\cos\theta_2$, дает вектор $\vec{p}\,'_2$ (на рис. 1.14.7 угол θ_2 — угол, вписанный в окружность). Из закона сохранения импульса видно: угол θ_1 — угол отклонения 1-й частицы (налетающей) после столкновения. Угол α — угол разлета 1-й и 2-й частиц после столкновения.

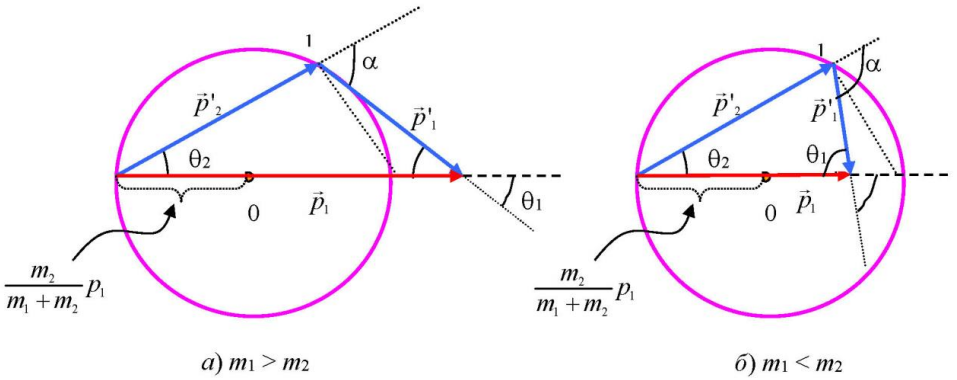


Рис. 1.14.7

1. При $m_1 > m_2$ видно (на рис. 1.14.7*а* передвигаем точку 1 по линии окружности и смотрим, как меняются углы), что угол разлета α меняется от 0 до $\pi/2$. Также видно, что имеется максимальный угол отклонения θ_{1max}, определяемый моментом, когда $\vec{p}\,'_1$ касается окружности. Таким образом, когда налетает частица (тело) большей массы и упруго сталкивается с частицей (телом) меньшей массы, то обе частицы летят *вперед* после столкновения.

2. При $m_1 < m_2$ (также меняем положение точки 1 на рис. 1.14.7*б*) угол разлета α меняется от $\pi/2$ до π, а угол рассеяния θ_1 меняется от 0 до π. В этом случае, когда налетает частица меньшей массы на покоящуюся частицу большей массы, то после столкновения частицы разлетаются в разные стороны.

3. При $m_1 = m_2$ все точки начала и конца векторов лежат на окружности. Угол разлета частиц $\alpha = \pi/2$, т. е. разлет частиц происходит под прямым углом. При этом $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$. При лобовом столкновении $\theta_2 = 0$.

1.15. Рассеяние частиц. Эффективное сечение

1.15.1. Рассеяние на силовом центре

Рассмотрим снова рассеяние на силовом центре или в качестве силового центра возьмем центр инерции двух сталкивающихся частиц.

Если имеем отталкивающие силы, то в качестве траектории получаем всегда гиперболу, выгнутую от отталкивающего центра (рис. 1.15.1). При притяжении между налетающей частицей и силовым центром траектория также имеет вид гиперболы, но «изогнутую» к центру. Однако параметры и решение самой задачи одинаковы для обоих случаев, поэтому рассмотрим один из конкретных случаев — пример, изображенный на рисунке 1.15.1, — отталкивающий центр.

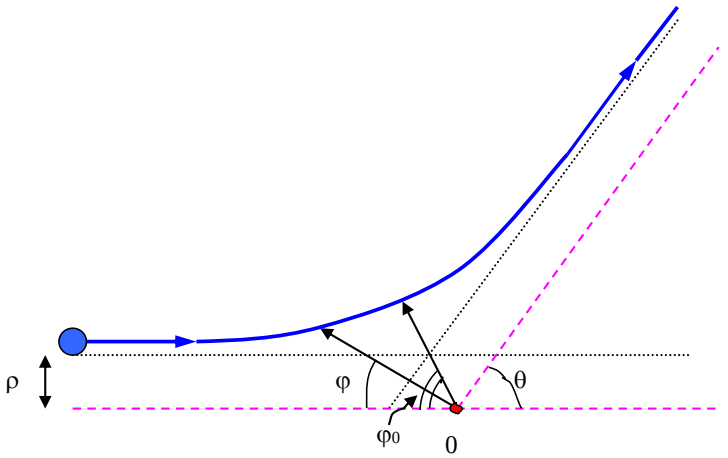


Рис. 1.15.1

Введем следующие параметры движения частицы: ρ — прицельное расстояние; θ — угол рассеяния частицы; m — ее масса; v_∞ — скорость налетающей частицы, находящейся далеко от центра (на бесконечности). Введем также центральный угол φ, отсчитанный от горизонтальной оси, параллельной начальной скорости частицы. Легко также видеть из рисунка 1.15.1, что центральный угол φ_0, определяющий кратчайшее расстояние от центра 0 до траектории частицы, связан с углом рассеяния следующим соотношением:

$$\theta = \pi - 2\varphi_0. \qquad (1.15.1)$$

Итак, на бесконечности, где, считаем, потенциальная энергия равна нулю, полная энергия и момент импульса имеют следующие значения:

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad L = m\rho v_\infty. \qquad (1.15.2)$$

Тогда угол φ_0, определяемый формулой (1.13.16) из п. 1.13, равен

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\dfrac{L}{mr^2}}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E-U\right)-\dfrac{L^2}{m^2r^2}}}dr = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\dfrac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1-\dfrac{\rho^2}{r^2}-\dfrac{2U}{mv_\infty^2}}}dr. \qquad (1.15.3)$$

Здесь мы уже воспользовались соотношениями (1.15.2). Формула (1.15.3) дает связь между прицельным параметром ρ и углом φ_0, а следовательно, и углом рассеяния θ.

Кулоновская или гравитационная потенциальная энергия может быть записана как

$$U = \frac{\alpha}{r}.$$

Для кулоновского поля потенциальная энергия имеет вид $U = kq_1q_2/r$, для гравитационного — $U = -GmM/r$. Не вычисляя в нашем курсе интеграл (1.15.3), запишем для этих полей конечный результат — связь между прицельным параметром ρ и углом рассеяния θ (φ_0):

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{mv^2\rho}{\alpha}. \qquad (1.15.4)$$

В 1910 г. Эрнест Резерфорд вместе с Гансом Гейгером и Эрнстом Марсденом измеряли рассеяние α-частиц (заряд $2e$) на тонких пластинках золота и серебра, фактически на ядрах Ag и Au. По сути они рассеивали α-частицы на центрах с потенциальной энергией, равной

$$U = \frac{Ze \cdot 2e}{r}, \qquad (1.15.5)$$

где Ze — заряд ядра. Фактически это была попытка экспериментально проверить формулу (1.15.4).

Примечание 14. Эти же уравнения (1.14.10)–(1.14.11) справедливы для абсолютно неупругого удара, если процесс рассматривать в системе центра масс (СЦИ).

1.15.2. Эффективное сечение

Однако формулу (1.15.4) непосредственно на опыте не проверить, поскольку она написана для определенного прицельного параметра ρ. Реально α-частицы от источника летят под любыми прицельными параметрами, которые экспериментально не определить. В эксперименте с микрочастицами мы имеем дело не с индивидуальным отклонением одной частицы, а с рассеянием целого пучка одинаковых частиц, падающих на рассеивающий центр с одинаковыми скоростями v_∞, но под разными прицельными параметрами ρ. Следовательно, частицы пучка рассеиваются также под разными углами θ.

Поэтому в физике вводится другая, очень важная характеристика процесса рассеяния — *сечение*, или *эффективное сечение*.

Определение: *эффективное сечение* — величина, характеризующая вероятность перехода системы сталкивающихся частиц в результате их рассеяния, как упругого, так и неупругого, в определенное конечное состояние.

Конечное состояние характеризуется углом рассеяния θ. Пусть dN — число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале от θ до θ + $d\theta$. Само это число dN зависит от числа падающих частиц, точнее, от плотности частиц в потоке.

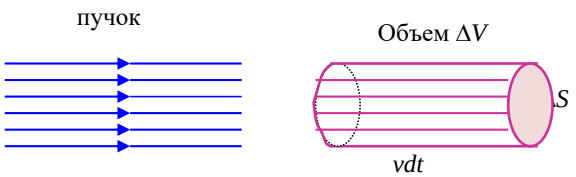


Рис. 1.15.2

Обозначим через n плотность падающих частиц (количество частиц в единице объема), а через v их скорость вдоль пучка, тогда число падающих частиц на поперечную площадку ΔS (см. рис. 1.15.2) за время dt равно

$$dN_{\text{пад}} = nv\Delta S dt.$$

Значит, за единицу времени через единицу площадки проходит nv частиц. Величина nv носит название *плотности потока частиц*.

Тогда эффективное сечение определяется как отношение числа рассеянных частиц под определенным углом (в растворе $d\theta$) к числу падающих частиц на единицу площади в единицу времени:

$$d\sigma = \frac{dN}{nv}. \qquad (1.15.6)$$

Иначе, эффективное сечение — это число «положительных» событий (попадание при рассеянии в нужный раствор углов) при единичной плотности потока падающих частиц. Размерность сечения равна размерности площади, так как имеем следующие размерности входящих в (1.15.6) величин:

$$[dN] = 1/T,\ [v] = L/T,\ [n] = 1/L^3,$$

где L — длина, а T — время. Тогда получаем, что размерность сечения — квадрат длины:

$$[d\sigma] = L^2. \qquad (1.15.7)$$

Величина сечения определяется видом рассеивающего поля и является *важнейшей характеристикой процесса рассеяния*. Измеряется экспериментально и служит для определения структуры сталкивающихся частиц.

В классической механике связь между углом рассеяния θ и прицельным параметром ρ взаимно однозначна. Это означает, что в интервал углов рассеяния от θ до θ + $d\theta$ рассеиваются только те частицы, которые летят в соответ-

ствующем интервале прицельных расстояний от ρ до ρ + $d\rho$. Поэтому число частиц, летящих в интервал (θ...θ + $d\theta$) в единицу времени, можно записать

$$dN = dSnv = 2\pi\rho|d\rho|nv, \qquad (1.15.8)$$

где dS — площадь кольца между радиусами от ρ до ρ + $d\rho$ (см. рис. 1.15.3).

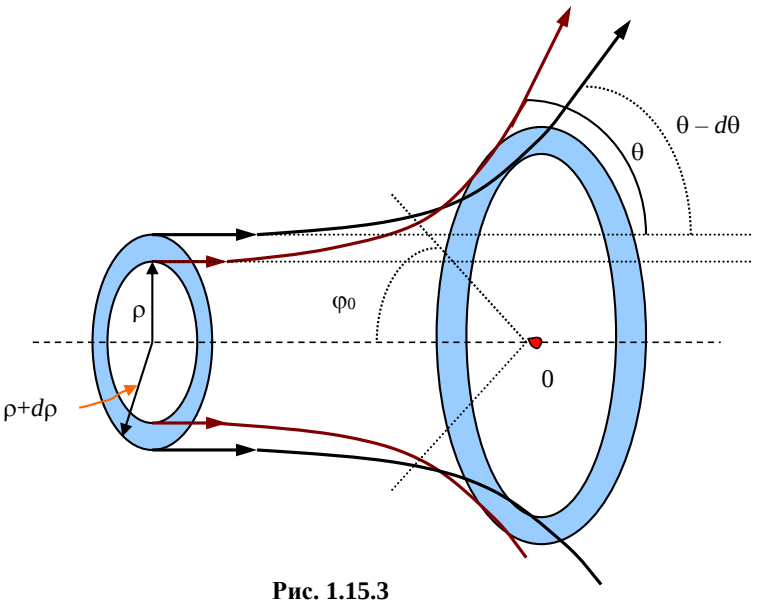


Рис. 1.15.3

Примечание 15. В (1.15.8) стоит модуль прицельного параметра, поскольку большим прицельным параметрам соответствуют меньшие углы рассеяния. Таким образом, интервалу прицельных параметров (ρ... ρ + $d\rho$) соответствует интервал углов (θ...θ – $d\theta$), как показано на рисунке 1.15.3, и поэтому $d\rho \sim -d\theta$. Поскольку сечение — положительная величина, мы пишем модуль прицельного параметра.

Итак, пользуясь определением (1.15.6), сечение может быть выражено через прицельное расстояние:

$$d\sigma = 2\pi\rho|d\rho|. \qquad (1.15.9)$$

Однако часто удобнее с экспериментальной точки зрения характеризовать сечение углами, под которыми вылетают частицы, поскольку на эксперименте приборы — детекторы — измеряют число рассеянных частиц под каким-то углом. Этот угол при измерении может меняться, таким образом исследуется зависимость количества зафиксированных частиц (сечение) от угла рассеяния. Поэтому перепишем (1.15.9) в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|d\theta. \qquad (1.15.10)$$

Все частицы, которые попали в кольцо между радиусами ($\rho...\rho + d\rho$), попадают в кольцевой «раструб» ($\theta...\theta - d\theta$), изображенный на рисунке 1.15.3, т. е. рассеиваются под одними и теми же углами. Удобнее выражать сечение через «объемный», или *телесный*, угол, при этом получим информацию обо всех частицах, которые пересекли кольцевую площадку.

Примечание 16. О телесном угле. Телесный угол вводят как отношение площадки dS на поверхности сферы радиусом r к квадрату этого радиуса (рис. 1.15.4):

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \tag{1.15.11}$$

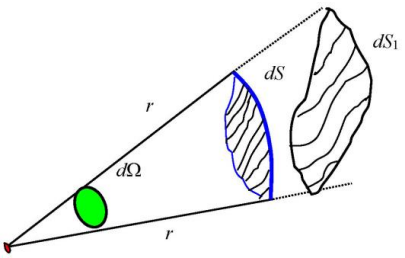


Рис. 1.15.4

Можно провести лучи из начала координат, проходящие через границы площадки dS, которые образуют некоторый «раструб». Причем любая поверхность dS_1, опирающаяся на dS или имеющая свои границы на стенках «раструба», будет иметь один и тот же телесный угол $d\Omega$.

В качестве примера телесного угла можно привести «рупор»: любая поверхность внутри его границ имеет тот же телесный угол. Полный телесный угол равен

$$\Omega = 4\pi, \tag{1.15.12}$$

что легко получить, если подставить всю площадь поверхности сферы $S = 4\pi r^2$ в (1.15.11).

Примечание 17. В сферической системе координат бесконечно малый элемент поверхности имеет вид

$$d^2S = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Тогда бесконечно малый элемент телесного угла равен

$$d\Omega = \frac{d^2S}{r^2} = \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Выбирая в качестве поверхности площадь кольца:

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta,$$

получаем элемент телесного угла в виде (1.15.13).

В нашем случае рассеяния получаем, что телесный угол определяется площадью кольца на поверхности сферы, вырезаемого двумя конусами с углами раствора θ и $\theta - d\theta$ (см. рис. 1.15.5). Сосчитаем площадь этого кольца, считая, что в случае бесконечно малого угла $d\theta$ кривизной поверхности можно пренебречь. Площадь тонкого кольца равна произведению длины окружности

$$2\pi r_\perp = 2\pi r \sin\theta$$

на ширину кольца $rd\theta$ (длина малой дуги):

$$dS = 2\pi r_{\perp} \cdot rd\theta = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta.$$

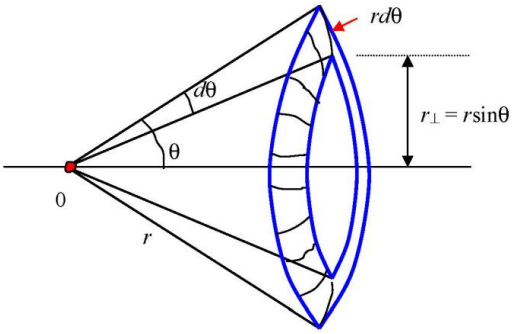


Рис. 1.15.5

Откуда телесный угол, под которым видна поверхность кольца, равен

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = 2\pi \sin\theta d\theta. \qquad (1.15.13)$$

Тогда сечение из (1.15.10) равно

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\Omega. \qquad (1.15.14)$$

Поскольку в (1.15.14) фиксируется малый телесный угол рассеяния $d\Omega$, то такое сечение обычно называют *дифференциальным сечением*. Или чаще дифференциальное сечение записывают как отношение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|. \qquad (1.15.15)$$

Зная зависимость прицельного параметра от угла рассеяния $\rho = \rho(\theta)$ и вычислив производную, получим дифференциальное сечение как функцию угла θ. Это дает зависимость числа рассеянных частиц от угла рассеяния, что может измеряться на эксперименте.

Чтобы получить полное сечение σ, определяющее тот факт, что рассеяние вообще состоялось и что учитываются все углы рассеяния, надо проинтегрировать (1.15.14) по всем углам.

1.15.3. Упругое рассеяние на твердом шаре

Рассмотрим в качестве примера процесса рассеяния в механике рассеяние частицы на упруго отражающем шаре радиусом R_0 (рис. 1.15.6). Чтобы воспользоваться результатами предыдущего пункта, надо найти связь между прицельным параметром ρ и углом рассеяния θ:

$$\rho = R_0 \sin\varphi_0 =$$
$$= R_0 \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = R_0 \cos\theta/2.$$

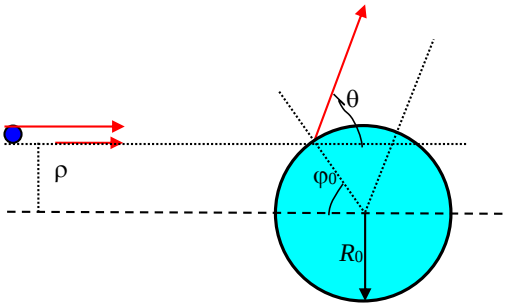


Рис. 1.15.6

Вычисляем производную (берем ее модуль)

$$\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \frac{R_0}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (1.15.16)$$

и подставим в формулу для дифференциального сечения (1.15.10):

$$d\sigma = 2\pi R_0 \cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{R_0}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{\pi R_0^2}{2}\sin\theta d\theta.$$

Вводя телесный угол (1.15.13) и разделив на него, получаем дифференциальное сечение (1.15.15) в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R_0^2}{4}, \qquad (1.15.17)$$

а полное сечение рассеяния на твердом шаре равно

$$\sigma = \frac{\pi R_0^2}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \pi R_0^2. \qquad (1.15.18)$$

Полученный результат для полного сечения рассеяния можно проинтерпретировать следующим образом: чтобы частице вообще рассеяться на твердом шаре, ей надо попасть в прицельную площадь, равную площади сечения шара. Тогда в любом случае произойдет рассеяние. А чтобы рассеяться в единицу телесного угла (дифференциальное сечение), ей достаточно попасть в площадку размером, определяемым соотношением (1.15.17). Причем дифференциальное сечение рассеяния одинаково для всех углов рассеяния.

1.15.4. Кулоновское рассеяние

Рассеяние на кулоновском центре описывается формулой Резерфорда. Получим ее, учитывая связь между ρ, φ_0 и θ (см. формулу (1.15.4)). Запишем квадрат прицельного параметра, который продифференцируем и подставим в формулу для сечения (1.15.14):

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v^4}\mathrm{ctg}^2\frac{\theta}{2};$$

$$2\rho d\rho = -\frac{\alpha^2}{m^2v^4}\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot\frac{d\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}. \qquad (1.15.19)$$

Для дифференциального сечения имеем:

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi\alpha^2}{m^2v^4}\frac{\cos\theta/2}{\sin^3\theta/2}d\theta = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2\frac{4\pi\sin\theta/2\cos\theta/2\,d\theta}{\sin^4\theta/2} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\theta/2}.$$

И окончательно получаем сечение в следующем виде:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}. \qquad (1.15.20)$$

Формула Резерфорда получается, когда для рассеяния α-частиц на ядре с зарядом Ze положим коэффициент в потенциале $\alpha = 2Ze^2$:

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}. \qquad (1.15.21)$$

Для сравнения с реальным экспериментом по рассеянию на фольгах необходимо еще просуммировать по числу ядер в 1 см^3 – n_{nucl}, на которых возможно рассеяние α-частиц. Если ядра по площади поперечного сечения не перекрывают друг друга, то измеряемое сечение $d\sigma^{macro}$ равно

$$d\sigma^{macro} = n_{nucl}d\sigma. \qquad (1.15.22)$$

При анализе результатов эксперимента Резерфордом с коллегами проверялась следующая величина:

$$dN\cdot\sin^4\theta/2 = nv\cdot n_{nucl}\left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 d\Omega. \qquad (1.15.23)$$

Условия эксперимента не менялись, тогда правая часть уравнения (1.15.23) остается постоянной, а число рассеянных частиц под углами θ должно быть пропорционально

$$dN \sim \frac{1}{\sin^4\theta/2}.$$

Эта зависимость и была получена на опыте. Таким образом, опытами Резерфорда, Гейгера и Марсдена и сравнением с формулой Резерфорда удалось установить, что α-частицы рассеивают точечный центр с положительным зарядом. Этот массивный центр — *ядро атома*. Теоретическое объяснение этих экспериментов привело Резерфорда к созданию планетарной модели атома: в центре атома находится массивный положительный заряд, малых размеров по сравнению с размерами атома, в поле которого движутся электроны.

1.16. Вращение твердого тела

1.16.1. Движение твердого тела

Твердое тело — система материальных точек, расстояние между которыми неизменно. Такое определение справедливо для абсолютно твердого тела, в реальности это свойство является приближением.

Движение твердого тела, или, иначе, перемещение любой точки твердого тела, всегда можно разбить на два движения: *поступательное* и *вращательное*.

В механике доказывается общая теорема (правило): произвольное движение твердого тела можно представить в виде совокупности поступательного движения всего тела со скоростью какой-либо его точки 0 и вращения этого тела вокруг оси, проходящей через эту точку.

Для описания движения твердого тела обычно вводят две системы координат: (x, y, z) — лабораторная система и (x', y', z') — система, связанная с точкой 0 (см. рис. 1.16.1). При этом поступательная скорость тела $\vec{V}$ зависит от того, какую точку 0 выбрать в качестве основной точки отсчета. Угловая скорость $\vec{\omega}$ от этого выбора не зависит: она абсолютна.

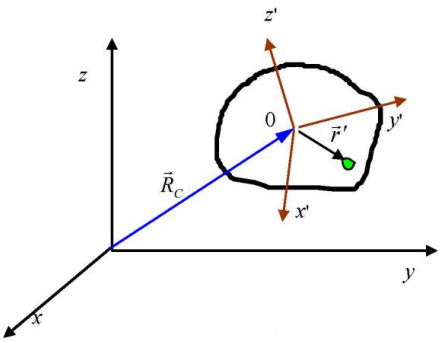


Рис. 1.16.1

Обычно в качестве основной точки выбирают центр инерции тела, определяемый радиус-вектором $\vec{R}_c$ и скоростью перемещения $\vec{V}_c$. Бесконечно малые перемещения любой точки твердого тела и скорость этой точки относительно лабораторной системы координат записываются:

$$d\vec{r} = d\vec{R}_c + \left[d\vec{\varphi}, \vec{r}'\right];$$
$$\vec{v} = \vec{V}_c + \left[\vec{\omega}, \vec{r}'\right]. \qquad (1.16.1)$$

Как и для системы материальных точек можно написать два векторных уравнения, которые полностью описывают движение твердого тела:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \qquad (1.16.2)$$

Итак, 6 переменных (3 поступательные и 3 вращательные) описывают движение твердого тела, и соответственно имеется 6 уравнений. Это позволяет решить задачу о движении твердого тела.

1.16.2. Вращение вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело в системе центра инерции (СЦИ), тогда мы имеем дело только с вращательным движением. Положим для простоты, что эта ось неподвижна в пространстве (в общем случае не так). Тогда для материальной точки массой m можно записать:

$$\left|\vec{L}\right| = L = \left|m\left[\vec{r}, \vec{v}\right]\right| = mr_{\perp}v = mr_{\perp}^{2}\omega. \qquad (1.16.3)$$

Здесь $r_\perp$ — расстояние от оси вращения до материальной точки, L — проекция МИ на ось вращения. Для системы материальных точек проекция МИ на ось вращения может быть получена суммированием по материальным точкам, учитывая, что угловая скорость одинакова для всех точек системы:

$$L = \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 \omega = I\omega. \qquad (1.16.4)$$

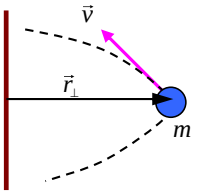


Рис. 1.16.2

Здесь мы ввели *момент инерции* системы I относительно оси:

$$I \equiv \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 . \qquad (1.16.5)$$

(см. также примечание 18).

Определение: величина I, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения, называется *моментом инерции системы относительно этой оси*.

Момент инерции во вращательном движении играет ту же роль, что и масса в поступательном движении. Момент инерции относительно оси определяет инертность тела при повороте вокруг данной оси. Момент инерции твердого тела зависит от распределения масс относительно интересующей нас оси и является величиной аддитивной. Для твердого тела момент инерции определяется:

$$I = \int r_\perp^2 \rho dV = \int r_\perp^2 dm, \qquad (1.16.6)$$

где $r_\perp$ — расстояние от элемента объема dV до оси вращения; $\rho = \rho(\vec{r})$ — плотность вещества в данной точке. Элемент объема dV выбирается в зависимости от системы координат:

— в декартовой системе координат

$$dV = dxdydz;$$

— в цилиндрической

$$dV = r_\perp dr_\perp d\varphi dz;$$

— в сферической системе

$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Момент инерции твердого тела зависит от положения оси вращения. Рассмотрим моменты инерции для нескольких вращающихся тел, представленных на рисунке 1.16.3 (подробнее см. п. 1.17).

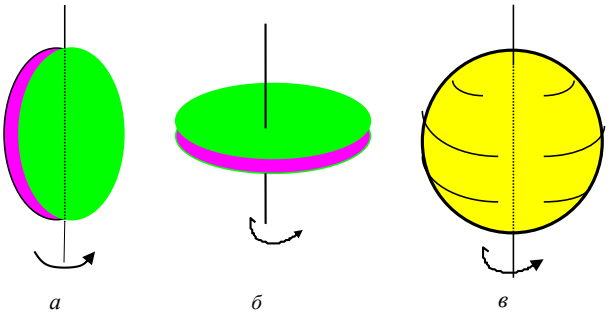


Рис. 1.16.3

А. Диск радиусом R, ось вращения проходит через диаметр диска, тогда его момент инерции относительно такой оси вращения равен

$$I = \frac{1}{4} mR^2, \tag{1.16.7}$$

где m — масса диска.

Б. Тот же диск радиусом R, а ось вращения проходит через его центр и вдоль оси симметрии, тогда его момент инерции равен

$$I = \frac{1}{2} mR^2. \tag{1.16.8}$$

В. Момент инерции шара массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через его центр, определяется:

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \tag{1.16.9}$$

Уравнение моментов записывается, как и прежде, в виде

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{1.16.10}$$

Для симметричных волчков, когда ось вращения проходит по оси симметрии, можно написать:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \tag{1.16.11}$$

Тогда можно записать уравнение движения твердого тела относительно неподвижной оси:

$$\vec{M} = \frac{d\left(I\vec{\omega}\right)}{dt}. \tag{1.16.12}$$

Если момент инерции тела во время движения не меняется (I = const), то получаем следующее уравнение:

$$M = I\frac{d\omega}{dt}, \tag{1.16.13}$$

где M — момент внешних сил относительно оси вращения. Уравнение (1.16.13) — аналог второго закона Ньютона при записи через массу тела.

Примечание 18. Для несимметричного (или неоднородного) тела (рис. 1.16.4) момент импульса $\vec{L}$, вообще говоря, не совпадает по направлению с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$. Из рисунка 1.16.4 видно, что для симметричной части тела относительно оси угловая скорость совпадает по направлению с МИ. Однако момент импульса каждой части, не входящей в симметричную часть, дает $\vec{L}_i$. Из-за этой части получаем отклонение направлений МИ и угловой скорости. При вращении $\vec{L}$ описывает конус $d\vec{L} = \vec{M}_{ext}dt$, «нанизанный» на ось вращения. Однако выражение для проекции МИ на ось вращения остается всегда правильным:

$$L_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = I\omega,$$

где r_i — опять расстояние элемента объема массы Δm_i до оси.

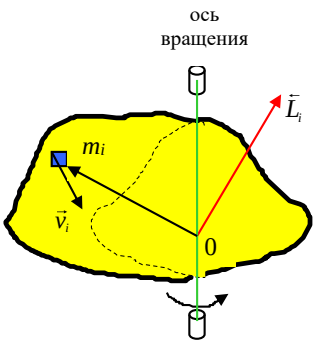


Рис. 1.16.4

Примечание 19. Демонстрация закона сохранения момента импульса в замкнутой системе — скамья Жуковского. Рассматривается система: вращающаяся скамья + демонстратор, сидящий на скамье (момент внешних сил $\vec{M}_{ext} \approx 0$, если пренебречь силами трения). 1. Демонстратор вращается на скамье и держит в руках гири. Поскольку $\vec{M}_{ext} \approx 0$ и тогда $I\omega = \text{const}$, то при разведении рук с гирями угловая скорость уменьшается, так как увеличивается момент инерции системы относительно оси вращения. 2. Демонстратор на покоящейся скамье держит вращающееся велосипедное колесо. Поскольку сохраняется МИ вдоль оси вращения, то при изменении угла вращения колеса (руками демонстратора) скамья также приходит в движение, чтобы сохранить МИ вдоль оси вращения.

1.16.3. Кинетическая энергия вращающегося тела

Энергия поступательного движения твердого тела $K = \frac{1}{2}mv^2$, где v — скорость, одинаковая для всех точек тела. Кинетическую энергию вращающегося тела в системе центра инерции (СЦИ) получим, разбив тело на маленькие кусочки и учитывая, что угловая скорость ω одинакова для всех точек (рис. 1.16.5):

$$v_i = \omega r_{\perp i}, \quad \Delta E_{kin} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{\perp i}^2. \qquad (1.16.14)$$

Здесь $r_i = r_{\perp i}$ — расстояние до оси вращения. Проводя суммирование по всем кусочкам или интегрирование по объему тела, получим

$$E_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r_\perp^2 dm = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (1.16.15)$$

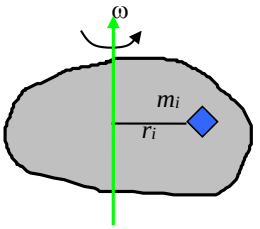


Рис. 1.16.5

Для твердого тела, участвующего в поступательном и вращательном движении, кинетическую энергию можно представить в виде суммы, если ось вращения проходит через центр инерции:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}, \tag{1.16.16}$$

где I_0 — момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции. Формула (1.16.16) справедлива для так называемого *плоского движения*; это такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно одной плоскости. Иначе центр системы совершает движение лишь в плоскости, тогда в СЦИ остается только вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр инерции. Покажем это. Пусть в системе центра инерции К' кинетическая энергия равна

$$E' = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 .$$

Тогда в лабораторной К-системе в соответствии с (1.16.1) имеем

$$\begin{aligned} E &= \sum_i \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2}\left(\vec{V} + \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i'\right]\right)^2 = \\ &= \sum_i \frac{\Delta m_i V^2}{2} + \sum_i \frac{\Delta m_i}{2}\omega^2 r_i'^2 + \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} 2\left(\vec{V}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i'\right]\right). \end{aligned} \tag{1.16.17}$$

Здесь $\vec{V}$ — скорость центра инерции (или скорость К'-системы). Последний член в (1.16.17) преобразуем с помощью формулы векторной алгебры (в смешанном произведении векторов можно производить циклическую перестановку векторов):

$$\sum_i \frac{\Delta m_i}{2} 2\left(\vec{V}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i'\right]\right) = \sum_i \Delta m_i \left(\vec{r}_i', \left[\vec{V}, \vec{\omega}\right]\right) = \left(\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i', \left[\vec{V}, \vec{\omega}\right]\right) = 0 .$$

Здесь мы воспользовались тем, что для системы центра инерции $\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i' = 0$. Таким образом, получаем кинетическую энергию вращающегося тела в виде (1.16.16):

$$E_{kin} = \frac{V^2}{2}\sum_i \Delta m_i + \frac{\omega^2}{2}\sum_i \Delta m_i r_i'^2 = \frac{mV^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} . \tag{1.16.18}$$

Рассмотрим пример. Скатывание шара по наклонной плоскости с высоты h без проскальзывания с начальной нулевой скоростью (рис. 1.16.6). Найдем скорость перемещения шара в конце спуска. Из закона сохранения энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} + mgh = \text{const}$$

имеем

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}.$$

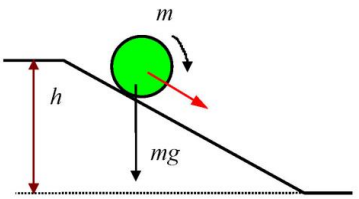


Рис. 1.16.6

Условие движения без проскальзывания означает, что линейная скорость центра масс связана с угловой скоростью $v = \omega r$, момент инерции шара (см. (1.16.9)) равен $I_0 = \frac{2}{5}mr^2$. Тогда находим скорость шара в конце спуска:

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}. \qquad (1.16.19)$$

1.16.4. Гироскоп

Гироскопом называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии. Поскольку ось гироскопа совпадает с одной из главных осей инерции, то воспользуемся уравнением (1.16.11):

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

где I — момент инерции гироскопа относительно этой оси; $\vec{\omega}$ — угловая скорость собственного вращения.

Если суммарный момент внешних сил, действующих на гироскоп, равен нулю, то момент его импульса постоянный. Отсюда следует важное для практического применения свойство гироскопа сохранять неизменным направление оси в пространстве. Если к вращающемуся гироскопу приложить момент сил, который стремится повернуть его вокруг оси, перпендикулярной оси вращения гироскопа, то он станет поворачиваться вокруг третьей оси, перпендикулярной первым двум. Такое поведение гироскопа полностью соответствует законам динамики вращательного движения.

Точное решение задачи о вращении гироскопа относительно произвольных осей сопряжено с математическими трудностями. Рассмотрим приближенное решение этой задачи для простейшего случая.

Пусть гироскоп представляет собой насаженный на ось массивный диск массой m, который вращается с большой угловой скоростью ω, как показано на рисунке 1.16.7, и уравновешен с помощью подвижного груза массой m_1. Момент импульса диска направлен вдоль оси вправо, как и вектор угловой скорости, и если момент внешних сил (силы тяжести) равен нулю, то

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}.$$

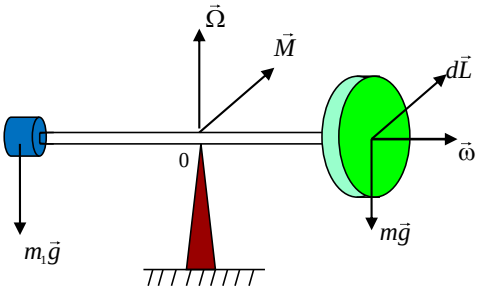


Рис. 1.16.7

Если переместить груз m_1 к центру 0, то нарушается равновесие в горизонтальном направлении и возникает суммарный момент внешних сил $\vec{M}$ относительно центра вращения 0, направленный перпендикулярно плоскости чертежа от наблюдателя. В силу уравнения моментов (1.16.10):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

ось гироскопа повернется за плоскость чертежа (от нас), поскольку приращение момента импульса гироскопа $d\vec{L} = \vec{M}dt$ имеет такое же направление, как и $\vec{M}$. Таким образом, за время dt ось симметрии гироскопа повернется в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси на некоторый угол $d\varphi$. Поскольку вектор $\vec{M}$ продолжает оставаться перпендикулярным оси гироскопа, то ось все время будет вращаться в горизонтальной плоскости с угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (1.16.20)$$

Вращение гироскопа под действием момента сил называется *прецессией*.

Чем меньше приращение момента импульса, тем меньше угловая скорость прецессии. Если $\Omega \ll \omega$, то бесконечно малое приращение угла $d\varphi$ можно определить из отношения

$$d\varphi = \frac{dL}{L}. \qquad (1.16.21)$$

Подставляя это значение в равенство (1.16.20), получаем для модуля угловой скорости прецессии:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{Ldt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega}. \qquad (1.16.22)$$

Угловая скорость прецессии прямо пропорциональна моменту сил и обратно пропорциональна моменту инерции I и угловой скорости собственного вращения ω гироскопа. Нетрудно получить векторное соотношение:

$$\left[\vec{\Omega},\vec{L}\right]=\vec{M}\,. \qquad (1.16.23)$$

Из уравнения (1.16.22) видно, что момент силы M определяет угловую скорость прецессии (а не ускорение). Поэтому говорят, что прецессия не имеет инерции: мгновенное устранение момента силы M приводит к мгновенному исчезновению и прецессии.

Момент действующих на гироскоп сил может иметь любую природу. Для обеспечения регулярности прецессии, т. е. постоянства угловой скорости Ω, важно, чтобы вектор $\vec{M}$, не изменяясь по модулю, поворачивался вместе с осью гироскопа.

Заметим, что при кратковременном действии на ось гироскопа даже довольно большой силы, вызывающей временное несовпадение оси вращения и главной оси инерции, наблюдаются лишь колебания оси, называемые *нутацией*. При наличии трения такие колебания затухают.

Другой часто встречающийся вид гироскопа — так называемый *волчок* (рис. 1.16.8). Опыт показывает, что если ось вращающегося волчка отклонена от вертикали на некоторый угол θ, то волчок не падает под действием силы тяжести, а совершает прецессионное движение. Его ось, определяемая векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{L}$, описывает конус вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью Ω. И чем больше угловая скорость ω вращения волчка вокруг своей оси, тем меньше угловая скорость прецессии Ω.

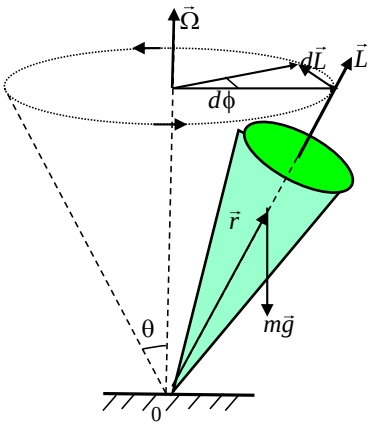


Рис. 1.16.8

Под действием момента силы тяжести $\vec{M}=\left[\vec{r},m\vec{g}\right]$ момент импульса гироскопа получает приращение $d\vec{L}=\vec{M}dt$. Из рисунке 1.16.8 видно, что $d\vec{L}\perp\vec{L}$. В результате вектор $\vec{L}$, а значит, и ось волчка будут поворачиваться вокруг вертикальной оси, описывая круговой конус.

Найдем угловую скорость прецессии наклоненного волчка массой m, который вращается с большой угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии. Пусть момент инерции волчка относительно этой оси равен I, а центр масс находится на расстоянии r от точки опоры. Из выражения (1.16.22) получаем угловую скорость прецессии:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{dL}{L\sin\theta dt} = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mgr\sin\theta}{I\omega\sin\theta} = \frac{mgr}{I\omega}. \qquad (1.16.24)$$

Отметим, что если ось гироскопа закреплена в подставке и подставка поворачивается под действием внешних сил, то это в общем случае приводит к приращению момента импульса $d\vec{L}$. Это означает, что на гироскоп действует момент сил $\vec{M}$ со стороны подставки, который совпадает по направлению с вектором $d\vec{L}$. Ось же гироскопа в соответствии с третьим законом Ньютона будет действовать на подставку с противоположным по направлению моментом сил. Эти силы называют гироскопическими, они создают гироскопический момент $\vec{M}' = -\vec{M}$. Гироскопический эффект лежит в основе конструкций разных приборов: гирокомпаса, «искусственного горизонта» в самолетах, гироскопического успокоителя качки корабля, гироскопического стабилизатора положения ракеты и др. В ряде случаев при наличии в механизмах частей с быстрым вращением гироскопические силы могут оказывать вредное влияние. Например, при резком повороте корабля быстро вращающаяся ось турбины оказывает значительное дополнительное давление на подшипники, что может привести к их разрушению.

Приложение 2. Еще раз напомним об аналогии между двумя видами движения: поступательным и вращательным.

Скорость — $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow \vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ — угловая скорость, их связь: $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$.

Импульс — $\vec{p} = m\vec{v} \Leftrightarrow \vec{L}$ — момент импульса, их связь: $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$.

Масса — $m \Leftrightarrow I$ — момент инерции, их связь: $I = \int r_\perp^2 dm$.

Уравнение движения — $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ — уравнение моментов.

Работа сил — $dA = \vec{F}d\vec{r} \Leftrightarrow dA = \vec{M}d\vec{\phi}$ — работа момента сил.

1.17. Момент инерции

1.17.1. Моменты инерции диска и шара

Одна из основных задач механики связана с определением характеристик вращательного движения. Для этого часто необходимо знать моменты инерции тел относительно различного расположения осей вращения. В качестве примера сосчитаем моменты инерции диска и шара относительно осей симметрии.

1. Момент инерции диска (цилиндра) относительно оси симметрии, проходящей через точку 0 перпендикулярно плоскости (рис. 1.17.1). Пусть масса од-

нородного диска m, а его радиус и толщина равны R и h соответственно. Тогда момент инерции маленького кусочка dm равен

$$d^2I = r^2dm = r^2\rho dV = \rho r^2 \cdot hrdrd\varphi = \rho hr^3drd\varphi, \qquad (1.17.1)$$

где ρ — плотность вещества диска; r — расстояние до оси вращения, а элемент объема dV взят в цилиндрической системе координат. Напомним, что объем всего диска или цилиндра равен $V = \pi R^2 h$. Интегрируя выражение (1.17.1) по углу φ и радиусу r, получаем момент инерции диска (цилиндра):

$$I = \rho h\int_0^R r^3dr\int_0^{2\pi} d\varphi = \rho h\frac{R^4}{4}2\pi = \frac{1}{2}R^2 \cdot \rho\pi R^2 h;$$

$$I = mR^2/2. \qquad (1.17.2)$$

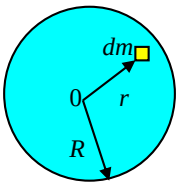


Рис. 1.17.1

Получили формулу (1.16.8), которую приводили ранее в п. 1.16.

2. Момент инерции однородного шара массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через центр. Удобнее его вычислять в сферической системе координат. Тогда момент инерции маленького кусочка шара dm равен (рис. 1.17.2):

$$d^3I = \left(r_\perp\right)^2 dm = \left(r\sin\theta\right)^2 \rho dV = \rho\left(r\sin\theta\right)^2 r^2dr\sin\theta d\theta d\varphi,$$

где $r_\perp = r\sin\theta$ — расстояние кусочка массы dm до оси вращения; ρ — плотность шара. Интегрируя по всем переменным:

$$I = \rho\int_0^R r^4dr\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi, \qquad (1.17.3)$$

и учитывая, что масса шара равна $m = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$, получаем момент инерции шара относительно оси симметрии:

$$I_ш = 2mR^2/5. \qquad (1.17.4)$$

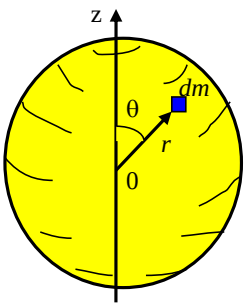


Рис. 1.17.2

Достаточно просто вычисляются моменты инерции относительно оси, проходящей через центр симметрии и центр инерции. Однако непосредственно вычислять момент инерции относительно произвольной оси достаточно сложно. В этом случае помогает теорема Штейнера.

1.17.2. Теорема Штейнера

Теорема Штейнера гласит (см. рис. 1.17.3): *момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями*:

$$I = I_c + ma^2. \tag{1.17.5}$$

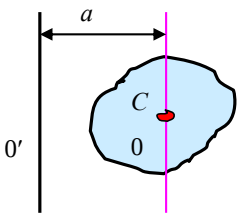


Рис. 1.17.3

Так, например, для диска момент инерции относительно оси 0', проходящей через край диска перпендикулярно его плоскости, равен

$$I_{0'} = I_0 + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \tag{1.17.6}$$

Докажем теорему Штейнера. Пусть точка C — центр инерции тела (см. рис. 1.17.4), ось проходит через точку C перпендикулярно к плоскости чертежа. Таким же образом проходит ось через точку 0. Вектор $\vec{a}$ — вектор, направленный от точки 0 к точке C. Выберем кусочек dm_i и проведем векторы $\vec{R}_i$ и $\vec{R}_i'$. При этом получаем

$$\vec{R}_i' = \vec{a} + \vec{R}_i. \tag{1.17.7}$$

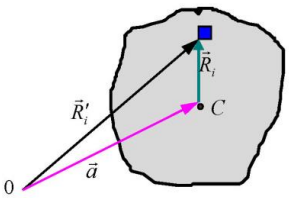


Рис. 1.17.4

Тогда момент инерции относительно точки 0 равен

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_i \Delta m_i R_i'^2 = \\ &= a^2 \sum_i \Delta m_i + 2\vec{a} \sum_i \Delta m_i \vec{R}_i + \sum_i \Delta m_i R_i^2. \end{aligned} \tag{1.17.8}$$

Последнее слагаемое в (1.17.8) дает момент инерции относительно оси, проходящий через центр инерции, т. е. I_c. Второе слагаемое равно нулю, так как сумма $\sum_i \Delta m_i \vec{R}_i = 0$ для точки, являющейся центром инерции (эта сумма определяет радиус-вектор центра инерции, который равен нулю, если отсчитывать от самого центра инерции). Итак, получаем теорему Штейнера — соотношение (1.17.5), что и требовалось доказать.

1.17.3. Главные моменты инерции

В принципе тело при вращении вокруг различных осей, проходящих через центр инерции, имеет различные моменты инерции. Так, момент инерции диска относительно оси, изображенной на рисунке 1.17.5, имеет другое значение, чем относительно оси симметрии, при этом момент импульса не совпадает по направлению с вектором угловой скорости. Вращение вокруг такой оси является неустойчивым.

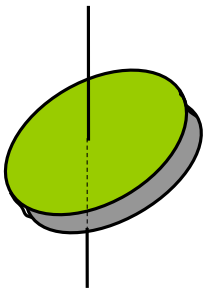


Рис. 1.17.5

Можно доказать, что для тела любой формы и с произвольным распределением массы существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр инерции тела оси, которые могут служить *свободными осями*. Это такие оси, положение которых в пространстве остается неизменным при вращении вокруг нее тела в отсутствие внешних сил. Иначе говоря, для сохранения вращения не нужно прикладывать внешние силы. Это такие оси, при вращении вокруг которых направление вектора $\vec{L}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$.

Три такие оси называются *главными осями инерции тела*, а моменты инерции относительно их называются *главными моментами инерции*.

Примеры главных осей для цилиндра изображены на рисунке 1.17.6, а для параллелепипеда — на рисунке 1.17.7.

Рассмотрим основные определения и выводы, которые следуют из исследования вращения твердых тел.

Для тел с центральной симметрией все главные моменты инерции равны друг другу: $I_1 = I_2 = I_3$. Это так называемые *шаровые волчки*.

Для тел с осевой симметрией: $I_1 = I_2 \neq I_3$, имеем дело с *симметричными волчками*.

В общем случае все главные моменты инерции различны: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Это *асимметричные волчки*.

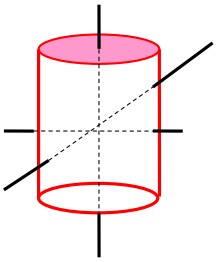


Рис. 1.17.6

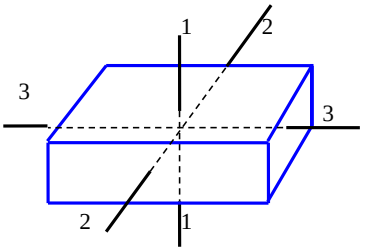


Рис. 1.17.7

Вращение вокруг осей, соответствующее максимальным и минимальным значениям момента инерции, является устойчивым, а вокруг других — неустойчивым.

Рассмотрим в качестве примера вращение коробка спичек (рис. 1.17.7). Можно «экспериментально» установить устойчивые оси вращения: одна ось проходит через центр грани с наибольшей поверхностью (на рис. 1.17.7 ось 1–1), другая ось — через центр грани с наименьшей поверхностью (ось 3–3).

При внешнем воздействии наиболее устойчивым является то вращение, которое соответствует максимальному значению главного момента инерции. Рассмотрим как пример вращение диска, закрепленного за его край с помощью нити (см. рис. 1.17.8). Диск при установившемся вращении выстраивается так, чтобы ось вращения проходила через ось симметрии, относительно которой имеется максимальный момент инерции, как показано на рисунке 1.17.8.

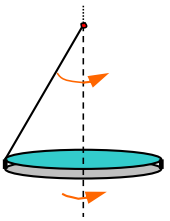


Рис. 1.17.8

Итак, для вращения вокруг свободных (главных) осей имеем

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \text{ или } \begin{cases} L_x = I_1\omega_x \\ L_y = I_2\omega_y \\ L_z = I_3\omega_z \end{cases}. \qquad (1.17.9)$$

Последние равенства справедливы, если оси (x, y, z) совпадают с главными осями вращения.

Однако если вращение происходит вокруг произвольных осей и оси (x, y, z) ориентированы произвольно, то связь между компонентами становится более сложной:

$$\begin{cases} L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{cases}. \qquad (1.17.10)$$

Здесь I_{ik} — коэффициенты пропорциональности, имеющие размерность момента инерции. Недиагональные коэффициенты характеризуют вклад перпендикулярных компонент угловой скорости в выбранную компоненту момента импульса.

Приведем несколько частных случаев уравнений (1.17.10).

1. Пусть $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$ и $I_{ij} = 0$ (при $i \neq j$), тогда получаем более простое уравнение для связи момента импульса и угловой скоростью $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

2. Если ось вращения направлена вдоль оси z, т. е. $\omega_z \neq 0$, а остальные проекции угловой скорости равны нулю: $\omega_x = \omega_y = 0$, то получаем $L_x = I_{xz}\omega_z$, $L_y = I_{yz}\omega_z, L_z = I_{zz}\omega_z$.

В общем случае совокупность всех этих девяти величин I_{ik} — тензор 2-го ранга — *тензор инерции*. Он представляется в виде таблицы:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (1.17.11)$$

Операция, определяемая (1.17.10), — это умножение вектора $\vec{\omega}$ на тензор $\hat{I}$, в результате получаем новый вектор $\vec{L}$. Короткая запись уравнений (1.17.10) имеет вид:

$$L_i = \sum_{k=x,y,z} I_{ik}\omega_k, \quad i = x, y, z. \qquad (1.17.12)$$

Тензор инерции характеризует инертные свойства тела при вращении.

1.17.4. Компоненты тензора инерции

Найдем выражение для тензора инерции. Запишем момент импульса как сумму моментов импульса кусочков массы:

$$\vec{L} = \sum_i m_i\left[\vec{r}_i, \vec{v}_i\right] = \sum_i m_i\left[\vec{r}_i, \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i\right]\right], \qquad (1.17.13)$$

где вектор $\vec{r}_i$ откладываем от центра масс. Двойное векторное произведение раскладываем по известному правилу векторной алгебры «БАЦ – ЦАБ» (легко проверить это правило, расписывая векторные произведения):

$$\left[\vec{A}\left[\vec{B}, \vec{C}\right]\right] = \vec{B}\left(\vec{A}, \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}, \vec{B}\right). \qquad (1.17.14)$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i\left\{\vec{\omega}\left(\vec{r}_i, \vec{r}_i\right) - \vec{r}_i\left(\vec{r}_i, \vec{\omega}\right)\right\} = \sum_i m_i\left\{\vec{\omega}\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) - \vec{r}_i\left(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z\right)\right\}.$$

Найдем проекцию момента импульса на ось x:

$$L_x = \sum_i m_i\left\{\omega_x\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) - x_i\left(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z\right)\right\} =$$

$$= \omega_x\sum_i m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) - \omega_y\sum_i m_i x_i y_i - \omega_z\sum_i m_i x_i z_i = \omega_x I_{xx} + \omega_y I_{xy} + \omega_z I_{xz}.$$

Рассматривая аналогично другие проекции, получаем тензор момента инерции в виде:

$$I \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_i m_i\left(y_i^2+z_i^2\right) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i\left(x_i^2+z_i^2\right) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right) \end{pmatrix}. \qquad (1.17.15)$$

Тензор симметричный: $I_{xy}=I_{yx}$, $I_{xz}=I_{zx}$ и $I_{yz}=I_{zy}$. Для протяженных тел (с непрерывным распределением массы) тензор и его компоненты вычисляются с помощью интегрирования, так, например:

$$I_{xx}=\int\left(y^2+z^2\right)dm=\int\rho(x,y,z)\left(y^2+z^2\right)dV;$$
$$I_{xy}=\int xy\,dm=\int xy\rho(x,y,z)dV. \qquad (1.17.16)$$

Если в качестве координатных осей (x, y, z) взять главные оси инерции, то тензор становится диагональным:

$$I=\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}. \qquad (1.17.17)$$

Примечание 20. В математике доказывается, что любую матрицу можно привести к диагональному виду путем выбора осей (см., например, в литературе: Гантмахер, гл. 10, § 53).

1.18. Законы сохранения и симметрия пространства и времени

1.18.1. Законы сохранения

В предыдущих параграфах мы рассмотрели три закона сохранения для замкнутых систем: *закон сохранения энергии*, *импульса* и *момента импульса.*

Часто сохраняющиеся величины в механике (и в физике вообще) называют *интегралами движения*. Но всегда выделяют эти три закона сохранения, поскольку их происхождение имеет глубокий смысл — они связаны со свойствами пространства и времени, их однородностью и изотропией. Для этих интегралов движения выполняется важнейшее свойство — *аддитивность*.

Такое утверждение, что законы сохранения есть следствие однородности и изотропии пространства и времени, встречается довольно часто. Однако было бы неверно думать, что указанных свойств пространства и времени достаточно, чтобы вывести эти законы сохранения. Все перечисленные законы есть следствие законов движения (например, второго закона Ньютона). Поэтому необходимо понимать следующее: законы сохранения можно получить из второго закона Ньютона, если к нему присоединить свойства симметрии пространства и времени.

Что такое однородность времени, пространства и изотропия пространства? Необходимо дать точные характеристики и определения.

1. *Однородность времени* означает, что если в два любые момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то, начиная с этих моментов, все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.

2. *Однородность пространства* означает, что если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений.

3. *Изотропия пространства* означает то же (что в п. 2) по отношению к повороту системы на заданный угол.

Эти свойства пространства и времени — *фундаментальное обобщение опытных фактов*.

1.18.2. Закон сохранения импульса и однородность пространства

Итак, в силу однородности пространства механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. Для замкнутой системы закон сохранения импульса формально следует из второго и третьего законов Ньютона:

$$\vec{F}_{ext} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0. \tag{1.18.1}$$

Однако справедливость третьего закона Ньютона и закона сохранения импульса *обусловлена однородностью пространства*. Пусть мы имеем внутренние силы $\vec{F}_i$, действующие в замкнутой системе. Однородность пространства означает следующее: перенесем все частицы системы в пространстве на расстояние $d\vec{r}$ и, поскольку ничего не может измениться, заключаем, что работа всех внутренних сил (работа над i-й частицей $\vec{F}_i d\vec{r}$), которая всегда равна изменению потенциальной энергии, должна быть равна 0. Запишем это условие

$$\vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + ... = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\right) d\vec{r} = 0. \tag{1.18.2}$$

Или, иначе, вспоминая, что полная сила на i частицу равна сумме сил со стороны каждой другой частицы, получим

$$d\vec{r} \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = 0. \tag{1.18.3}$$

В силу произвольности $d\vec{r}$ получаем закон сохранения импульса:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt}; \quad \vec{p} = \text{const}. \tag{1.18.4}$$

Переписывая это иначе:

$$\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = 0 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right), \tag{1.18.5}$$

в силу независимости взаимодействия каждой из пар частиц друг с другом получаем третий закон Ньютона:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \qquad (1.18.6)$$

Примечание 21. Если у нас носителями импульса являются не только материальные тела, но и поле, то третий закон Ньютона в этой формулировке неприменим. Нужно учитывать поле, его импульс, и тогда снова для замкнутой системы получим $\vec{p} = \text{const}$ из свойства однородности пространства.

1.18.3. Закон сохранения момента импульса и изотропия пространства

Для замкнутой системы момент внешних сил равен нулю: $\vec{M}_{ext} = 0$. Изотропия означает, что если замкнутую систему повернуть на какой-нибудь угол в пространстве, то ничего не изменится (рис. 1.18.1). Пусть $\vec{M}_i$ — моменты внутренних сил относительно неподвижной точки 0. Повернем всю систему на угол $d\alpha$. Из изотропии следует, что работа моментов сил должна быть равна нулю:

$$dA = \vec{M}_1 d\vec{\alpha} + \vec{M}_2 d\vec{\alpha} + ... = 0. \qquad (1.18.7)$$

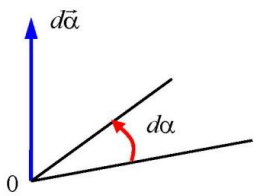


Рис. 1.18.1

В силу произвольности угла поворота $d\alpha$ заключаем, что сумма моментов внутренних сил равна 0:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... = \sum_i \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \qquad (1.18.8)$$

И отсюда следует закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L} = \text{const}. \qquad (1.18.9)$$

Таким образом, закон сохранения момента импульса связан с изотропией пространства.

1.18.4. Закон сохранения энергии и однородность времени

Из динамики получаем следствие второго закона Ньютона — работа сил над механической системой равна приращению ее кинетической энергии K:

$$A_{12} = K_2 - K_1. \qquad (1.18.10)$$

Пусть на i-ю частицу действует сила $\vec{F}\left(F_x, F_y, F_z\right)$, компоненты которой определяются:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (1.18.11)$$

В самом общем случае потенциальная энергия U (например, для незамкнутой системы) зависит еще от времени t: $U = U(x, y, z, t)$. Поэтому полное приращение U включает также и производную по времени (т. е. полный дифференциал функции):

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial t}dt. \qquad (1.18.12)$$

При этом конечное приращение потенциальной энергии при переходе из состояния 1 в состояние 2 определяется интегралом:

$$\int_1^2 dU(x,y,z,t) = U_2 - U_1, \qquad (1.18.13)$$

где 1 и 2 в принципе могут означать разные пространственные точки и разные времена. Запишем более подробно работу сил при пространственном перемещении из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = -\int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) \Rightarrow$$

Чтобы в скобках появился полный дифференциал и можно было бы воспользоваться (1.18.13), добавим и вычтем частную производную по времени:

$$\Rightarrow -\int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial t}dt\right) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}dt = -\left(U_2 - U_1\right) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}dt. \qquad (1.18.14)$$

Складывая так для всех частиц, получаем из равенства работ:

$$A_{12} = U_1 - U_2 + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}dt = K_2 - K_1. \qquad (1.18.15)$$

Или переписывая (1.18.15), получаем

$$\left(K_2 + U_2\right) - \left(K_1 + U_1\right) = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}dt. \qquad (1.18.16)$$

Теперь пусть система замкнута. Однородность времени заключается в том, что в любой момент времени может одинаковым образом происходить развитие событий, т. е. потенциальная энергия не может явно зависеть от времени:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \qquad (1.18.17)$$

Тогда из (1.18.16) получаем закон сохранения энергии:

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1. \qquad (1.18.18)$$

Вместо заключения

Между уравнениями динамики и законами сохранения имеется существенная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Законы сохранения обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени и поэтому универсальны и всеобщи. Но они не дают указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены в природе. Законы сохранения выступают как запреты!

В процессе человеческой практики и опытов неоднократно возникали видимые нарушения закона сохранения энергии. Так, нет закона сохранения механической энергии в присутствии диссипативных сил — часть механической энергии переходит во внутреннюю энергию тела (тепло). До обнаружения слабо взаимодействующей частицы — нейтрино — нарушался закон сохранения энергии при слабых распадах элементарных частиц. В космологии часто возникали видимые нарушения законов сохранения.

ГЛАВА 2.
РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

2.1. Принципы специальной теории относительности

Релятивистская механика — механика без ограничения скорости. Классическая механика, основанная на сформулированных Ньютоном принципах, рассматривает скорости объектов, существенно меньшие скорости света $v << c$. При этом в классической механике были выдвинуты (в принципе необоснованно) следующие предположения:

1) инвариантность времени: $t = t'$, время считалось абсолютным, инвариантным относительно выбора инерциальных систем отсчета (ИСО);

2) инвариантность отрезков длины в различных ИСО:

$$\left.\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2} \\ r'_{12} &= \sqrt{\left(x'_1 - x'_2\right)^2 + \left(y'_1 - y'_2\right)^2 + \left(z'_1 - z'_2\right)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad r_{12} = r'_{12}.$$

Эти два предположения приводят к преобразованиям Галилея при переходе от одной ИСО к другой:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \qquad t' = t. \tag{2.1.1}$$

Однако при движении тел с большой скоростью, близкой к скорости света c, преобразования Галилея приводят к неправильным результатам. Особенно ярко эти проблемы проявились при исследовании скорости света. Принципиальные трудности возникли при описании электромагнитных явлений. Так, уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные явления — электродинамику, не инвариантны относительно преобразований Галилея.

<u>Принцип относительности Галилея</u> гласит, что все явления механики в любых ИСО протекают одинаково. Иначе, законы, описывающие изменение состояния и движения механических систем, не зависят от того, в какой ИСО они рассматриваются. С другой стороны явления природы не всегда удается разделить на чисто механические и немеханические явления. Однако в результате всестороннего изучения законов природы справедливость принципа относительности была признана для всех явлений, как механических, так и немеханических.

<u>Принцип относительности Эйнштейна</u>: *законы природы, определяющие изменение состояний физических систем, не зависят от того, к какой из двух инерциальных систем отсчета, движущихся относительно одна другой прямолинейно и равномерно, они относятся*.

Иначе, все законы природы одинаковы во всех ИСО. В любой ИСО одинаковы как форма записи законов физики, так и численные значения констант, входящих в эти законы. Невозможно отличить одну ИСО от другой.

Это постулат, и только опыт может подтвердить справедливость этого утверждения (постулата).

На основе этого принципа А. Эйнштейн в 1905 г. создал частную или специальную теорию относительности (СТО). СТО появилась также благодаря работам Д. Лармора, А. Пуанкаре и Х. А. Лоренца. Геометрическая интерпретация СТО была разработана Г. Минковским. Были получены новые преобразования — преобразования Лоренца, оставляющие инвариантными уравнения электродинамики Максвелла при переходе из одной ИСО к другой.

Для получения преобразований Лоренца нужно ввести скорость распространения сигнала — скорость света *c*. Постоянство скорости света — это второй принцип СТО, который вместе с принципом относительности позволяет получить новую релятивистскую теорию: *скорость света в пустоте одинакова во всех ИСО и не зависит от скорости движения источников и приемников света*.

Этот постулат необходимо экспериментально проверять.

Итак, основные принципы СТО:

1) *принцип относительности Эйнштейна*;

2) *принцип постоянства скорости света*.

Справедливость этих принципов проверяется на опыте.

Примечание 22. Исаак Ньютон (1643–1727), великий английский ученый, создатель классической физики.

Галилео Галилей (1564–1642), итальянский физик.

Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879), великий английский физик.

Альберт Эйнштейн (1879–1955), немецкий физик-теоретик, Нобелевская премия (1921) за объяснение законов фотоэффекта.

Джозеф Лармор (1857–1942), английский физик-теоретик;

Анри Пуанкаре (1854–1912), французский математик и физик;

Хенрик Антон Лоренц (1853–1928), нидерландский физик-теоретик, Нобелевская премия (1902) за объяснение расщепления спектральных линий в магнитном поле;

Герман Минковский (1864–1909), немецкий математик и физик.

2.2. Эксперименты по определению скорости света

2.2.1. О природе и скорости света

О природе света размышляли с древних времен. Древние мыслители считали, что свет — это истечение «атомов» от предметов в глаза наблюдателя. Так, в частности, считал Пифагор. Тогда же определили прямолинейность распространения света, считалось, что он распространяется с очень большими скоростями, практически мгновенно. В XVI–XVII вв. Р. Декарт, Х. Гюйгенс, Р. Гук исходили из того, что распространение света — это распространение волн в среде. И. Ньютон выдвигал корпускулярную природу света, т. е. считал, что свет — это излучение телами определенных частиц и их распространение в пространстве.

В 1801 г. Т. Юнг наблюдал интерференцию света, что послужило развитию экспериментов со светом по интерференции и дифракции. И в 1818 г.

О. Ж. Френель возродил волновую теорию распространения света. Д. К. Максвелл после установления общих законов электромагнитного поля пришел к выводу, что свет — это электромагнитные волны. Далее была выдвинута гипотеза «мирового эфира», состоящая в том, что свет — это распространение электромагнитных волн в среде — «эфире». Знаменитые эксперименты по проверке существования мирового эфира проводились А. А. Майкельсоном и Э. У. Морли (1837–1923), а по увлечению света движущейся средой — А. И. Физо. В результате было показано, что мирового эфира (по крайней мере, в том понимании, как полагали физики в то время, как некоторая абсолютная неподвижная среда) не существует.

С обнаружением на эксперименте корпускулярных свойств и проявлений света (фотоэффект, эффект Комптона и другие явления) М. Планком и А. Эйнштейном была разработана квантовая природа света, в рамках которой свет проявляет как волновые, так и корпускулярные свойства — так называемый *корпускулярно-волновой дуализм*.

Скорость света также пытались измерить различными способами, как в естественных, так и в лабораторных условиях. Часть из этих методов рассмотрена ниже в этом параграфе.

Скорость света c — это одна из основных мировых физических постоянных. Перечислим ряд основных фактов, касающихся скорости распространения света и установленных в результате многочисленных экспериментов.

1. Скорость света c является *предельной скоростью движения материальных тел*, постоянна в вакууме и *не зависит от частоты света*. Этот факт проверен в диапазоне длин электромагнитных волн λ от многих километров до очень коротких по длине волны γ-лучей:

$$c = 2.99792458 \cdot 10^{10} \text{ см/с} = 2.99792458 \cdot 10^{8} \text{ м/с}.$$

2. Свет имеет электромагнитную природу, распространяется в виде электромагнитных волн, фотонов. Скорость света c входит в уравнения системы уравнений Максвелла, описывающей электромагнитные явления.

3. Скорость света c входит во многие атомные и ядерные постоянные. Например, в постоянную тонкой структуры, которая определяет величину электромагнитного взаимодействия:

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137.04};$$

в магнетон Бора, определяющий магнитный момент микрочастиц:

$$M_B = \frac{e\hbar}{2mc} = 9 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс}.$$

Поэтому экспериментальное определение скорости распространения световых сигналов всегда было важнейшей задачей фундаментальной физики.

Примечание 23. Филисофы и физики, упоминаемые в этом параграфе, в дополнение к отмеченным в п. 2.1, внесшие огромный вклад в развитие представлений о природе света и физики высоких скоростей.

Пифагор (около 580 (570)–500 (470) гг. до н. э.), древнегреческий философ и математик;

Рене Декарт (1596–1650), французский физик.

Христиан Гюйгенс (1629–1695), голландский физик.

Роберт Гук (1635–1703), английский физик.

Томас Юнг (1773–1829), английский физик.

Огюстен Жан Френель (1788–1827), французский физик.

Альберт Абрахам Майкельсон (1852–1931), американский физик, Нобелевская премия (1907) за создание прецизионных инструментов и выполненные с их помощью спектроскопические и метрологические исследования.

Арман Ипполит Луи Физо (1819–1896), французский физик.

Макс Карл Эрнст Людвиг Планк (1858–1947), немецкий физик-теоретик, Нобелевская премия (1918) за открытие законов излучения.

Артур Холли Комптон (1892–1962), американский физик, Нобелевская премия (1927) за эффект, названный его именем.

2.2.2. Астрономические способы определения скорости света

1. О. К. Ремер наблюдал (1676) затмение спутника Юпитера (J) — *Ио*, открытого еще Галилеем в 1610 г. (он также открыл еще 3 спутника Юпитера). Радиус орбиты спутника Ио вокруг Юпитера равен 421 600 км, диаметр спутника 3470 км (см. рис. 2.2.1 и 2.2.2). Время затмения составляло τ_0 = 1.77 сут = = 152 928 с. О.К.

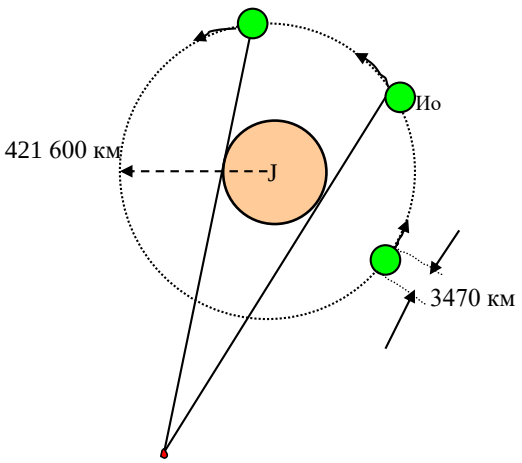


Рис. 2.2.1

Ремер наблюдал нарушение периодичности затмений, и это явление он связал с конечной скоростью распространения света. Радиус орбиты Юпитера вокруг Солнца R_J значительно больше радиуса орбиты Земли $R_З$, а период обращения примерно равен 12 лет. То есть за время полуоборота Земли (полгода), Юпитер переместится по орбите на некоторое расстояние, и если фиксировать время прихода светового сигнала с момента появления Ио из тени Юпитера, то свет должен пройти большее расстояние до Земли в случае 2, чем в случае 1 (см. рис. 2.2.2). Пусть T_1 — момент времени, когда Ио выходит из тени Юпите-

ра по часам на Земле, а t_1 — реальный момент времени, когда это происходит. Тогда получаем

$$T_1 = t_1 + S_1/c\,, \tag{2.2.1}$$

где S_1 — расстояние, которое свет проходит до Земли. В следующий выход Ио получаем аналогично

$$T_2 = t_2 + S_2/c\,, \tag{2.2.2}$$

где S_2 — новое расстояние, которое свет проходит до Земли. Истинный период обращения Ио вокруг Юпитера определяется разностью времен:

$$T_0 = t_2 - t_1\,. \tag{2.2.3}$$

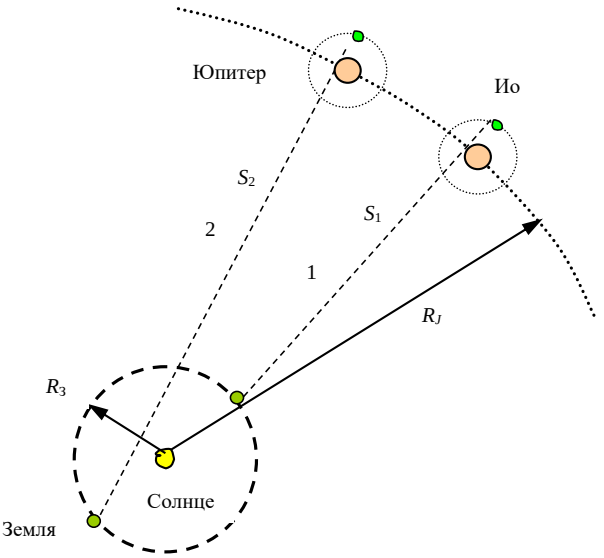


Рис. 2.2.2

Конечно, за один промежуток времени, когда происходит одно затмение, трудно определять эти времена с большой точностью. Поэтому удобнее вести наблюдения за полгода, когда расстояние до Земли меняется на максимальную величину. При этом истинный период затмения можно определить как среднюю величину за полгода или год. После этого можно определить скорость света после двух последовательных измерений времени выхода Ио из тени:

$$c = \frac{S_2 - S_1}{T_{\text{набл}} - T_0}. \tag{2.2.4}$$

Величины S_1 и S_2 находятся из астрономических вычислений. Проводя измерения за полгода (когда Земля перейдет на другую сторону своей орбиты), можно получить суммарное время затмения:

$$t_1 = nT_0 + \frac{\Delta S}{c} = nT_0 + \frac{R_J + R_З}{c} - \frac{R_J - R_З}{c}, \tag{2.2.5}$$

где n — число затмений за эти полгода. Все остальные промежуточные времена распространения света до Земли сократились, поскольку расстояние меняется слабо за одно затмение. Отсюда Ремер получил скорость света, равную c = = 214 300 км/с.

2. Дж. Брэдли (1725) для измерения скорости света использовал явление аберрации звезд, а именно: отклонение видимого направления на звезду от истинного направления вследствие сложения скоростей. (Это явление аберрации напоминает падение капель дождя — если они падают вертикально, то на стекле движущейся машины они оставляют след под углом к вертикали.) Отклонение направления падающего луча от истинного угла падения равно

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_\perp}{c}, \tag{2.2.6}$$

где $v_\perp$ — перпендикулярная составляющая скорости Земли по направлению к звезде. Существует годичная аберрация за счет скорости Земли вокруг Солнца и суточная аберрация за счет вращения Земли вокруг оси. Зная скорости $v_\perp$ и измеряя α, Брэдли получил значение скорости света, близкое к величине, полученной Ремером.

Примечание 24. Оле Кристенсен Ремер (1644–1710), голландский астроном.

2.2.3. Лабораторные способы измерения скорости света

1. Для измерения скорости света Арман Физо (1849) применил метод синхронного детектирования. Он использовал быстро вращающийся диск с N зубьями (рис. 2.2.3), представляющими собой непрозрачные сектора. Между этими секторами (зубьями) свет проходил от источника к отражающему зеркалу и обратно к наблюдателю. При этом угол между серединами секторов равен

$$\alpha = \frac{2\pi}{N}. \tag{2.2.7}$$

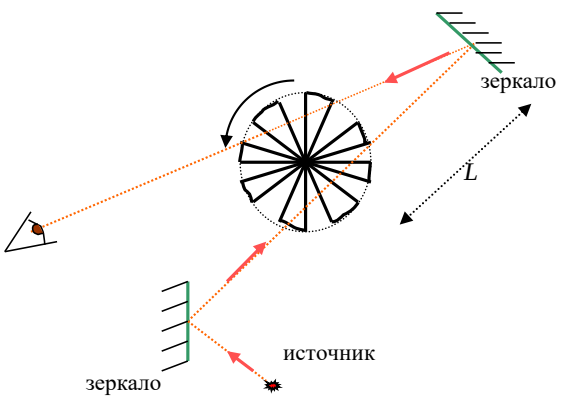


Рис. 2.2.3

Угловая скорость вращения подбиралась так, чтобы свет после отражения от зеркала за диском попадал в глаза наблюдателю при прохождении через соседнее отверстие. За время движения света от диска до зеркала и обратно

$$\tau = \frac{2L}{c} \tag{2.2.8}$$

поворот диска составляет угол

$$\Delta\varphi = \omega\tau = \frac{2L\omega}{c}. \tag{2.2.9}$$

Зная расстояние L, угловую скорость диска ω и угол $\Delta\varphi$, при котором появляется свет, можно получить скорость света. Физо получил значение скорости, равное c = (315 300±500) км/с.

2. Примерно такими же методами экспериментаторы получали уточненное значение скорости света c = (298 000±500) км/с (1862), затем c = (299 796±4) км/с (А. Майкельсон в 1927 и 1932 гг.). Позже Бергстранд получил следующее значение для скорости: c = (299793.1±0.3) км/с.

3. Отметим здесь один из наиболее точных способов измерения скорости света — метод объемного резонатора, основная идея которого состоит в образовании стоячей световой волны и вычислении числа полуволн на длине резонатора. Основные соотношения между скоростью света c, длиной волны λ, периодом T и частотой ν имеют вид:

$$c = \lambda\nu, \;\; \lambda = Tc = \frac{2\pi}{\omega}c \quad \text{и} \quad c = \frac{\omega\lambda}{2\pi}. \tag{2.2.10}$$

Здесь также введена круговая частота $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$, которая есть не что иное, как угловая скорость вращения ω амплитуды, если колебания представить как проекцию вращательного движения на ось. В случае образования световой стоячей волны на длине резонатора укладывается целое число полуволн. Находя это число и пользуясь соотношениями (2.2.10), можно определить скорость света.

Последние достижения (1978) дали для скорости света следующее значение: c = 299792.458 км/с = (299 792 458±1.2) м/с.

2.2.4. Опыты по распространению света в среде

1. Опыт Армана Физо (1851). Физо рассматривал распространение света в движущейся среде. Для этого пропускал луч света через стоячую и текущую воду и с помощью явления интерференции света сравнивал интерференционные картины, по анализу которых можно было судить об изменении скорости распространения света (см. схематичный рис. 2.2.4).

Два луча света, отразившись от полупрозрачного зеркала (луч 1) и пройдя его (луч 2), проходят дважды через трубу с водой и затем создают интерференционную картину на экране. Сначала измеряют в стоячей воде, а затем в текущей со скоростью V. При этом один луч (1) движется по течению, а второй (2) — против течения воды. Происходит смещение полос

интерференции вследствие изменения разности хода двух лучей. Разность хода лучей измеряется и по ней находится изменение скоростей распространения света. Скорость света в неподвижной среде $\tilde{c}$ зависит от показателя преломления среды n:

$$\tilde{c} = c/n. \qquad (2.2.11)$$

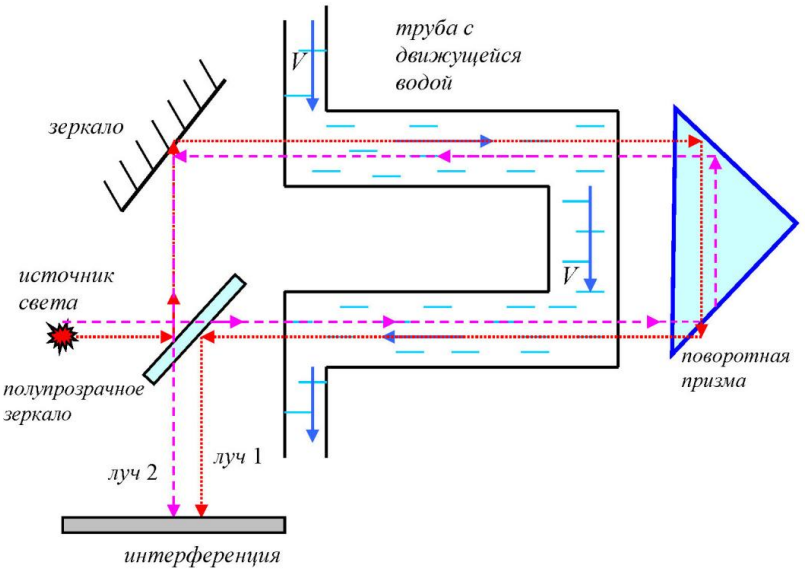


Рис. 2.2.4

По принципу относительности Галилея для наблюдателя, относительно которого свет движется в среде, скорость должна быть равна

$$v = \frac{c}{n} \pm V. \qquad (2.2.12)$$

Экспериментально Физо установил, что имеется коэффициент при скорости воды V, и поэтому формула выглядит следующим образом:

$$v = \frac{c}{n} \pm \alpha V, \qquad (2.2.13)$$

где α — коэффициент увлечения света движущейся средой:

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (2.2.14)$$

Таким образом, эксперимент Физо показал, что классическое правило сложения скоростей неприменимо при распространении света в движущейся среде, т. е. свет только частично увлекается движущейся средой. Опыт Физо сыграл важную роль при построении электродинамики движущихся сред. Он послужил обоснованием СТО, где коэффициент α получается из закона сложения скоростей (если ограничиться первым порядком точности по малой

величине v/c). *Вывод, который следует из этого опыта, состоит в том, что классические (галилеевские) преобразования неприменимы при распространении света*.

2. Опыты А. Майкельсона (1881) и Майкельсона — Морли (1885–1887). Цель опытов состояла в измерении влияния скорости Земли на скорость света. В то время считалось, что свет — это колебания эфира, при этом опыт Физо показал, что свет частично увлекается средой. Вопрос, на который предстояло ответить, состоял в том, чтобы определить есть ли «эфирный ветер», есть ли преимущественная ИСО?

Майкельсоном был создан новый специальный интерферометр, способный разделять луч света на два луча (рис. 2.2.5). Эти лучи могли распространяться во взаимно перпендикулярных направлениях и в различных средах, а затем собирались в трубе интерферометра, где наблюдались полосы интерференции. Прибор ориентировался так, что одно из плеч интерферометра совпадало с направлением движения Земли, а затем он поворачивался на угол 90°, так что либо луч 1, либо луч 2 был направлен вдоль скорости Земли $V_З$. Компенсатор вставлялся на пути одного из лучей, чтобы компенсировать набег фаз между лучами, получающийся при прохождения лучами полупрозрачного зеркала. При повороте должно было происходить смещение полос интерференции, поскольку менялась разность фаз между двумя лучами. Однако смещение полос в эксперименте не было обнаружено.

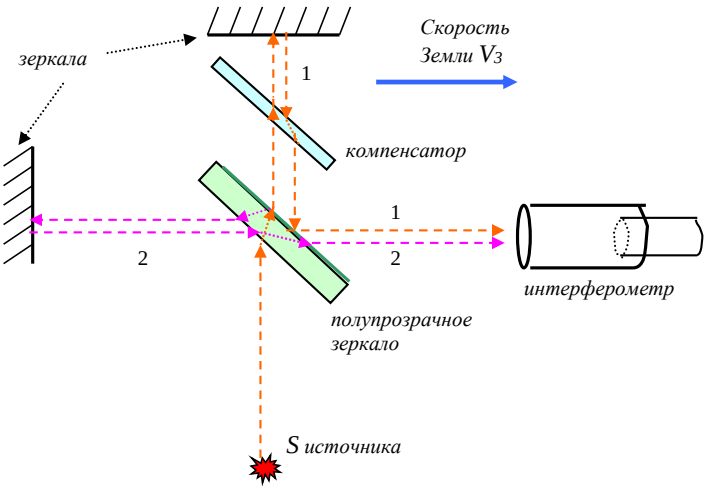


Рис. 2.2.5

Время движения луча света (луч 2 на рис. 2.2.5) вдоль направления скорости Земли равно

$$t_2 = \frac{l}{c+V_З} + \frac{l}{c-V_З} = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-V_З^2/c^2}, \qquad (2.2.15)$$

где l — длина плеча интерферометра. Время движения луча света поперек скорости Земли равно

$$t_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - V_З^2}} = \frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - V_З^2/c^2}}, \qquad (2.2.16)$$

поскольку скорость распространения света относительно эфира находится из прямоугольного треугольника (рис. 2.2.6): $v^2 = c^2 - V_З^2$.

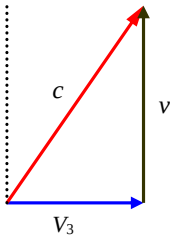


Рис. 2.2.6

Результат эксперимента Майкельсона показал: *эфирного ветра нет, скорость света во всех направлениях одинакова*.

Майкельсон и Морли усовершенствовали опыт: цементная плита плавала в ртути, прибор медленно вращался, использовалось многократное отражение от 16 зеркал, за счет чего увеличивалось плечо интерферометра до 11 м. Точность эксперимента увеличилась, однако вывод остался прежним.

3. В настоящее время благодаря использованию лазеров точность экспериментов увеличилась во много раз. Так, в 1964 г. Т. С. Джасей, А. Джаван, Г.-М. Мюррей, Ч. Таунс увеличили точность в 50 раз. Идея эксперимента была та же, что у Майкельсона. Пучки света от двух лазеров (см. рис. 2.2.7) были взаимно перпендикулярны и с помощью полупрозрачного зеркала направлялись затем на фотоэлектронный умножитель (ФЭУ считает кванты света).

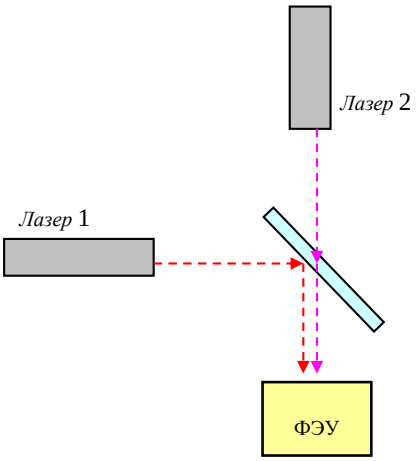


Рис. 2.2.7

Рассуждения состоят в следующем: если скорость света зависит от распространения относительно Земли, то частота лазера, на которой он генерирует излучение, должна изменяться при повороте относительно направления движения

Земли. Это изменение должно быть пропорционально: $\sim V_З^2/c^2$. Если бы частота излучения лазеров слегка изменялась при повороте на 90°, то в фотоэлектронном умножителе возникли бы биения. Экспериментаторы этих биений не наблюдали и дали ограничение на скорость эфирного ветра, что он не превышает 30 м/с.

Итак, на основании полученных результатов вывод состоит в следующем: *скорость света в вакууме изотропна, и это справедливо во всех ИСО*.

Примечание 25. Али Джаван (1926–2016), американский физик азербайджанского происхождения;

Чарльз Хард Таунс (1915–2015), американский физик, Нобелевская премия (1964) за фундаментальные исследования в области радиофизики, приведшие к созданию мазеров и лазеров.

2.2.5. Максимальность скорости света

Оказывается, что и *численное значение скорости света в вакууме одинаково во всех ИСО*. Этот вывод также был сделан на основании различных экспериментов. Кратко рассмотрим некоторые из них.

1. Эксперименты Р. Дж. Кеннеди и Э. М. Торндайка (1932) и позже Д. Саде (1963). Д. Саде рассматривал распадающиеся электрон-позитронные пары, которые образовывались при столкновении движущихся позитронов со скоростями от 0 до $v \approx c/2$ с электронами мишени. В результате аннигиляции электрон-позитронной пары испускались γ-кванты (см. рис. 2.2.8). Саде измерял скорость прихода испущенных γ-квантов в пространственно разделенные детекторы. Он получил, что с точностью до 10% скорость квантов была одинаковой и равнялась c, независимо от того, с какой скоростью двигался позитрон и электрон-позитронная пара до распада.

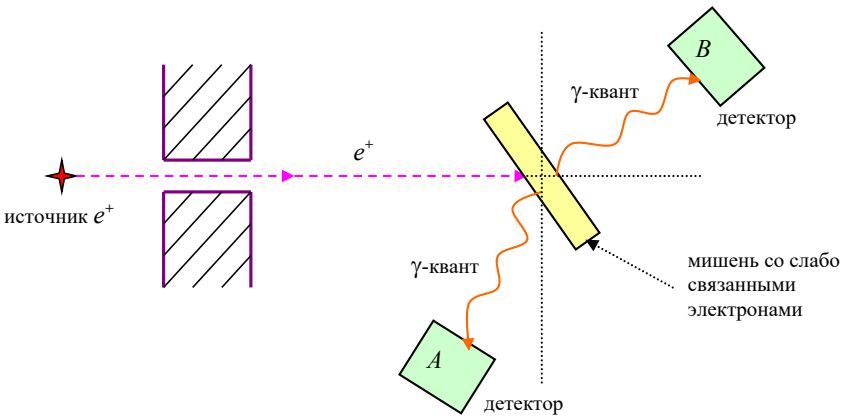


Рис. 2.2.8

Выводы многочисленных экспериментов: *скорость света не зависит от взаимного движения источника или приемника*.

2. Опыт Бертоцци (1964) — экспериментальная проверка максимальности скорости света для материальных тел. Установка (см. рис. 2.2.9) состояла из ва-

куумной трубы, внутри которой находился источник электронов (испускание электронов происходило за счет явления термоэмиссии), сетки ускоряющих потенциалов и измерительная система. Электроны ускорялись, при этом полная разность потенциалов равна сумме ускоряющих потенциалов. Затем при прохождении рубежа 1, т. е. при прохождении электроном сетки, электрический сигнал подавался на осциллограф, а второй сигнал на него подавался при попадании электрона в коллектор 2. По разности времен прихода сигналов на осциллограф Δt измерялась скорость электронов как $v = L/\Delta t$, где L — расстояние между фиксирующими электродами. Коллектор, сделанный из алюминия, собирал пройденные электроны, при этом еще измерялась температура с помощью термопары, а по нагреву мишени определялась полная кинетическая энергия, полученная при сборе электронов. Таким образом, полная энергия электронов равна

$$E = N_e K = N_e e\varphi, \tag{2.2.17}$$

где N_e — число электронов; K — кинетическая энергия каждого электрона; φ — полная разность потенциалов, пройденная электроном. На эксперименте измерялось число пройденных электронов, и отсюда находилась кинетическая энергия электрона. Строился график зависимости квадрата скорости от кинетической энергии электрона.

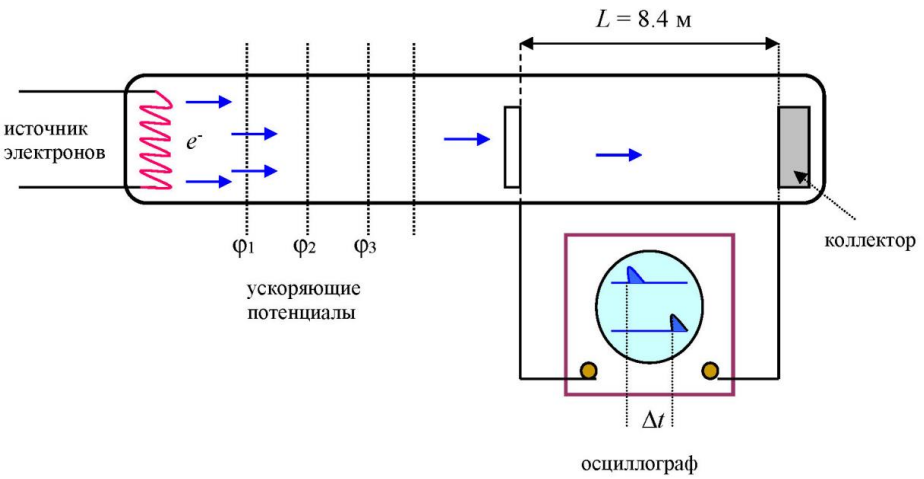


Рис. 2.2.9

По классической механике должна быть прямая зависимость кинетической энергии от квадрата скорости: $K = \frac{1}{2}mv^2$ (см. рис. 2.2.10). Эксперимент показал, что зависимость квадрата скорости от кинетической энергии имеет другой вид: кинетическая энергия растет, а скорость ограничена и приближается к своему максимальному значению, равному скорости света.

Итак, было показано, что скорость света есть *максимально возможная скорость для материальных тел*.

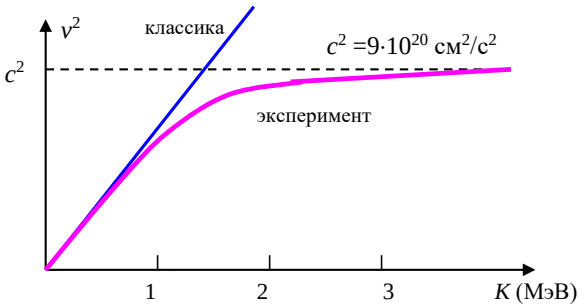


Рис. 2.2.10

2.3. Замедление времени и сокращение длины. Одновременность событий

2.3.1. Замедление времени для движущегося наблюдателя

Рассмотрим эксперимент по определению расстояния с помощью источника света, часов, зеркала и фотоприемника, пользуясь тем, что скорость света одинакова во всех системах отсчета. Рассмотрим сначала в неподвижной системе отсчета — неподвижная установка (рис. 2.3.1). Расстояние от источника до зеркала L определяется:

$$L = \frac{ct}{2}, \tag{2.3.1}$$

где t — время распространения света от источника до приемника.

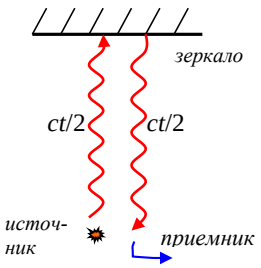


Рис. 2.3.1

Теперь рассмотрим то же измерение в установке, движущейся со скоростью V_0 (см. рис. 2.3.2 и 2.3.3). Пусть К-система — лабораторная система отсчета, а К'-система связана с движущейся установкой. В К'-системе (рис. 2.3.2) попрежнему имеем время движения света t' и расстояние $2L$ складывается из $ct'/2$ и $ct'/2$, как в (2.3.1).

В К-системе (рис. 2.3.3) свет идет под углом к зеркалу и, отражаясь, попадает обратно на движущийся приемник, также отраженный под углом к направлению движения. Из теоремы Пифагора следует:

$$\left(\frac{ct}{2}\right)^2 = \left(\frac{ct'}{2}\right)^2 + \left(\frac{V_0 t}{2}\right)^2. \tag{2.3.2}$$

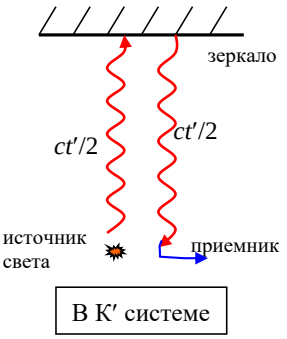


Рис. 2.3.2

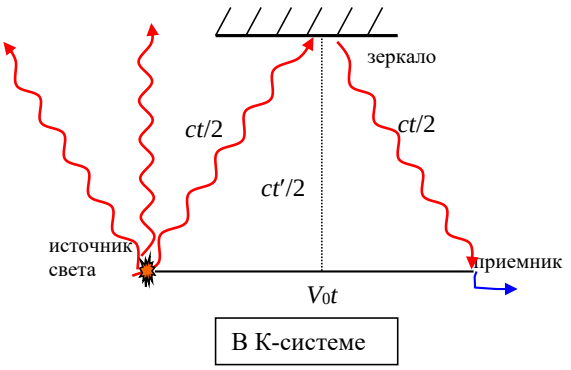


Рис. 2.3.3

Откуда получаем

$$t' = t\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}} < t. \qquad (2.3.3)$$

Итак, времени по часам движущейся системы отсчета прошло меньше, ее часы движутся медленнее, чем часы в неподвижной системе отсчета. Вопрос теперь состоит в следующем: реальный ли это физический эффект или кажущийся? Действительно ли время в движущейся К'-системе идет медленнее, т. е. часы отстают по сравнению с часами К-системы? Экспериментальные данные показывают, что этот эффект реальный.

Например, появление элементарных частиц — мюонов — около поверхности Земли как раз связано с замедлением времени для движущегося объекта. В самом деле, мюоны рождаются в верхних слоях атмосферы под действием космических лучей. Время жизни их в неподвижном состоянии τ = 2 мкс (микросекунд). За это время они могли бы пройти путь: $l \le c\tau \sim 3\cdot10^8\cdot2\cdot10^{-6} = 0.6$ км. Однако их обнаруживают у поверхности Земли на расстоянии нескольких километров от места рождения. В самом деле, поскольку они летят со скоростью $v = 0.99$ c, то по часам Земли время их жизни равно

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2}{0.14} = 14\,\text{мкс}.$$

Путь, который они проходят за это время, примерно равен

$$l \le ct \sim 14 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{8} \sim 4.2 \text{ км},$$

что и подтверждается появлением мюонов в нижних слоях атмосферы.

Таким образом, замедление времени в движущемся объекте — *реальный эффект*. Имеется также большое множество других примеров и экспериментальных фактов, подтверждающих этот эффект.

2.3.2. Сокращение длины движущегося тела

Определим длину движущегося стержня с помощью тех же «приборов»: источника и приемника света и зеркала. В сопутствующей системе отсчета К' (см. рис. 2.3.4), пользуясь соотношением (2.3.3), имеем

$$L' = \frac{ct'}{2} = \frac{ct}{2}\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}, \qquad (2.3.4)$$

где L' — длина стержня в К′-системе (в сопутствующей системе отсчета).

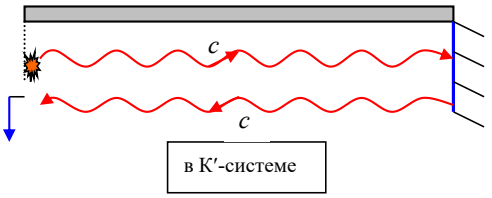


Рис. 2.3.4

Рассмотрим процесс измерения длины стержня в лабораторной системе отсчета К (рис. 2.3.5). Так, время распространения света вдоль стержня в направлении, совпадающем с направлением скорости движения стержня, определяется из уравнения

$$ct_1 = L + V_0 t_1,$$

где L — длина стержня в К-системе отсчета, а $V_0 t_1$ — расстояние, на которое зеркало «уедет» за время движения света. Откуда время движения света в одну сторону равно

$$t_1 = \frac{L}{c - V_0}. \qquad (2.3.5)$$

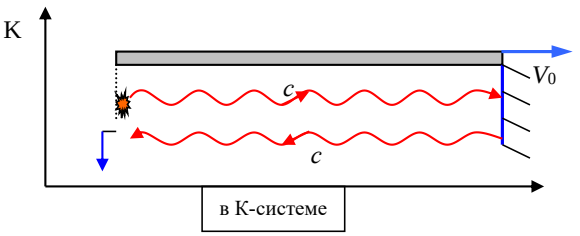


Рис. 2.3.5

Аналогично определяем время распространения света в обратную сторону — против движения стержня:

$$ct_2 = L - V_0 t_2;$$

$$t_2 = \frac{L}{c + V_0}. \qquad (2.3.6)$$

Откуда полное время движения света туда и обратно вдоль стержня для наблюдателя в К-системе равно

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - V_0^2}. \qquad (2.3.7)$$

Выражая время из (2.3.4) и подставляя в последнее уравнение (2.3.7), находим длину движущегося стержня:

$$L' = \frac{c}{2}\frac{2Lc}{c^2 - V_0^2}\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}.$$

Итак, получаем

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} > L. \qquad (2.3.8)$$

С точки зрения К-системы, относительно которой тело (стержень) движется, его длина уменьшается по сравнению с длиной в сопутствующей системе отсчета, где он покоится.

2.3.3. Синхронизация часов и одновременность событий

В движущейся ИСО время идет медленнее. Это означает, что если часы К′-системы пролетают мимо часов К-системы со скоростью V_0 и синхронизируются в тот момент ($t_0 = t_0' = 0$), когда они находились в одной точке, то спустя t' с (по часам К′-системы) часы К-системы будут показывать большее время:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}. \qquad (2.3.9)$$

Если же двое часов находятся в одной ИСО (рис. 2.3.6), то скорость их хода не должна различаться, и мы можем отсчитывать время по любым часам, если только предварительно синхронизируем их.

Так, если часы находятся в К′-системе на расстоянии x' друг от друга, то их можно синхронизировать обычным способом, передавая сигнал (радио, свет) точного времени. Это способ Эйнштейна синхронизации часов. В 0 ч ($t_0' = 0$) посылаем сигнал (световую вспышку) в выбранную точку P в К′-системе. Сигнал идет в течение x'/c с, поэтому, приняв его, наблюдатель в точке P ставит *на своих часах сразу время* $t' = x'/c$, *учитывая запаздывание.* Таким образом, часы в точке 0′ и точке P синхронизированы, и можно отсчитывать время по любым из них.

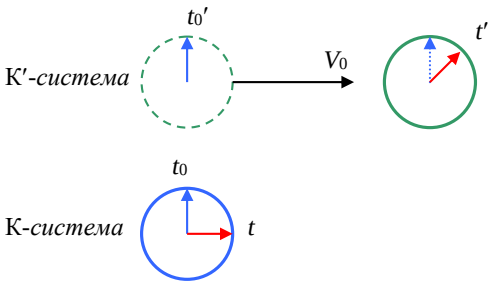


Рис. 2.3.6

Однако иначе этот процесс выглядит с точки зрения наблюдателя в К-системе, относительно которого К′-система движется со скоростью V_0. С его точки зрения, пока сигнал точного времени шел из точки 0′ в точку P, точка P убегала со скоростью V_0, так что к моменту времени, когда сигнал будет принят в точке P, часы в точке 0′ покажут уже не x'/c, а большее время. Какое? С точки зрения К-наблюдателя точка P переместится на расстояние V_0t' за время движения светового сигнала, следовательно, свет потратит на этот путь дополнительное время:

$$\Delta t = \frac{V_0 t'}{c} = \frac{V_0 x'}{c^2}.$$

Эта разность времен представляет собой постоянное, не меняющееся во времени смещение показаний часов точки 0′ относительно показаний часов точки P. Часы 0′ и P идут с одинаковой скоростью, но часы 0′ всегда спешат и показывают на Δt с больше. Однако это только с точки зрения наблюдателя и часов в К-системе, а с точки зрения наблюдателей К′-системы их часы показывают одно и то же время. Поэтому если два события в точках 0′ и P происходят одновременно по часам К′-системы, то по часам К-системы они происходят не одновременно. И наоборот, одновременные события в К-системе воспринимаются как неодновременные события в К′-системе. Это явление и называется *относительной одновременностью*.

Итак, события в различных точках пространства считаются одновременными в данной системе отсчета, если синхронизированные часы, находящиеся в этих точках, показывают одно и то же время. *Понятие одновременности — понятие относительное*.

Рассмотрим пример, представленный на рисунке 2.3.7: распространение света в двух системах отсчета К и К′. Когда начала систем отсчета совпадали, одновременно испускался свет из этих точек — распространяется сферическая волна. В К-системе свет за время t достигнет сферы радиусом ct. В К′-системе свет за время t' достигнет сферы радиусом ct'. Одновременно световому фронту невозможно находиться на сфере в К-системе и на сфере в К′-системе, так как центры сфер сместились. Это и означает, что в различных точках пространства и в разных ИСО время течет неодинаково.

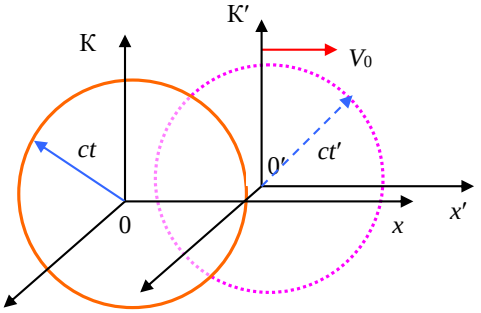


Рис. 2.3.7

Другой пример — распространение света из середины движущегося поезда к его левому и правому концам. С точки зрения пассажира поезда свет одновременно достигнет правый и левый конец поезда, с точки зрения стороннего наблюдателя — в различное время.

2.4. Преобразования Лоренца

2.4.1. Преобразования из общих свойств пространства и времени

Воспользуемся общими свойствами пространства и времени для определения преобразований координат и времени при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. Общий вид преобразований[1] координат и времени при переходе от К-системы отсчета в К′-систему отсчета может быть записан в самом общем виде:

$$\begin{aligned} x' &= \Phi_1(x,y,z,t), \quad y' = \Phi_2(x,y,z,t), \\ z' &= \Phi_3(x,y,z,t), \quad t' = \Phi_4(x,y,z,t). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Из однородности пространства и времени следует *линейность этих преобразований*. В самом деле, если рассмотреть бесконечно малое смещение

$$dx' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}dz + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}dt\,, \tag{2.4.2}$$

то из-за однородности пространства и времени это выражение должно оставаться одинаковым во всех точках пространства и времени. Следовательно, частные производные в (2.4.2) должны быть постоянными величинами. Отсюда следует линейность преобразований, т. е. они имеют вид

$$\Phi_1(x,y,z,t) = A_1x + A_2y + A_3z + A_4t + A_5\,. \tag{2.4.3}$$

То же самое имеем и для остальных функций в (2.4.1). Выберем обе системы отсчета так, что в начальный момент времени $t = 0$ начала координат К- и

[1] Вывод аналогичен выводу, приведенному в учебнике А. Н. Матвеева.

К′-систем отсчета совпадают. Тогда автоматически получаем, что коэффициент A_5 равен 0. Итак, преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 t; \\ y' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t; \\ z' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 t; \\ t' &= d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 t. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Это общие преобразования, которые справедливы при любом направлении относительного движения двух систем отсчета.

2.4.2. Преобразования *y* и *z* координат

Итак, рассматриваем две инерциальные системы отсчета К и К′ (рис. 2.4.1), причем, как и ранее, оси x и x' совпадают по направлению и К′-система движется относительно К-системы вдоль оси x со скоростью V_0. Поскольку оси y и z перпендикулярны относительному движению, рассмотрим сначала их преобразование.

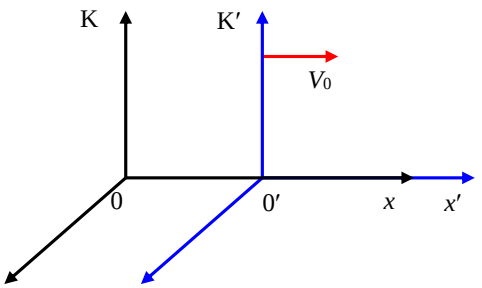


Рис. 2.4.1

Рассмотрим точку начала координат в обеих системах. Так как оси x и x' совпадают, то для точек $y = z = 0$ следует также, что $y' = z' = 0$ при любых x, y, z, и t. Заметим, что меняться могут отрезки — линейные масштабы, а точки всегда переходят в точки в другой системе отсчета. Тогда можно записать из уравнений (2.4.4) для $y' = 0$ и $z' = 0$ соответственно:

$$\begin{aligned} a_1 x + a_3 z + a_4 t &= 0; \\ b_1 x + b_2 y + b_4 t &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

И так как последние равенства выполняются при любых x, y, z и t (они все относятся к одной системе отсчета), из (2.4.5) следует, что

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = a_4 = 0; \\ b_1 &= b_2 = b_4 = 0. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Следовательно, из (2.4.4) остается зависимость координат y и z соответственно друг от друга, причем в силу равноправности этих осей по отношению к оси x коэффициенты одинаковы:

$$y' = ay, \qquad z' = az. \tag{2.4.7}$$

Можно записать из (2.4.7) обратное преобразование:

$$y = \frac{1}{a}y', \quad z = \frac{1}{a}z'. \tag{2.4.8}$$

Из-за равноправия систем отсчета при переходе от одной ИСО к другой длина масштаба должна измениться точно так же, как при обратном переходе, т. е. из (2.4.7) и (2.4.8) следует:

$$\frac{1}{a} = a \quad \text{и} \quad a^2 = 1. \tag{2.4.9}$$

Отсюда получаем два решения $a = \pm 1$. Выбираем решение $a = 1$, при этом выборе оси y и y', так же как и z и z', сонаправлены. Отметим, что при коэффициенте $a = -1$ соответствующие оси направлены в противоположные стороны. Итак, окончательно получаем преобразования для y и z координат:

$$y = y', \quad z = z'. \tag{2.4.10}$$

То есть при переходе от К-системы отсчета к К'-системе перпендикулярные к направлению движения масштабы не изменяются: *y и z координаты неизменны*.

2.4.3. Преобразования *x* и *t* координат

Поскольку координаты y и z при переходе из одной ИСО в другую связаны отдельно (2.4.10) и не зависят от x и t, то последние могут быть связаны только друг с другом. Поэтому запишем:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + \delta t; \\ x &= \gamma' x' + \delta' t'. \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Воспользуемся равноправностью ИСО и постулатом о постоянстве скорости света и рассмотрим эти преобразования поэтапно.

1. Рассмотрим точку начала координат К'-системы. Точка начала координат К'-системы относительно К-системы движется с постоянной скоростью V_0 и имеет следующие координаты: $x = V_0 t$ и $x' = 0$. Поэтому, подставляя эти координаты в первое уравнение (2.4.11), имеем:

$$0 = \gamma V_0 t + \delta t \quad \text{и} \quad \delta = -\gamma V_0.$$

Далее подставляя в (2.4.11), получаем

$$x' = \gamma\left(x - V_0 t\right). \tag{2.4.12}$$

2. Аналогично рассмотрим движение начала координат системы отсчета К. С точки зрения наблюдателя в К-системе имеем $x = 0$, а с точки зрения К'-системы — $x' = -V_0 t'$. Тогда получаем из второго уравнения (2.4.11) следующее выражение:

$$x = \gamma'\left(x' + V_0 t'\right). \tag{2.4.13}$$

3. Докажем, что γ' = γ. Для этого измеряем длину стержня в двух ситуациях.

Пусть стержень покоится в К'-системе (рис. 2.4.2), тогда его длина в этой системе равна разности координат левого и правого концов стержня:

$$l = x_2' - x_1'. \qquad (2.4.14)$$

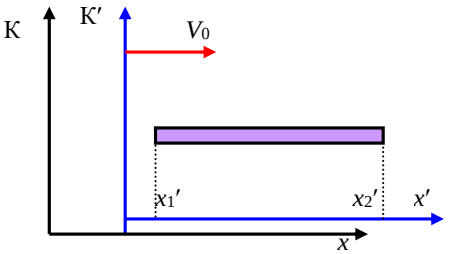


Рис. 2.4.2

Длина стержня с точки зрения наблюдателя в К-системе — разность координат концов стержня, взятых в одно и то же время, например t_0, в К-системе отсчета. Тогда пользуясь (2.4.12), имеем для этих координат следующие соотношения:

$$x_1' = \gamma\left(x_1 - V_0 t_0\right), \quad x_2' = \gamma\left(x_2 - V_0 t_0\right).$$

Следовательно, длина движущегося стержня в К-системе отсчета равна

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\gamma} = \frac{l}{\gamma}. \qquad (2.4.15)$$

Пусть теперь стержень покоится в К-системе (рис. 2.4.3), тогда его длина в этой системе равна

$$l = x_2 - x_1. \qquad (2.4.16)$$

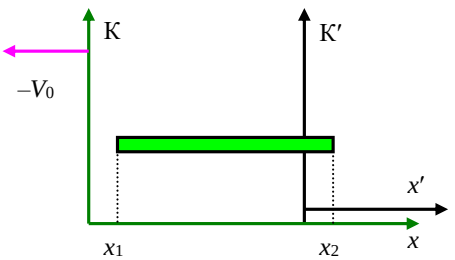


Рис. 2.4.3

Пользуясь (2.4.13), получаем для этих координат следующие соотношения, взятые также в один момент времени t_0':

$$x_1 = \gamma'\left(x_1' + V_0 t_0'\right), \qquad x_2 = \gamma'\left(x_2' + V_0 t_0'\right).$$

Для разности координат имеем

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\gamma'} = \frac{l}{\gamma'}. \qquad (2.4.17)$$

В силу равноправности систем отсчета измерение покоящегося стержня должно давать один и тот же результат, поэтому получаем

$$\frac{l}{\gamma} = \frac{l}{\gamma'}$$

и отсюда имеем

$$\gamma = \gamma'. \qquad (2.4.18)$$

4. Получим коэффициент γ из постулата о постоянстве скорости света. Пусть световой сигнал испускается из начала координат систем К' и К в момент времени $t = t' = 0$. Тогда координаты светового сигнала в этих системах равны:

$$x' = ct', \qquad x = ct. \qquad (2.4.19)$$

Подставим в (2.4.19) преобразования (2.4.12) и (2.4.13):

$$ct' = \gamma\left(x - V_0 t\right), \quad ct = \gamma\left(x' + V_0 t'\right).$$

И далее, снова используя (2.4.19) для подстановки x' и x, получаем:

$$ct' = \gamma t\left(c - V_0\right), \quad ct = \gamma t'\left(c + V_0\right). \qquad (2.4.20)$$

Перемножая уравнения (2.4.20) и сокращая временные множители, получаем коэффициент γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}. \qquad (2.4.21)$$

Тогда *преобразование координат* x' и x имеет вид

$$x' = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}. \qquad (2.4.22)$$

Преобразование для времени получаем из формул (2.4.12) и (2.4.13), предполагая (2.4.18) и (2.4.21):

$$x' = \gamma\left(x - V_0 t\right), \qquad x = \gamma\left(x' + V_0 t'\right). \qquad (2.4.23)$$

Из второго уравнения выражаем $V_0 t'$ и подставляем x' из первого:

$$V_0 t' = \frac{x}{\gamma} - x' = \frac{x}{\gamma} - \gamma\left(x - V_0 t\right) = \gamma V_0 t - x\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right) = \gamma V_0 t - x\frac{\frac{V_0^2}{c^2}}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}.$$

Отсюда для *преобразования времени* получаем

$$t' = \frac{t - V_0 x/c^2}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}. \qquad (2.4.24)$$

Итак, получаем *преобразования Лоренца* при переходе из К-системы отсчета в К'-систему:

$$x' = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - V_0 x/c^2}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \qquad (2.4.25)$$

Обратное преобразование при переходе из К'-системы в К-систему записывается:

$$x = \frac{x' + V_0 t'}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + V_0 x'/c^2}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z'. \qquad (2.4.26)$$

Иногда удобнее писать преобразования Лоренца, вводя величину β:

$$\beta \equiv V_0/c \qquad (2.4.27)$$

или величину γ из (2.4.21). То есть можно записать преобразования в виде:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(x - V_0 t\right), \quad y' = y, \\ t' &= \frac{t - \frac{V_0}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t - \frac{V_0}{c^2}x\right), \quad z' = z. \end{aligned} \qquad (2.4.28)$$

Аналогично преобразования записываются в обратную сторону (2.4.26), при переходе от «штрихованных» координат к координатам К-системы.

При скоростях, значительно меньших скорости света $V_0 \ll c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея:

$$x' \approx x - V_0 t, \quad t' = t, \quad y' = y, \quad z' = z. \qquad (2.4.29)$$

Таким образом, выполняется принцип дополнительности: новая теория (новые преобразования координат) включает в себя предыдущую в предельном случае малых скоростей объектов.

2.5. Следствия из преобразований Лоренца

2.5.1. Одновременность событий в различных ИСО

Рассмотрим одновременность событий в различных системах отсчета. Исходим из преобразований Лоренца:

$$x' = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{V_0}{c^2}x}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{t - \frac{V_0}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (2.5.1)$$

где V_0 — скорость К'-системы отсчета относительно К-системы отсчета вдоль оси x. Из этих соотношений получаем следующие выводы.

1. Если в К-системе отсчета два события происходят в одной точке $x_1 = x_2$ и одновременно $t_1 = t_2$, то в К'-системе они происходят также в одной точке $x'_1 = x'_2$ и одновременно $t'_1 = t'_2$.

2. Если в К-системе отсчета два события происходят одновременно $t_1 = t_2$ в разных точках $x_1 \neq x_2$, то в К'-системе они разобщены: эти события происходят в разные моменты времени $t'_1 \neq t'_2$ и в разных точках $x'_1 \neq x'_2$.

Эти выводы следуют из (2.5.1), если рассмотреть координаты и времена для двух точек и взять их разность. Об этом говорят как об *относительности одновременности событий*.

2.5.2. Сокращение отрезков длины

Рассмотрим стержень, движущийся относительно К-системы отсчета со скоростью V_0 (рис. 2.5.1). Удобно ввести К'-систему отсчета, связанную со стержнем, т. е. стержень покоится в К'-системе отсчета. Измерим длину этого стержня в К-системе. Из преобразований Лоренца (2.4.25) для координаты x получаем для левого и правого концов стержня:

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.5.2}$$

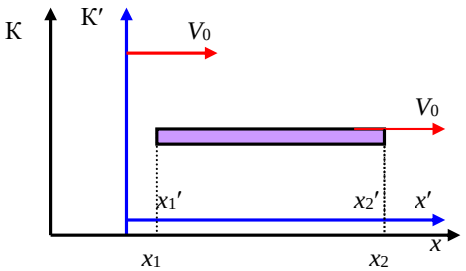


Рис. 2.5.1

Для измерения длины стержня в К-системе необходимо фиксировать (измерять) координаты левого и правого концов стержня в один и тот же момент времени по часам К-системы $t_1 = t_2$. Тогда разность координат $l = x_1 - x_2$ и определяет длину стержня в данной системе. Вычитая первое уравнение (2.5.2) из второго и учитывая одинаковое время измерения $t_1 = t_2$, получаем

$$x_2' - x_1' \equiv l_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.5.3}$$

Здесь мы ввели величину l_0 — *собственную длину* стержня, т. е. длину стержня в системе отсчета, относительно которой стержень покоится. Таким образом, получаем, что длина стержня в К-системе, относительно которой стержень движется, сокращается:

$$l = l_0\sqrt{1 - V_0^2/c^2} \quad (l < l_0). \tag{2.5.4}$$

<u>Вывод</u>: *сокращаются продольные размеры движущегося объекта*. Собственная длина l_0 всегда является наибольшей длиной.

2.5.3. Преобразование промежутков времени

Рассмотрим два момента времени в одной и той же точке в движущейся К'-системе отсчета, например рождение движущейся частицы и ее распад через некоторое время. Из преобразований Лоренца (2.4.26) имеем для двух моментов времени в К-системе отсчета:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V_0}{c^2} x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V_0}{c^2} x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.5.5}$$

Полагая равенство координат $x'_1 = x'_2$ в К'-системе отсчета, связанной с частицей, получаем для промежутков времени:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.5.6}$$

Здесь промежуток времени $\Delta t' = \Delta t_0$ — *собственное время*, т. е. время между двумя событиями в одной и той же точке координатного пространства. Иначе, собственное время — время жизни частицы в системе отсчета, где она покоится. Δt — это промежуток времени по часам К-системы, относительно которой движется частица. Таким образом, получаем замедление течения времени в движущихся объектах:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad \left(\Delta t > \Delta t_0\right). \tag{2.5.7}$$

<u>Вывод</u>: *течение времени замедляется в движущейся системе отсчета*. При этом собственное время является самым коротким временем.

2.5.4. Преобразование скорости, сложение скоростей

Скорость материальной точки в каждой системе отсчета должна определяться по линейке и часам именно этой системы. Таким образом скорости в К- и К'-системах отсчета равны соответственно:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}. \tag{2.5.8}$$

Рассмотрим компоненты вектора скорости (рис. 2.5.2). Для этого возьмем малые приращения (дифференциалы) в преобразованиях Лоренца, например в (2.4.26):

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz'. \tag{2.5.9}$$

Делим приращение координат dx на дифференциал времени dt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V_0 dt'}{dt' + \frac{V_0}{c^2}dx'} = \frac{dx'/dt' + V_0}{1 + \frac{V_0}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \frac{V_0}{c^2}dx'} = \frac{dy'}{dt'}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{V_0}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

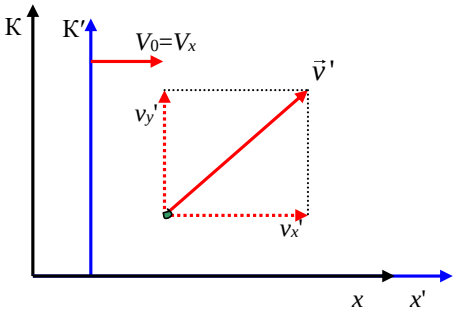


Рис. 2.5.2

Учитывая определение скорости в К'-системе отсчета (2.5.8), получаем формулы для преобразования компонент скорости при переходе от К'-системы отсчета к К-системе:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v_x' + V_0}{1 + \frac{v_x' V_0}{c^2}}; \tag{2.5.10}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v_x' V_0}{c^2}}; \tag{2.5.11а}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v_x' V_0}{c^2}}. \tag{2.5.11б}$$

Обратные преобразования имеют вид:

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V_0}{1 - \frac{v_x V_0}{c^2}}, \qquad v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v_x V_0}{c^2}}. \tag{2.5.12}$$

Эти же формулы (2.5.10)–(2.5.12) дают правила сложения скоростей. Рассмотрим некоторые свойства этих преобразований.

1. При малых скоростях: $V_0 \ll c$ получаем правила сложения скоростей Галилея:

$$v_x \approx v_x' + V_0, \qquad v_y \approx v_y', \qquad v_z \approx v_z'. \tag{2.5.13}$$

2. Если объект движется со скоростью света в К'-системе отсчета $v_x' = c$, то в К-системе имеем

$$v_x = \frac{c + V_0}{1 + \frac{V_0}{c^2} c} = c. \tag{2.5.14}$$

Получаем, что скорость света во всех ИСО одинакова и равна скорости света c. Получили результат, который был заложен при выводе преобразований Лоренца. Не существует материальных объектов, движущихся со скоростью, большей скорости света.

Примечание 26. Со скоростью больше скорости света могут двигаться не материальные объекты, а, говоря условно, «солнечные зайчики». Например, парадокс «ножниц» (см. рис. 2.5.3): прохождение стержня через границу (ось x). Геометрическая точка пересечения оси x и стержня — точка A — может перемещаться по оси x быстрее скорости света. В самом деле, имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \Delta y \big/ \Delta x = \frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t} = \frac{V}{V_A},$$

где V — скорость стержня, а V_A — скорость передвижения точки A. Откуда при малых углах φ:

$$V_A = \frac{V}{\operatorname{tg}\varphi} \approx \frac{V}{\varphi}, \qquad (2.5.15)$$

видно, что скорость точки A может быть сколь угодно большой, в частности больше скорости света. Аналогичный пример — падающая волна на берег: падающий фронт волны распространяется по берегу со скоростью, зависящей от угла падения волны. И в том и в другом случае мы имеем дело не с передвижением материального объекта, а со скоростью передвижения некоторой геометрической точки, которая не может переносить информацию. Информация может передаваться в том случае, если воздействовать на стержень, например ударить вдоль оси y, и точка A сместиться вправо. Однако в этом случае скорость перемещения точки A не превышает скорости распространения акустических волн (волн деформации).

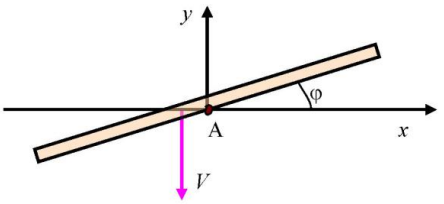


Рис. 2.5.3

К этому же явлению относится эффект «солнечного зайчика» (рис. 2.5.4), который распространяется по стенке со скоростью, большей скорости света, при достаточно быстром повороте отражающего зеркала.

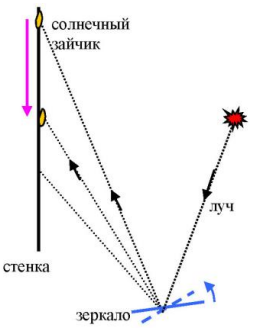


Рис. 2.5.4

Можно рассмотреть прожектор, вращающийся вокруг оси, при этом луч света вращается. В этой плоскости вращения на большом расстоянии друг от друга, но на равном расстоянии от прожектора находятся две точки *А* и *Б*. Если ω — угловая скорость вращения, то всегда можно найти такое расстояние между точками, что $\omega r = v_s > c$, где v_s — скорость зайчика. Однако эта скорость также не несет никакой информации. Еще аналогичный пример: скорость перемещения луча на экране ряда осциллографов может также превышать скорость света.

2.5.5. Примеры проявлений релятивистских эффектов

1. Время жизни мезона.

Собственное время жизни π^+-мезона, который осуществляет взаимодействие между нуклонами в ядре, составляет $\tau_0 = 2.5 \cdot 10^{-8}$ *с*. π^+-мезон распадается на μ^+-мезон и нейтрино ν (масса π^+-мезона $m_{\pi+} \sim 273\ m_e$, масса μ^+-мезона $m_{\mu+} \sim$ $\sim 215\ m_e$). За это время максимальное расстояние, которое он может пройти до распада, составляет:

$$l \sim \tau_0 c = 2.5 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^8 \approx 7.5\,\text{м}.. \qquad (2.5.16)$$

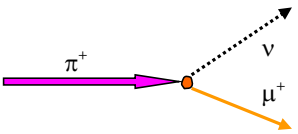


Рис. 2.5.5

Тем не менее от источника π^+-мезонов (например, Бэватрон в лаборатории Лоуренса, США) частицы долетают до водородной пузырьковой камеры, находящейся на расстоянии ~ 100 м. Так проводились эксперименты по измерению времени жизни π^+-мезонов (Дарбин, Лоар, Хевенс, 1952). Скорость π^+-мезонов была близка к скорости света, так что $\beta = v/c = \left(1 - 5 \cdot 10^{-5}\right)$. Пользуясь преобразованием временных интервалов (2.5.7), находим время жизни мезонов в лабораторной системе отсчета:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2.5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1-\left(1-5 \cdot 10^{-5}\right)^2}} \approx 2.5 \cdot 10^{-6}\ \text{с}. \qquad (2.5.17)$$

За это время π^+-мезон пролетает расстояние ~ 750 м.

Аналогично получаем то же самое для других элементарных частиц (например, μ^+-мезонов). Вообще, замедление времени проверялось непосредственно в 1970-х гг., когда поместили точные атомные часы на самолете и на Земле (см. А. Н. Матвеев, т. 1, с. 97–99). Самолет находился около суток в воздухе, передвигаясь с крейсерской скоростью, затем при приземлении сравнивались показания часов. Часы на Земле показывали несколько большее время, чем часы на самолете.

2. Аберрация неподвижных звезд.

Аберрация — это отклонение видимого положения звезды на небе от истинного положения. Любая точка, неподвижная в К-системе, движется в К'-системе (Земля) со скоростью $v_x' = -V_3$. Пусть звезда в системе Солнца нахо-

дится непосредственно над наблюдателем, тогда свет от звезды в К'-системе будет попадать в глаза под некоторым углом α к вертикали (рис. 2.5.6), т. е. к истинному положению точки. Сосчитаем угол отклонения:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|v_x'|}{v_y'} = \frac{V_3}{v_y'}. \qquad (2.5.18)$$

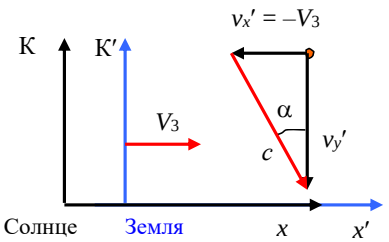


Рис. 2.5.6

Вертикальную компоненту скорости получим из формул преобразования скорости (2.5.12), учитывая, что вертикальная скорость (а другой компоненты нет, так как $v_x = 0$) в системе Солнца равна скорости света $v_y = c$:

$$v_y' = v_y \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - V_3 v_x / c^2} = c\sqrt{1-\beta^2} = c\sqrt{1 - V_3^2/c^2}, \qquad (2.5.19)$$

где скорость Земли V_3 = 30 км/с. Откуда имеем выражение для угла аберрации:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_3}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{или} \quad \sin\alpha = \frac{V_3}{c}. \qquad (2.5.20)$$

Когда производятся наблюдения в течение года, то положение звезды на небе «плавает» около истинного положения звезды из-за изменения направления скорости Земли относительно Солнца.

Если $V_3 \ll c$ (или $c \to \infty$), то получаем аберрацию в рамках механики Ньютона: $\operatorname{tg}\alpha = V_3/c$.

3. Эффект Доплера.

Эффект Доплера — изменение частоты волны при переходе от одной системы отсчета к другой. Сначала рассмотрим волну (подробнее о волнах см. главу 4), распространяющуюся вдоль оси x, в К- и К'-системах отсчета (рис. 2.5.7) со скоростью света c:

$$E(x,t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right),$$
$$E'(x',t') = E_0' \cos\left(\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + \alpha'\right). \qquad (2.5.21)$$

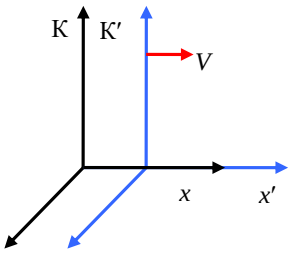


Рис. 2.5.7

Здесь E_0 — амплитуда колебаний проекции вектора *напряженности электрического поля*; ω — *круговая частота* колебаний, выражение под косинусом определяет *фазу волны* в данной точке и данное время:

$$\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\alpha=\omega t-\frac{\omega}{c}x+\alpha=\omega t-kx+\alpha\,, \qquad (2.5.22)$$

где $k=\omega/c$ — *волновое число*; α — нулевая фаза.

Заметим, что в общем случае фаза волны инвариантна во всех ИСО, т. е. можно записать

$$\omega t-\vec{k}\vec{r}=\omega' t'-\vec{k}'\vec{r}'\,, \qquad (2.5.23)$$

здесь $\vec{k}=\omega\vec{v}/v^2$ — волновой вектор; $\vec{v}$ — скорость распространения волны (в нашем случае $v=c$). Здесь фазы волны записаны так, что начала отсчета К- и К'-систем совпадают в момент времени $t = t' = 0$. Инвариантность фазы доказывается по числу волн (например, максимумов), проходящих через одного и другого наблюдателя, находящихся в различных ИСО (см. Сивухин Д. М., т. IV, с. 652).

Положим без ограничения общности нулевую фазу равной α = 0. Подставим в фазу волны (2.5.22), распространяющейся в К'-системе, x' и t' через x и t по формулам преобразования Лоренца (2.5.1):

$$\omega'\left(\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{x-Vt}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\omega'\left(\frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1+\frac{V}{c}\right)-\frac{x}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(1+\frac{V}{c}\right)\right)=\omega'\frac{1+\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t-\frac{x}{c}\right).$$

Поскольку фаза должна иметь тот же вид, что и в К-системе отсчета, получаем

$$\omega=\omega'\frac{1+V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\omega'\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}\,. \qquad (2.5.24)$$

Эта формула описывает так называемый *продольный эффект Доплера*. Пусть теперь ω (= ω') — частота, принимаемая приемником; ω_0 (= ω) — частота источника; V — скорость источника. Тогда, если источник и приемник удаляются друг от друга, имеем

$$\omega=\omega_0\sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}}=\omega_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,, \qquad (2.5.25)$$

при этом происходит смещение частоты в длинноволновую область. Если приемник и источник сближаются, то принимаемая частота увеличивается:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,. \qquad (2.5.26)$$

Теперь рассмотрим эффект Доплера в общем случае. Пусть источник (И) расположен в К'-системе, а приемник (Пр) — в К-системе (см. рис. 2.5.8), причем направление распространения волны составляет угол φ с осью *x*. Плоская волна в К-системе отсчета записывается:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = E_0 \cos\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right) = \\ &= E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x\cos\varphi}{c} - \frac{y\cos\alpha}{c} - \frac{z\cos\gamma}{c}\right)\right]. \end{aligned} \qquad (2.5.27)$$

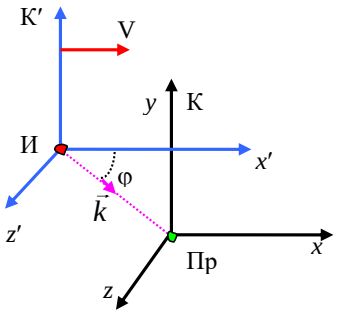


Рис. 2.5.8

Здесь мы воспользовались следующими соотношениями:

$$k_x x = \frac{\omega x}{c_{ph}} = \frac{\omega x}{c/\cos\varphi} = \frac{\omega x \cos\varphi}{c}. \qquad (2.5.28)$$

Отметим, что фазовая скорость волны вдоль оси *x* больше скорости света и определяется следующим выражением:

$$c_{ph} = \frac{c}{\cos\varphi} > c. \qquad (2.5.29)$$

Запишем общую фазу волны и подставим преобразования Лоренца:

$$\omega\left(t - \frac{x}{c}\cos\phi - \frac{y}{c}\cos\alpha - \frac{z}{c}\cos\gamma\right) =$$

$$= \omega\left(\frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x' + Vt'}{c\sqrt{1-\beta^2}}\cos - \frac{y'}{c}\cos\alpha - \frac{z'}{c}\cos\gamma\right) =$$

$$= \omega t'\left(\frac{1-\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) - \frac{\omega x'}{c}\frac{\beta - \cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\omega y'}{c}\cos\alpha - \frac{\omega z'}{c}\cos\gamma = \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z'.$$

Таким образом, из сравнения полных фаз получаем

$$\omega' = \omega_{И} = \omega\frac{1-\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_{Пр}\frac{1-\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (2.5.30)$$

Окончательно получаем формулу, описывающую изменение частоты — эффект Доплера в общем случае:

$$\omega_{Пр} = \omega_{И}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\varphi}. \qquad (2.5.31)$$

При углах $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, т. е. при сближении И и Пр, получаем «синее» смещение частоты (частота увеличивается).

При углах $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$, т. е. при удалении И и Пр, получаем «красное» смещение частоты (частота уменьшается).

При угле $\varphi = \pi/2$ также получаем смещение частоты — *поперечный эффект Доплера*:

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (2.5.32)$$

Это смещение частоты в красную сторону — чисто релятивистский эффект. Он мал: смещение частоты $\sim \beta^2$. Впервые его наблюдал на каналовых лучах Айве в 1932 г.

Примечание 27. Христиан Доплер (1803–1853), австрийский физик, математик.

2.6. Интервал. «Четырехмерное пространство-время»

2.6.1. Интервал

В классической механике Ньютона пространство и время считались независимыми друг от друга. Поэтому расстояние между двумя точками и промежутки времени являлись *инвариантами*, т. е. были одинаковыми во всех системах отсчета.

В релятивистской механике такая инвариантность утрачена: Δr и Δt изменяются при преобразованиях Лоренца (см. п. 2.3–2.5). В релятивистской теории имеется один пространственно-временной инвариант, связывающий координаты и время, — *пространственно-временной интервал*, или просто *интервал*. Интервал между двумя событиями, определяемыми точками (t_1, x_1, y_1, z_1) и (t_2, x_2, y_2, z_2), есть величина S, квадрат которой равен

$$S^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2 = Inv. \qquad (2.6.1)$$

Легко убедиться, что это инвариант, подставив в (2.6.1) преобразования Лоренца для разностей координат:

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1' + V(t_2' - t_1')}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + \frac{V}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$y_2 - y_1 = y_2' - y_1', \qquad z_2 - z_1 = z_2' - z_1'. \qquad (2.6.2)$$

$$S^2=\gamma^2\left(c^2\left(t_2'-t_1'\right)^2+\frac{V^2}{c^2}\left(x_2'-x_1'\right)^2+c^2\frac{2V}{c^2}\left(t_2'-t_1'\right)\left(x_2'-x_1'\right)\right)-$$

$$-\gamma^2\left(\left(x_2'-x_1'\right)^2+2V\left(t_2'-t_1'\right)\left(x_2'-x_1'\right)+V^2\left(t_2'-t_1'\right)^2\right)-\left(y_2'-y_1'\right)^2-\left(z_2'-z_1'\right)^2= \quad (2.6.3)$$

$$=c^2\left(t_2'-t_1'\right)^2-\left(x_2'-x_1'\right)^2-\left(y_2'-y_1'\right)^2-\left(z_2'-z_1'\right)^2=S'^2=Inv.$$

Здесь, как и ранее, ввели обозначение

$$\gamma^{-1}=\sqrt{1-V^2/c^2}=\sqrt{1-\beta^2}\,. \quad (2.6.4)$$

Итак, получаем инвариантную величину — интервал

$$S=S'=inv=\sqrt{c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2}\,. \quad (2.6.5)$$

Для бесконечно малых интервалов имеем

$$dS^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \quad (2.6.6)$$

Наиболее ясный физический смысл интервал приобретает при введении «четырехмерного пространства-времени».

2.6.2. Пространство Минковского

Г. Минковский для описания пространственно-временных событий ввел геометрическую интерпретацию: совокупность (x, y, z, t) представляет собой *мировую точку*, а многообразие мировых точек образует *четырехмерное пространство*, называемое пространством Минковского. Линия в пространстве Минковского — *мировая линия*.

Геометрия пространства Минковского определяется инвариантным расстоянием между двумя мировыми точками, которое и есть интервал между этими событиями.

Введем понятие *4-вектора пространства-времени*, определяя компоненты этого вектора следующим образом:

$$x^0=ct\equiv\tau,\quad x^1=x,\quad x^2=y,\quad x^3=z;$$

$$\left(ct,x,y,z\right)\equiv\left(ct,\vec{r}\right). \quad (2.6.7)$$

Формулы преобразования «нулевой» и «первой» компонент 4х-вектора при переходе к другой системе отсчета можно записать:

$$x^0=ct=c\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{x'^0+\beta x'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma\left(x'^0+\beta x'^1\right); \quad (2.6.8)$$

$$x^1=\frac{x'^1+\beta x'^0}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma\left(x'^1+\beta x'^0\right). \quad (2.6.9)$$

Вторая и третья компоненты не меняются при переходах к другой системе отсчета. Формулы полного преобразования Лоренца могут быть представлены в виде системы:

$$\begin{cases} x^0 = \gamma x'^0 + \beta\gamma x'^1 + 0\cdot x'^2 + 0\cdot x'^3 \\ x^1 = \beta\gamma x'^0 + \gamma x'^1 + 0\cdot x'^2 + 0\cdot x'^3 \\ x^2 = 0\cdot x'^0 + 0\cdot x'^1 + 1\cdot x'^2 + 0\cdot x'^3 \\ x^3 = 0\cdot x'^0 + 0\cdot x'^1 + 0\cdot x'^2 + 1\cdot x'^3 \end{cases}. \qquad (2.6.10)$$

Обычно вводят *матрицу преобразования* α^{ik} :

$$x^i = \sum_k \alpha^{ik} x'^k \equiv \alpha^{ik} x'^k, \qquad (2.6.11)$$

где значки *i*, *k* пробегают значения от нуля (нулевая или временная компонента) до 3 (пространственные компоненты), причем в короткой записи формул подразумевается суммирование по повторяющимся значкам. Сама матрица имеет вид:

$$\alpha = \left(\alpha^{ik}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.6.12)$$

Поэтому преобразования Лоренца представляются в виде:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}, \qquad (2.6.13)$$

где новый 4-радиус-вектор получается по обычным правилам перемножения матрицы на столбец. Обратное преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \qquad (2.6.14)$$

Квадрат «длины» 4-радиус-вектора есть квадрат интервала, отсчитанный от начала системы отсчета:

$$S^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2. \qquad (2.6.15)$$

Смысл преобразований Лоренца — это поворот 4-мерной системы координат, при этом при любых поворотах «длина» 4-вектора не меняется, т. е. интервал (расстояние между двумя мировыми точками) остается постоянным.

Примечание 28. Герман Минковский (1864–1909), немецкий математик и физик.

2.6.3. 4-векторы

При построении релятивистской механики в 4-мерном пространстве-времени, помимо 4-радиус-вектора, вводятся и другие 4-векторы для описания физических величин.

Общее определение: *4-мерным вектором* A^i называется совокупность четырех величин $\left(A^0, A^1, A^2, A^3\right)$, которые при преобразовании 4-мерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора x^i:

$$A'^0 = \gamma\left(A^0 - \beta A^1\right); \quad A'^1 = \gamma\left(A^1 - \beta A^0\right); \quad A'^2 = A^2; \quad A'^3 = A^3. \qquad (2.6.16)$$

Инвариантная величина — «квадрат длины» 4-вектора A:

$$A^{02} - A^{12} - A^{22} - A^{32} = Inv. \qquad (2.6.17)$$

Обычное название для вектора с компонентами $\left\{A^i\right\}$ (с верхними индексами) — *контравариантный вектор*. Для симметрии вводят другие компоненты (с нижними индексами):

$$A_0 = A^0, \qquad A_1 = -A^1, \qquad A_2 = -A^2, \qquad A_3 = -A^3. \qquad (2.6.18)$$

Вектор с компонентами $\left\{A_i\right\}$ называется *ковариантным вектором*. Тогда квадрат 4-вектора или скалярное произведение двух 4-векторов записывают таким образом:

$$\sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = Inv; \qquad (2.6.19)$$

$$\sum_{i=0}^{3} A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = Inv.$$

Примечание 29. Иногда в литературе для пространственного 4-вектора вводят другие компоненты: $x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict,$ тогда интервал записывается следующим образом: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$.

2.6.4. Геометрическая иллюстрация 4-радиус-вектора

Часто о геометрии четырехмерного пространства Минковского говорят как о псевдоевклидовой геометрии. Поскольку четырехмерное пространство нам не изобразить, рассмотрим для простоты геометрическую иллюстрацию различных событий на плоскости (ct, x).

1. Так на рисунке 6.1 приведены примеры нескольких мировых линий:

а — мировая линия покоящейся частицы — линия, параллельная оси времени;

б — мировая линия равномерно движущейся частицы, направлена под углом к оси времени, причем чем больше угол θ (но не превышающий 45°), тем выше скорость частицы.

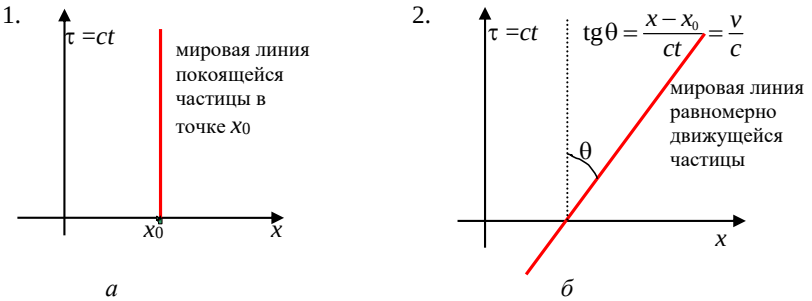


Рис. 2.6.1

2. Пусть имеются два события в точках A и B (см. рис. 2.6.2). «Расстояние» между двумя событиями есть интервал, равный

$$(AB)^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = (BC)^2 - (AC)^2. \qquad (2.6.20)$$

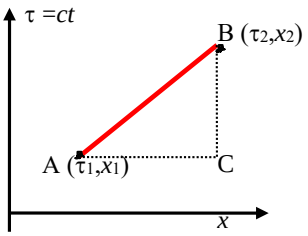


Рис. 2.6.2

Из (2.6.20) видно, что гипотенуза (AB) образованного треугольника на плоскости (ct, x) меньше катета (BC). В этом состоит суть псевдоевклидовой геометрии, где вместо обычной теоремы Пифагора справедлива псевдопифагорова теорема.

3. Отметим важное обстоятельство, что вообще все интервалы $S = \sqrt{\tau^2 - x^2}$ между событиями можно разделить на два типа: *вещественные* и чисто *мнимые*. Это деление не зависит от выбора системы отсчета (СО). Граница между двумя типами интервалов — *нулевой интервал* $S = 0$, т. е. $ct = x$ и $ct = -x$. Нулевые интервалы образуют мировые линии световых лучей. Такой интервал существует между событиями, которые могут быть связаны сигналом, распространяющимся со скоростью света. Мировые линии световых лучей разбивают плоскость на 4 квадранта (см. рис. 2.6.3). Пусть в точке 0 наступило событие 1 ($x = t = 0$). Тогда I и II квадранты определяют абсолютное будущее и абсолютное прошлое соответственно, а III и IV квадранты представляют абсолютно удаленные события относительно события 1. Рассмотрим подробнее интервалы в этих квадрантах.

<u>*Времени-подобный интервал*</u> S (вещественный):

$$S^2 = \tau^2 - x^2 > 0. \qquad (2.6.21)$$

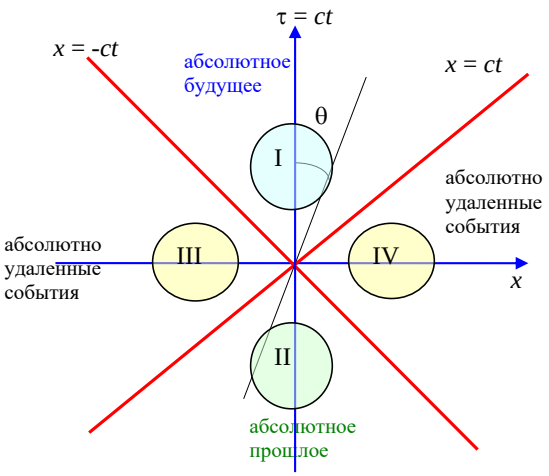


Рис. 2.6.3

Квадрант I: для всех событий $\tau > 0$, следовательно, все они произойдут позднее события 1 (точка в начале отсчета). Это область *абсолютного будущего* по отношению к началу отсчета. Квадрант II: здесь тоже времени-подобный интервал, но для его мировых точек $\tau < 0$ — область *абсолютного прошлого* по отношению к началу отсчета.

Пространственноподобный интервал S (мнимый):

$$S^2 = \tau^2 - x^2 < 0. \qquad (2.6.22)$$

Все события в III и IV квадрантах происходят в точках, никак не связанных с точкой, где произошло событие 1. Однако моменты времени, в которые произошли события в квадрантах III и IV, могут наступить раньше или позже события 1 за счет выбора соответствующей системы координат.

Итак, характер интервала между событиями зависит от наклона прямой, соединяющей эти точки на псевдоевклидовой плоскости. Если угол θ = 45°, то имеем *светоподобный* интервал $S^2 = 0$.

Времени-подобный интервал — это интервал между двумя событиями, для которых существует система отсчета, где эти события произошли в одной точке пространства:

$$S^2 = c^2 t_1^2 - x_1^2 = c^2 t_2^2 > 0. \qquad (2.6.23)$$

Тогда время между этими событиями определяется как отношение интервала и скорости:

$$t_2 = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_1^2 - x_1^2} = \frac{S}{c}. \qquad (2.6.24)$$

Если события происходят с одним и тем же телом, то интервал всегда времениподобный. Только в этом случае имеется «*причинно-следственная*» связь, так как есть понятия «раньше» и «позже».

Пространственноподобный интервал — это интервал между двумя событиями, для которых существует система отсчета, когда эти события произошли в одно и то же время, и тогда расстояние между ними:

$$x'_{12} = \sqrt{x_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = iS_{12}. \qquad (2.6.25)$$

Такое подразделение интервалов — *абсолютное*, т. е. не зависит от системы отсчета.

2.6.5. Геометрическое истолкование преобразований Лоренца

Рассмотрим мировую линию равномерно движущейся точки (рис. 2.6.4). В К-системе — это линия, направленная под углом к оси τ. Если рассмотрим эту точку в К'-системе, где эта точка покоится, то видно, что ось $\tau' = ct'$ должна быть направлена параллельно прямой $x' = x'_0$. Следовательно, преобразование оси $\tau = ct$ при переходе от К-системы к К'-системе наклоняет эту ось по отношению к оси τ. Ось x' должна быть направлена так, чтобы располагаться симметрично относительно нулевого интервала (световой мировой линии) как τ'. Таким образом, преобразования Лоренца приводят к расположению осей τ' и x', как показано на рисунке 2.6.4.

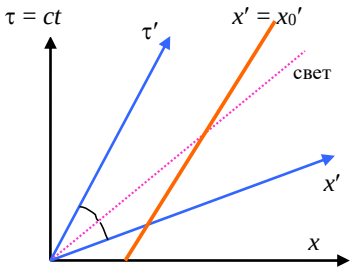


Рис. 2.6.4

Для того чтобы проиллюстрировать преобразования Лоренца, интервал и следствия из преобразований, проградуируем оси координат с помощью длины, определяемой единичным квадратом интервала:

$$\tau^2 - x^2 = 1 = inv = \tau'^2 - x'^2. \qquad (2.6.26)$$

Если построить (2.6.26), то получим кривую — гиперболу (сплошная кривая на рис. 2.6.5). Причем при $x = 0$ получаем $\tau = 1$ в лабораторной системе отсчета К. В системе отсчета К' при пересечении гиперболы с осью τ', т. е. при $x' = 0$, получаем $\tau' = 1$, и таким образом, отрезок от $\tau' = 0$ до $\tau' = 1$ дает единичный масштаб (линейку) в движущейся системе отсчета. Аналогично получаем градуировку по осям x и x', если положить квадрат интервала (2.6.26) равным –1 (мнимый интервал, см. рис. 2.6.7). Видно даже из рисунка 2.6.5, что масштаб линейки в К'-системе больше, чем в К-системе, что и приводит к рассмотренным выше следствиям.

Разберем одновременность событий в каждой из систем и ход часов. Линии одновременности в К- и К'-системах определяются прямыми, параллельными

осям x и x', соответственно красная (сплошная) и синяя (пунктирная) линии на рисунке 2.6.6. Имеем две возможности: рассмотреть эти события в К- и К'-системах.

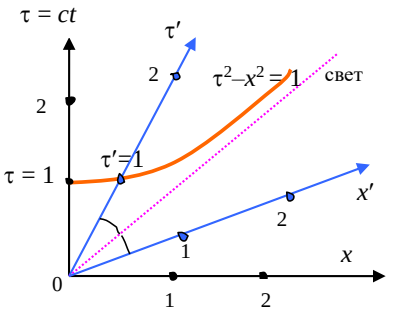


Рис. 2.6.5

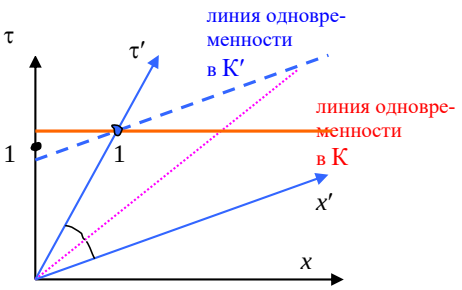


Рис. 2.6.6

1. Смотрим с точки зрения наблюдателя в К'-системе (относительно которого движутся часы К-системы): пусть часы, помещенные в начале координат ($x' = 0$), показывают «время» $\tau' = 1$; тогда по линии одновременности (синяя прямая) видно, что на часах лабораторной системы К еще нет 1 ($\tau' < 1$), т. е. они отстают.

2. Теперь смотрим с точки зрения наблюдателя в К-системе (относительно которой движутся часы К′-системы): часы, помещенные в начале координат лабораторной системы ($x = 0$), показывают время $\tau > 1$; в то же время по линии одновременности (красная прямая) в К-системе часы в К′-системе дают $\tau' = 1$ (при $x' = 0$), т. е. часы отстают в К′-системе.

Это и есть геометрическая иллюстрация замедления хода времени в движущихся объектах.

Рассмотрим теперь лоренцево сокращение длины (рис. 2.6.7). Пусть метровый стержень покоится в лабораторной системе отсчета К, причем левый конец стержня находится при координате $x = 0$ ($\tau = 0$), а правый — при $x = 1$, и соответственно его длина равна 1 (жирная линия на рис. 2.6.7). Мировая линия левого конца идет по оси τ при $x = 0$, а правого — параллельно оси τ при $x = 1$. По пересечению мировой линии и оси x' получаем размер стержня в К′-системе. Видно, что его длина, равная 0А, меньше 1 в масштабе К′-системы.

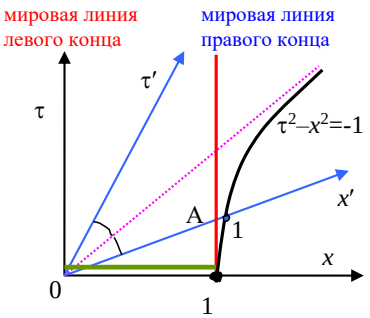


Рис. 2.6.7

Рассмотрим теперь, когда стержень покоится в К′-системе (жирный отрезок на рис. 2.6.8), где его длина равна 1 (0A). Тогда, используя мировую линию правого конца, которая параллельна оси τ', получим длину стержня в К-системе (0B), длина которого по линейным масштабам К-системы меньше 1.

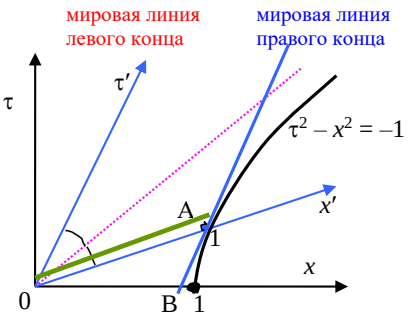


Рис. 2.6.8

Таким образом, получаем, что стержень, движущийся относительно наблюдателя, имеет всегда меньшую длину, чем в системе, связанной с ним.

Для системы отсчета К′′, движущейся в отрицательном направлении оси *x*, иллюстрация аналогична. Однако при этом надо иметь в виду, что если в К-системе угол между осями τ и *x* прямой, то в К′′-системе угол между осями τ" и *x*" больше π/2 (развернутый угол). При этом появляются те же эффекты, которые также могут быть проиллюстрированы геометрически.

2.6.6. Парадокс близнецов и другие парадоксы

Самый распространенный прием критиков и противников СТО — обнаружить парадоксы, к которым якобы приводит теория относительности. Один из самых известных парадоксов — *парадокс близнецов*.

Рассуждения, якобы приводящие к парадоксу, выглядят следующим образом. Из точки $x = 0$ вылетела ракета (это Петр отправился в путешествие) со скоростью V вдоль оси x и затем возвращается обратно. С точки зрения наблюдателя на Земле (Павел, близнец Петра, остался на Земле) время в ракете течет

медленнее и, следовательно, при возвращении Петр будет моложе Павла. Однако с точки зрения Петра это Земля с Павлом движется со скоростью $-V$, затем движется обратно, следовательно, при встрече должен быть моложе Павел. Возникает противоречие, и в этом состоит парадокс. Кто прав, Петр или Павел?

Неправильность рассуждения, приведшего к парадоксу, состоит в том, что *системы отсчета, связанные с близнецами, — не эквивалентны*. Одна из них — инерциальная, а вторая, связанная с ракетой, является неинерциальной. Поскольку, чтобы вернуться на Землю, ракета должна повернуть обратно, при этом она испытывает изменение скорости и, следовательно, ускорение, что и есть неинерциальность. Иначе говоря, для возвращения назад Петру необходимо пересесть в другую инерциальную систему отсчета, идущую в обратную сторону, в которой отсчет времени совершенно другой. С точки зрения неподвижного наблюдателя при пересадке из одной системы в другую проходит достаточно большое время (по земным часам). Это означает, что Петр будет моложе Павла и последний прав в этом споре.

Рассмотрим численный пример (приведенный в книге Э. Ф. Тейлора и Д. А. Уилера «Физика пространства-времени»). Петру и Павлу по 21 году. Петр отправился в ракете и летел по его часам в одну сторону 7 лет (7 лет $\approx$ $\approx 2.2\cdot10^8$ с) со скоростью $v = 24/25 \cdot c = 0.96c$, а затем вернулся обратно с той же скоростью. Найдем возраст Павла и Петра с обеих точек зрения.

<u>С точки зрения Павла (Земля)</u>: Петр имеет возраст 21 + 7 + 7 = 35 лет. Время у Павла течет быстрее, и за 7 лет Петра имеем добавку к возрасту Павла:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{7}{\sqrt{1-576/625}} = \frac{7\cdot 25}{7} = 25 \text{ лет.}$$

Следовательно, возраст Павла равен: 21 + 25 + 25 = 71 год.

<u>С точки зрения Петра (ракета)</u>: возраст Петра 21 + 7 + 7 = 35 лет. Время у Павла течет медленнее, поскольку Земля движется относительно ракеты, и за 7 лет Павел постарел только на время:

$$\Delta t = \Delta t_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{7\cdot 7}{25} = 1.96 \text{ лет.}$$

То есть возраст Павла равен: 21 + 1.96 + 1.96 = 24.92 $\approx$ 25 лет.

Различие мнений о возрасте Павла составляет 46 лет. Поскольку при встрече ситуация должна быть однозначной со всех точек зрения, то это означает, что при переходе Петра для возвращения назад из одной ИСО в другую проходит время, равное 46.08 лет.

Поясним это утверждение графически на рисунке 2.6.9. Пусть К-система отсчета Павла, тогда мировая линия Петра совпадает с временной координатой его системы отсчета К′. По часам Петра отрезок 0Т соответствует времени 7 лет, и с его точки зрения часы Павла за это время показали 1.96 года — это отрезок 0А.

На обратном пути Петра от точки Т до встречи с Павлом в точке С сопровождала другая цепочка часов — другая система отсчета — К″, скорость которой направлена против оси x (поэтому оси раздвигаются в стороны относитель-

но осей К-системы и световой мировой линии). Часы Петра на отрезке ТС снова показали 7 лет, а часы Павла с точки зрения Петра — снова 1.96 года (отрезок ВС). Таким образом, даже с точки зрения Петра остался неучтенным отрезок АВ, который и оказывается равным 46.08 года.

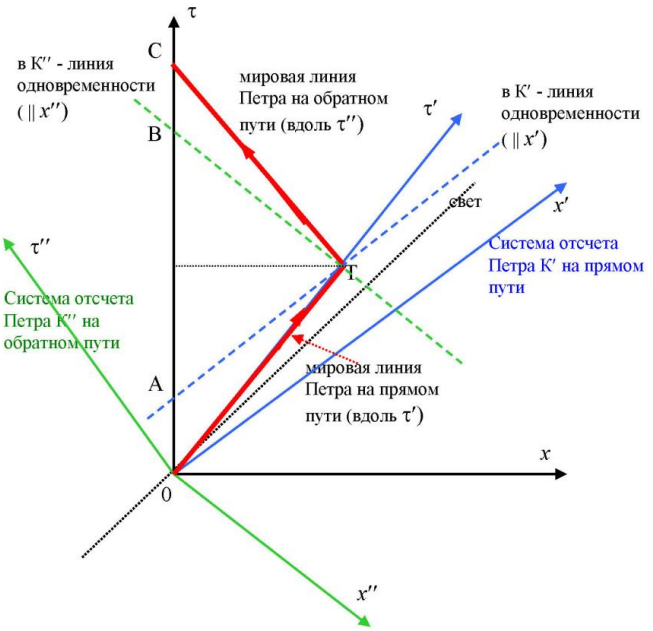


Рис. 2.6.9

Вообще можно утверждать, что протяженность наклонных линий короче, чем вертикальных. Это есть следствие псевдоевклидовой геометрии (псевдопифагоровой теоремы). Время в прямой линии, параллельной оси τ, равно Δt, в то время как в наклонной прямой имеем из постоянства интервала:

$$c^2\Delta t_0^2 = inv = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \quad \text{и} \quad \Delta t_0 = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2} < \Delta t.$$

Рассмотрим некоторые другие эффекты и парадоксы.

1. Рассмотрим стержень, расположенный параллельно оси x' в К′-системе отсчета и движущийся в ней вдоль оси y' равномерно (рис. 2.6.10), в К-системе отсчета будет также двигаться относительно оси y равномерно, но располагаться под углом к оси x. Чем выше скорость К′-системы (или стержня по оси x) относительно К-системы, тем больше угол наклона стержня в К-системе.

2. Парадокс шеста и сарая (пенала и карандаша). Шест длиннее сарая, однако если он движется с большой скоростью, то его длина будет меньше сарая, и он может в принципе поместиться в сарае, т. е. можно будет успеть захлопнуть ворота за шестом. Это с точки зрения наблюдателя, находящегося в сарае. Однако с точки зрения наблюдателя на шесте сарай надвигается с большой скоростью на стержень, и размеры сарая становятся еще меньше. Как же можно

совместить тот факт, что в первом рассмотрении шест на некоторое время может оказаться внутри сарая, а во втором — не может?

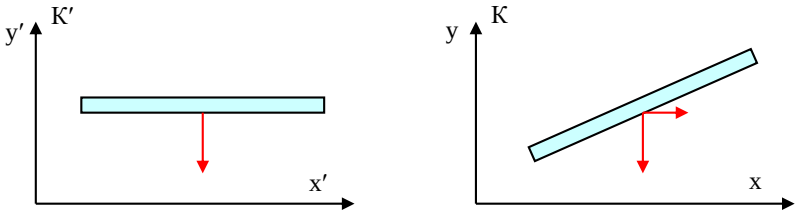


Рис. 2.6.10

3. Стержень и люк. На дырку люка падает стержень. В состоянии покоя стержень не проваливается сквозь люк, поскольку его линейные размеры больше линейных размеров люка. Другое дело, когда стержень движется с большими скоростями (рис. 2.6.11). Тогда в системе отсчета, связанной с люком, размеры стержня становятся малыми, и он спокойно проходит через люк.

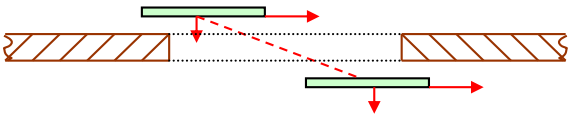


Рис. 2.6.11

Однако в системе, связанной со стержнем, размеры люка становятся еще меньше, и как же при этом можно объяснить факт прохода стержня через люк?

Рисунок 2.6.12, когда наклонный люк «наезжает» на стержень, проясняет, как это происходит.

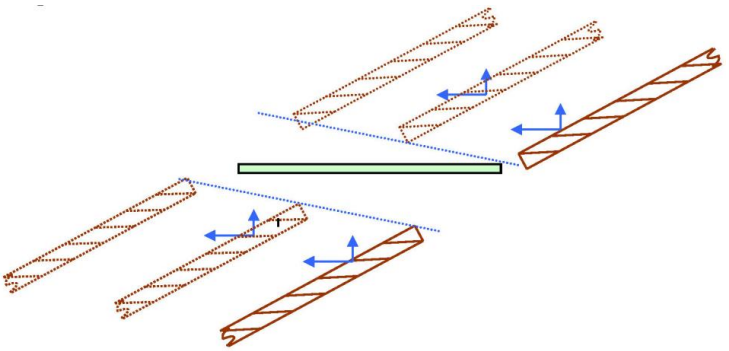


Рис. 2.6.12

4. Человек на решетке или стержень на столе с дыркой. Рассмотрим случай, когда нет движения вдоль вертикальной оси.

Человек, стоящий на решетке, не проваливается сквозь нее. Однако при очень быстром перемещении по решетке его размеры вдоль движения уменьшаются и становятся меньше размеров ячейки решетки с точки зрения системы отсчета, связанной с решеткой. Значит, он может провалиться сквозь решетку (см. рис. 2.6.13 со стержнем).

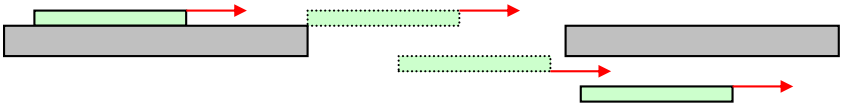


Рис. 2.6.13

С точки зрения человека (стержня) размеры ячейки решетки становятся очень малыми по сравнению со стержнем, и, на первый взгляд, человек (стержень) не может провалиться через ячейку. Однако из преобразований Лоренца следует тот факт, что тела не бывают абсолютно твердыми или абсолютно жесткими. То есть жесткость стержня — величина относительная. В системе стержня сам стержень теряет свою жесткость и может изгибаться и тем самым проникать в ячейку как резиновый предмет (см. рис. 2.6.14).

Рис. 2.6.14

2.7. Релятивистская механика

2.7.1. Как строить релятивистскую механику?

Уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \vec{p} = m\vec{v}\,. \tag{2.7.1}$$

Однако эти уравнения не инвариантны относительно преобразований Лоренца. Поэтому надо найти такую форму законов, чтобы новые уравнения удовлетворяли следующим условиям:

1) были бы инвариантны относительно преобразований Лоренца, так как эти преобразования подтверждаются экспериментами;

2) переходили бы в старые уравнения Ньютона в пределе малых скоростей $\beta = V/c \to 0$.

Для того чтобы построить новые уравнения, будем строить 4-вектора для скорости, импульса, силы и т. д. Строить будем по аналогии с их трехмерными величинами и таким образом, чтобы они преобразовывались при переходе к другим инерциальным системам отсчета (ИСО) по правилам 4-векторов и переходили в старые трехмерные векторы при малых скоростях:

$$\left(A^0, A^1, A^2, A^3\right) \quad \text{или} \quad \left(A_0, A_x, A_y, A_z\right).$$

2.7.2. Собственное время и 4-вектор скорости

4-вектор скорости определяется как производная 4-радиуса по временному интервалу. Для нахождения 4-вектора скорости нужен инвариант времени, в качестве которого может быть взято *собственное время*.

Собственное время — это время в *мгновенно-сопутствующей инерциальной системе отсчета* (ИСО). Мгновенно-сопутствующая ИСО — это инерциальная система отсчета, у которой в данный момент времени (или за короткий промежуток времени dt) скорость V равна скорости частицы v. Если частица движется с ускорением, то для определения собственного времени необходимо рассматривать набор (в принципе бесконечный) инерциальных систем отсчета и, переходя из одной ИСО в другую за короткое время dt, суммировать время полного движения.

Итак, имеем следующее.

1. В мгновенно-сопутствующей ИСО К' за бесконечно малый промежуток времени dt' (в течение которого скорость частицы совпадает со скоростью системы отсчета $\vec{V} = \vec{v}$) координаты частицы не меняются: $dx' = dy' = dz' = 0$.

2. В неподвижной (лабораторной) ИСО К за время dt произошло изменение координат: dx, dy, dz.

Поскольку интервал инвариантен:

$$dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2,$$

то можно ввести собственное время (самое быстрое время): $d\tau = dt'$.

$$d\tau = \frac{dS}{c} = \sqrt{\frac{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}} =$$

$$= dt\sqrt{1 - \frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma};$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}, \tag{2.7.2}$$

где, как и ранее, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Итак, получаем для бесконечно малого интервала:

$$dS = cd\tau. \tag{2.7.3}$$

Так как скорость частицы меняется, то мы меняем мгновенно-сопутствующие ИСО, т. е. берем ИСО с различными скоростями ($V = V(t)$), тогда параметр также зависит от времени $\beta = \beta(t)$ и полное собственное время, отсчитанное многими ИСО за промежуток t_1–t_2, по лабораторным часам равно

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2(t)}\, dt. \tag{2.7.4}$$

Компоненты 4-вектора скорости вводятся следующим образом (под «вводится» понимаем запись, которая удовлетворяет правилам, отмеченным в п. 2.7.1):

$$v^0 = \frac{dx^0}{d\tau}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}, \tag{2.7.5}$$

где x^0 и $\vec{r}$ — компоненты 4-радиуса $\vec{\mathsf{R}} = (ct, \vec{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Подробнее 4-вектор скорости можно записать следующим образом (используя (2.7.2)):

$$\begin{cases} v^0 = \dfrac{dx^0}{d\tau} = \gamma \dfrac{d(ct)}{dt} = \gamma c; \\ v^1 = \dfrac{dx^1}{d\tau} = \gamma \dfrac{dx}{dt} = \gamma v_x; \\ v^2 = \gamma v_y, \quad v^3 = \gamma v_z. \end{cases} \tag{2.7.6}$$

Или иначе вводим 4-вектор скорости со следующими компонентами:

$$\vec{\mathsf{V}}(c\gamma, v_x\gamma, v_y\gamma, v_z\gamma) = \vec{\mathsf{V}}(c\gamma, \gamma\vec{v}). \tag{2.7.7}$$

Легко видеть, что *квадрат 4-вектора скорости — инвариант*:

$$\vec{\mathsf{V}}^2 = c^2\gamma^2 - \gamma^2\vec{v}^2 = (c^2 - v^2)\gamma^2 = c^2 = Inv. \tag{2.7.8}$$

«Длина» 4-вектора скорости равна постоянной величине — скорости света.

Примечание 30. При $v \ll c$ имеем $\gamma \approx 1$ и тогда 4-вектор имеет компоненты: (c, v_x, v_y, v_z). Отсюда следует, что если даже частица покоится, то нулевая компонента 4-вектора всегда не равна 0: $v_0 \neq 0$. Смысл этого состоит в том, что время всегда «течет» и покоя в четырехмерном пространстве Минковского нет.

2.7.3. 4-вектор энергии-импульса

Построим импульс по аналогии с классикой как произведение массы (массы покоя как инвариантной массы) на 4-вектор скорости:

$$\vec{\mathsf{P}} = m_0\vec{\mathsf{V}}, \tag{2.7.9}$$

или, переписывая то же самое, имеем

$$\vec{\mathsf{P}} = m_0 \frac{d\vec{\mathsf{R}}}{d\tau}. \tag{2.7.10}$$

Итак, записываем следующие компоненты 4-вектора:

$$\vec{\mathsf{P}}(p^0, p^1, p^2, p^3) = \vec{\mathsf{P}}(m_0\gamma c, m_0\gamma v_x, m_0\gamma v_y, m_0\gamma v_z) = \vec{\mathsf{P}}(m_0\gamma c, m_0\gamma\vec{v}). \tag{2.7.11}$$

Трехмерный релятивистский импульс определяется

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0\gamma\vec{v}. \tag{2.7.12}$$

При $v \ll c$ получаем классический импульс $\vec{p} = m_0\vec{v}$.

Иногда в некоторых учебниках можно увидеть следующую интерпретацию — импульс записывается как в механике Ньютона и при этом вводится понятие *релятивистской массы*:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \text{где } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (2.7.13)$$

На рисунке 2.7.1 представлен график зависимости релятивистской массы m от скорости. При стремлении скорости частицы к скорости света ее релятивистская масса растет до бесконечности.

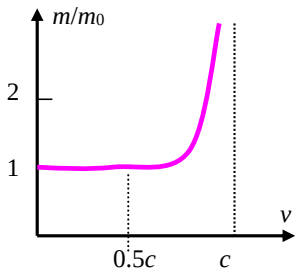


Рис. 2.7.1

Однако в физических рассуждениях удобнее и полезнее использовать величины, одинаковые во всех системах отсчета, т. е. такие как массу покоя m_0 и собственное время $d\tau$. В самом деле, все отличие релятивистского импульса $\vec{p} = m_0 d\vec{r}/d\tau$ от ньютоновского импульса $\vec{p} = m_0 d\vec{r}/dt$ состоит только в замещении времени dt на $d\tau$, т. е. в замене лабораторного времени на собственное время $d\tau = dt/\gamma = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$, а не в отличии m от m_0. И это связано с преобразованием Лоренца для временной компоненты, а не с зависимостью массы от скорости, поэтому и нет смысла вводить эту зависимость.

Нулевая компонента 4-вектора импульса связана с энергией

$$\frac{E}{c} = m_0 \gamma c\,. \qquad (2.7.14)$$

Подробнее это рассмотрим ниже.

2.7.4. Релятивистское уравнение движения

Пространственная часть

Рассмотрим уравнение движения — аналог уравнения Ньютона. Напомним, как мы поступали в классической механике, когда получали полную энергию. В классической механике имеем трехмерную силу и классический импульс:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Умножим обе части уравнения скалярно на вектор перемещения $\vec{v}dt$:

$$mvdv = \vec{F}\vec{v}dt;$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2} + \text{const}\right) = \vec{F}\vec{v}dt.$$

В классике обычно постоянная составляющая равна 0, и при условии равенства нулю потенциальной энергии $U = 0$ ($\vec{F} = -\nabla U = 0$) полная энергия совпадает с кинетической энергией $E = K = \text{const}$. Если $U \neq 0$, то $\vec{F} = -\nabla U$ и

$$-dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\nabla U \cdot d\vec{r} = -\nabla U \cdot \vec{v}dt\,.$$

Тогда имеем выражение для полной энергии $E = K + U = \text{const}$ и закон сохранения при движении в потенциальном поле.

Поступим по аналогии с рассмотренным выше рассуждением и в релятивистской механике, учитывая, что имеем дело с 4-векторами:

$$\frac{d\vec{\mathsf{P}}}{d\tau} = \vec{\mathsf{F}}, \tag{2.7.15}$$

где мы ввели *4-вектор силы* $\vec{\mathsf{F}}\left(f^0, f^1, f^2, f^3\right)$. Его компоненты в принципе определяются из (2.7.15) дифференцированием компонент 4-вектора импульса по инвариантному времени:

$$\begin{aligned} f^0 &= \frac{d}{d\tau}\left(m_0\gamma c\right) = \gamma\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma c\right); \\ f^\alpha &= \frac{d}{d\tau}\left(m_0\gamma v_\alpha\right) = \gamma\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma v_\alpha\right), \end{aligned} \tag{2.7.16}$$

где α пробегает значения α = 1, 2, 3 (или x, y, z) и v_α есть компоненты обычной трехмерной скорости (см. формулы (2.7.6) и (2.7.7)).

Рассмотрим *пространственную часть уравнения* (2.7.16), где f^α — компоненты 4-вектора силы.

$$f^\alpha = \gamma\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma v_\alpha\right). \tag{2.7.17}$$

Компоненты 4-вектора силы должны быть пропорциональны соответствующим компонентам 3-мерной силы, чтобы при $v \ll c$ уравнения перешли в уравнения Ньютона. Вводятся компоненты трехмерной силы F_α как производные по времени dt от импульса (более строго это обосновывается исходя из лагранжиана), т. е. имеем

$$f^\alpha = \gamma F_\alpha. \tag{2.7.18}$$

При этом получаем, что уравнение релятивистской механики инвариантно относительно преобразований Лоренца. Оно имеет примерно тот же вид, что и уравнение Ньютона и при $v \ll c$ переходит в него. В самом деле, подставляя (2.7.18) в (2.7.17) и сокращая на γ, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma v_\alpha\right) = F_\alpha$$

или иначе записываем окончательно:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m_0\gamma\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \qquad (2.7.19)$$

Получили *пространственную часть* уравнения движения в релятивистской механике — *основное уравнение релятивистской динамики*.

2.7.5. Релятивистское уравнение движения. Временная часть

Рассмотрим *временную часть уравнения движения* (2.7.16). Для того чтобы получить нулевую компоненту 4-вектора силы, рассмотрим инвариант 4-вектора скорости

$$c^2 = \left(v^0\right)^2 - \left(v^1\right)^2 - \left(v^2\right)^2 - \left(v^3\right)^2 = Inv$$

и продифференцируем его по собственному времени:

$$v^0\frac{dv^0}{d\tau} - v^1\frac{dv^1}{d\tau} - v^2\frac{dv^2}{d\tau} - v^3\frac{dv^3}{d\tau} = 0\,. \qquad (2.7.20)$$

Учитывая, что компоненты 4-вектора скорости определяются (2.7.7), а компоненты 4-силы (2.7.16) (выражаем из уравнений (2.7.16) производные $dv^i/d\tau$ и используем связь (2.7.18)), получаем

$$\gamma c\frac{f^0}{m_0} - \gamma v_x\frac{\gamma F_x}{m_0} - \gamma v_y\frac{\gamma F_y}{m_0} - \gamma v_z\frac{\gamma F_z}{m_0} = 0\,. \qquad (2.7.21)$$

Сокращая на фактор γ и массу покоя в уравнении (2.7.21), получаем, что нулевая компонента 4-вектора силы равна

$$f^0 = \gamma\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma c\right) = \frac{\gamma}{c}\left(\vec{F},\vec{v}\right). \qquad (2.7.22)$$

Итак, 4-вектор силы Минковского имеет следующие компоненты:

$$\vec{\mathsf{F}}\begin{pmatrix} f^0 & f^1 & f^2 & f^3 \\ \frac{\gamma}{c}\left(\vec{F},\vec{v}\right) & \gamma F_x & \gamma F_y & \gamma F_z \end{pmatrix} \equiv \vec{\mathsf{F}}\left(\frac{\gamma}{c}\left(\vec{F},\vec{v}\right), \gamma\vec{F}\right). \qquad (2.7.23)$$

Теперь из нулевой компоненты релятивистского уравнения движения (2.7.22) получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma c^2\right) = \left(\vec{F},\vec{v}\right). \qquad (2.7.24)$$

Справа в уравнении (2.7.24) стоит мощность обычной трехмерной силы, т. е. работа в единицу времени. Тогда левая часть по аналогии с классической механикой есть изменение энергии свободной частицы. Таким образом, проявляется *смысл нулевой компоненты 4-вектора импульса как полной энергии свободной частицы, деленной на скорость*:

$$\vec{\mathsf{P}}\left(m_0\gamma c = \frac{m_0\gamma c^2}{c} = \frac{E}{c}, m_0\gamma\vec{v}\right). \qquad (2.7.25)$$

Итак, полная энергия свободной частицы:

$$E = m_0\gamma c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \qquad (2.7.26)$$

Подведем итоги рассуждений этого параграфа.

1. 4-вектор импульса, который часто называют 4-вектором энергии-импульса, записывается:

$$\vec{\mathsf{P}}\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \qquad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \qquad (2.7.27)$$

При переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую ИСО, движущуюся по оси x со скоростью V (= βc), компоненты 4-вектора преобразуются согласно общим преобразованиям Лоренца (2.6.16):

$$E'/c = \gamma\left(E/c - \beta p_x\right); \quad p'_x = \gamma\left(p_x - \beta E/c\right); \quad p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z\,.$$

2. Уравнения движения в релятивистской механике — *пространственная и временная части динамических уравнений* — имеют вид соответственно:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma\vec{v}\right) = \vec{F}; \\ &\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma c^2\right) = \vec{F}\vec{v}. \end{aligned} \qquad (2.7.28)$$

Заметим, что в уравнения (2.7.28) входят только 3-мерные векторы.

Примечание 31. Временную часть уравнения можно было просто получить исходя из пространственной части (2.7.19), умножив ее скалярно на скорость $\vec{v}$ и проведя математические преобразования:

$$d\left(m_0\gamma\vec{v}\right)\vec{v} = \vec{F}\vec{v}dt = d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

Примечание 32. Отметим довольно неожиданный вывод: в релятивистской динамике вектор ускорения $\vec{a}$ не совпадает в общем случае с направлением вектора силы $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m_0\gamma\vec{v}\right) = m_0\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} + m_0\vec{v}\frac{d\gamma}{dt} = m_0\gamma\vec{a} + m_0\vec{v}\frac{\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}}\,.$$

2.8. Энергия и способы ее выражения

2.8.1. Инвариант 4-вектора энергии-импульса и его нулевая компонента

Еще раз запишем 4-вектор энергии-импульса и его компоненты:

$$\vec{P}\left\{\frac{E}{c}, \vec{p}\right\}; \qquad (2.8.1)$$

$$\frac{E}{c} = m_0 \frac{c\,dt}{d\tau} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.8.2}$$

Инвариант 4-вектора энергии-импульса:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = inv \quad \text{или} \quad E^2 - p^2c^2 = inv. \tag{2.8.3}$$

Можно задать очевидный вопрос: почему мы уверены, что временная компонента 4-вектора импульса есть энергия (деленная на скорость света)? Какие аргументы говорят в пользу этого? Приведем их.

А. Величина E имеет размерность релятивистской энергии — эрг = г (см/с)^2 или Дж = кг (м/с)^2.

Б. Так как из п. 2.7 имеем $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, то $dE = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \delta A$. То есть приращение E представляет собой элементарную работу. Следовательно, по теореме о кинетической энергии dE есть приращение кинетической энергии, а сама величина E может отличаться от нее не более чем на константу.

В. Временная компонента сохраняется, если сила $\vec{F}$ равна 0. В самом деле

$$\vec{F} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \text{const}. \tag{2.8.4}$$

Можно говорить иначе: закон сохранения импульса выполняется, что есть экспериментальный факт. Закон сохранения энергии — тоже. Если пространственные компоненты сохраняются ($\vec{p} = \text{const}$), то временная компонента сохраняется тоже, т. е. снова убеждаемся, что эта величина связана с энергией.

Г. Как будет доказано ниже, при малых скоростях получим $E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$, т. е. отличается от обычной нерелятивистской кинетической энергии всего лишь на константу.

Рассмотрим следующий пример. Пусть две частицы движутся в направлении оси x с импульсами p_1 и p_2. Рассмотрим их абсолютно неупругое столкновение в системах К и К', записывая компоненты 4-вектора энергии-импульса до столкновения и после столкновения.

4-вектор импульса в К-системе:

$$\left(\frac{E_1 + E_2}{c}, p_1 + p_2, 0, 0\right) \text{ до столкновения;}$$

4-вектор импульса в К'-системе:

$$\left(\frac{E_1' + E_2'}{c}, p_1' + p_2', 0, 0\right) \text{ до столкновения.}$$

Переход от К-системы к системе отсчета К' для первой компоненты 4-вектора до столкновения осуществляется обычным преобразованием Лоренца:

$$p_1' + p_2' = \frac{p_1 + p_2 - \beta(E_1 + E_2)/c}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.8.5}$$

В результате неупругого столкновения импульс составной частицы стал равен p_0 в К-системе и p_0' в К'-системе, а 4-вектора энергии-импульса равны соответственно: $(E_0, p_0, 0, 0)$ и $(E_0', p_0', 0, 0)$. Связь между импульсами в этих системах равна

$$p_0' = \frac{p_0 - \beta E_0/c}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (2.8.6)$$

По закону сохранения импульса имеем:

$$p_1 + p_2 = p_0, \quad p_1' + p_2' = p_0'.$$

Тогда из равенств (2.8.5) и (2.8.6) получаем закон сохранения нулевой компоненты, т. е. энергии:

$$E_0 = E_1 + E_2. \qquad (2.8.7)$$

Примечание 33. То же уравнение (2.8.7) можно получить из инварианта энергии-импульса, записывая его до и после реакции:

$$\left(\frac{E_1 + E_2}{c}\right)^2 - (p_1 + p_2)^2 = \frac{E_0^2}{c^2} - p_0^2. \qquad (2.8.8)$$

Это следствие законов сохранения.

Из рассмотренного примера следует интересный и важный факт, что при неупругом соударении энергия сохраняется! Таким образом, *релятивистская энергия учитывает и внутреннюю энергию частиц*.

Как результат получаем следующее:

1) каждой частице можно сопоставить релятивистскую энергию $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$;

2) если несколько частиц, то их полная релятивистская энергия равна сумме энергий отдельных частиц;

3) при взаимодействии между частицами системы энергии отдельных частиц изменяются, но их полная сумма сохраняется.

2.8.2. Выражения для энергии одной частицы

Приведем различные выражения для энергии частицы.

1. Свободная частица

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (2.8.9)$$

2. Частица покоится — скорость равна $v = 0$, тогда получаем энергию покоя частицы или системы частиц:

$$E = m_0 c^2. \qquad (2.8.10)$$

Энергия покоя — это та постоянная, которая входит в полную энергию частиц.

3. Инвариант энергии-импульса для одной частицы в двух ИСО К и К' равен

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{E'^2}{c^2} - \vec{p}'^2 = inv. \qquad (2.8.11)$$

Если рассматриваем процесс в такой К'-системе, где частица покоится и, следовательно, ее импульс $p' = 0$, тогда $E' = m_0c^2$. Таким образом, получаем из (2.8.11) другое выражение для полной энергии через импульс и массу:

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2c^2 + m_0^2c^4; \\ E &= \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}. \end{aligned} \qquad (2.8.12)$$

4. Кинетическая энергия частицы определяется как разность полной энергии и энергии покоя:

$$T = E - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right); \qquad (2.8.13)$$

$$T = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2c^2}} - 1\right). \qquad (2.8.14)$$

Связь импульса и кинетической энергии следует из (2.8.14):

$$T^2 + 2m_0c^2T = p^2c^2. \qquad (2.8.15)$$

5. Переход к классической механике при $v/c \ll 1$ или $p/m_0c \ll 1$ осуществляется путем разложения функции в ряд при малых значениях аргумента

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!}f''(0)\cdot x^2 + \ldots:$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)'\Bigg|_{\beta^2=0}\cdot\beta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)''\Bigg|_{\beta^2=0}\cdot\beta^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots$$

Пренебрегая высшими степенями малых параметров, получаем:

$$\begin{aligned} T &\approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1\right) = \frac{m_0v^2}{2}; \\ T &\approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0^2c^2} - 1\right) = \frac{p^2}{2m_0}. \end{aligned} \qquad (2.8.16)$$

6. Полезная формула для энергии и импульса получается из следующих формул:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Разделив второе уравнение на первое, получаем

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2}. \qquad (2.8.17)$$

7. Ультрарелятивистский предел — это когда скорости частиц близки к скорости света $v \to c$ и $p >> m_0c$. Тогда выражение для энергии имеет вид

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \approx pc. \qquad (2.8.18)$$

8. Безмассовые частицы, масса покоя которых равна $m_0 = 0$. К ним относятся: фотон, глюон, гравитон. Для таких частиц из (2.8.12) и (2.8.17) имеем

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} = \frac{pc\vec{v}}{c^2} = \frac{v\vec{p}}{c}. \qquad (2.8.19)$$

Отсюда следует, что $v = c$, т. е. *такие частицы могут двигаться только со скоростью света*.

Энергия фотона пропорциональна его частоте: $E = \hbar\omega = h\nu$, импульс: $p = \frac{\hbar\omega}{c}$. Запишем 4-вектор фотона и его компоненты:

$$\vec{\mathrm{P}} = \vec{\mathrm{P}}\left(\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\hbar\vec{\omega}}{c} = \hbar\vec{k}\right). \qquad (2.8.20)$$

Легко убедиться, что инвариант энергии-импульса фотона равен 0.

Примечание 34. Инвариантность фазы, о которой говорилось в п. 2.5, можно рассматривать как скалярное произведение двух 4-векторов: 4-вектора энергии-импульса фотона и 4-радиус-вектора $\left(\vec{\mathrm{P}},\vec{\mathrm{R}}\right) = \frac{\hbar\omega}{c}\cdot ct - \hbar\vec{k}\cdot\vec{r}$. Скалярное произведение двух 4-векторов есть инвариант.

9. На рисунке 2.8.1 представлена диаграмма, объединяющая разные выражения для энергии релятивистских частиц или систем. Причем разные формулы, дающие энергию, удобны для анализа различных экспериментов. Разберем кратко формулы, входящие в рисунок 2.8.1:

а — в эту формулу входит скорость, энергия и масса. В эксперименте скорость определяется по времени пролета, энергия E — из законов сохранения в процессах столкновения частиц между собой;

б — формула удобна, когда нас не интересует скорость, а основное внимание направлено на проверку или применение законов сохранения;

в — по этой формуле скорость определяется по времени пролета частиц, импульс — по ее траектории (например, по искривлению траектории частицы в магнитном поле);

г — выражение для энергии удобно, когда нас не интересует масса.

10. Частица в потенциальном поле. Если частица движется в потенциальном поле, то сохраняется сумма энергий:

$$E + U = m_0\gamma c^2 + U = \text{const}.$$

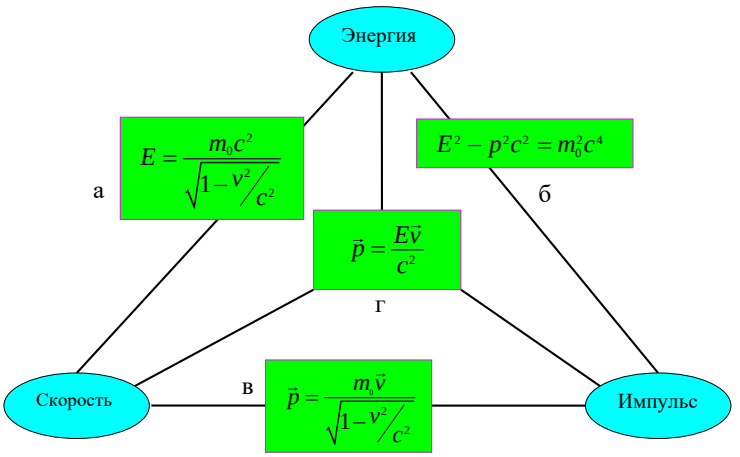


Рис. 2.8.1

Часто в физике вводится функция Гамильтона:

$$H = E + U = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} + U. \qquad (2.8.21)$$

Она играет большую роль в классической теоретической механике и в квантовой теории.

2.8.3. Взаимосвязь энергии и массы покоя

В классической механике мы говорили о законе сохранения массы. Проводили оценки изменения массы по формуле $\Delta E = \Delta mc^2$, которое оказалось малым в случае неупругих столкновений (при небольших скоростях, где были справедливы преобразования Галилея) и химических реакциях.

В релятивистской теории связаны две важнейшие характеристики материи — энергия и инертность (масса): $E = mc^2$. Иногда говорят об эквивалентности энергии и массы, но это не общепринято.

Всякое изменение релятивистской массы сопровождается изменением энергии. Всякая энергия (полная, кинетическая, потенциальная) обладает инертными свойствами. В отличие от ньютоновской механики, закон сохранения энергии справедлив при упругих и неупругих ударах. При неупругих ударах масса составной частицы не равна сумме масс составных частиц.

Рассмотрим опять в качестве примера неупругое столкновение двух частиц с образованием одной частицы. В системе отсчета, где одна частица покоится, а другая налетает (рис. 2.8.2), инвариант энергии-импульса запишется:

$$E^2 - p^2c^2 = \left(E_1 + E_2\right)^2 - \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)^2 c^2 = inv, \qquad (2.8.22)$$

Здесь энергии и импульсы равны соответственно:

$$E_1 = m_{01}c^2 + T_1, \quad E_2 = m_{02}c^2,$$
$$p_1 = p_1, \qquad p_2 = 0.$$

Рис. 2.8.2

Инвариант есть инвариант и для образовавшейся частицы массы m_3, и при этом в любой инерциальной системе отсчета. Выберем новую систему отсчета такой, что образовавшаяся частица в ней покоится, т. е. $p' = 0$, $E' = m_{03}c^2$:

$$\left(E_1 + m_{02}c^2\right)^2 - p_1^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2 = m_{03}^2c^4. \qquad (2.8.23)$$

Подставляя в последнее равенство E_1, получим

$$m_{03}^2 = \left(m_{01} + m_{02}\right)^2 + \frac{2m_{02}T_1}{c^2}, \qquad (2.8.24)$$

т. е. $m_{03} > m_{01} + m_{02}$. Масса образовавшейся частицы оказалась больше суммы масс составных частиц. Это связано с тем, что часть кинетической энергии налетающей частицы T_1 перешла во внутреннюю энергию составной частицы, что привело к увеличению ее массы покоя.

Закон сохранения энергии-импульса и соотношение между массой и энергией не только нашли экспериментальное подтверждение, но и стали основными положениями современной физики, в основном ядерной физики и физики элементарных частиц.

Означает ли эйнштейновское утверждение об эквивалентности массы и энергии, что энергия — это то же самое, что масса? Нет! *Величина энергии зависит от того, в какой ИСО мы рассматриваем частицу. Величина же массы покоя не зависит от выбора ИСО*. Энергия всего лишь временная компонента 4-вектора, тогда как масса определяется как полная абсолютная величина этого 4-вектора.

Временная компонента 4-вектора совпадает с его абсолютной величиной лишь в том случае, когда пространственные компоненты равны нулю. Лишь тогда величина энергии совпадает с величиной массы покоя (см. дополнительную литературу: Э. Ф. Тейлор и Д. А. Уиллер «Физика пространства-времени»).

2.9. Примеры применения релятивистской механики

2.9.1. Дефект массы и энергия связи

Рассмотрим проблему энергии связи системы связанных частиц. Будем ее рассматривать поэтапно.

1. Полная энергия системы взаимодействующих частиц равна:

$$E = \sum_i \mathrm{E}_i + U, \qquad (2.9.1)$$

где E_i — полная энергия одной частицы; U — энергия взаимодействия частиц, которая равна работе, необходимой для разделения системы на отдельные частицы и разнесения их на расстояние, где они уже не взаимодействуют.

2. Полная масса покоя системы взаимодействующих частиц:

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{\sum_i \mathrm{E}_i + U}{c^2} = \sum_i m_{0i} + \frac{1}{c^2}\sum_i T_i + \frac{U}{c^2}, \qquad (2.9.2)$$

где m_{0i} — массы покоя отдельных составляющих частиц; T_i — кинетические энергии каждой из частиц.

3. Сделаем предположение, которое часто выполняется в атоме, ядре и подобных системах микрочастиц, что суммарная кинетическая энергия частиц мала по сравнению с энергией связи, т. е. можно положить $M \approx \sum_i m_{0i} + U/c^2$. Таким образом, в системе частиц всегда отлична от нуля следующая разность масс:

$$\sum_i m_{0i} - M = \Delta M \approx -\frac{U}{c^2}. \qquad (2.9.3)$$

Это явление имеет название *дефекта массы*. Система частиц устойчива, если $U < 0$ и $\Delta M > 0$, т. е. когда сумма масс составляющих систему частиц больше массы всей системы. *Энергия связи* системы при этом определяется

$$|U| = \Delta M \cdot c^2. \qquad (2.9.4)$$

Примеров проявления дефекта массы достаточно много:

1) масса ядра меньше суммы масс, составляющих его нуклонов;

2) то же для элементарных частиц, в частности для адронов, состоящих из более массивных частиц — кварков.

2.9.2. Реакция распада частиц

Пусть распадается частица массой M на две частицы. Запишем для распадающейся частицы инвариант 4-вектора энергии-импульса до распада:

$$E^2 - p^2c^2 = M^2c^4 = inv. \qquad (2.9.5)$$

Рассмотрим процесс в системе центра инерции (СЦИ), в которой полный импульс равен 0: $p = 0$. В результате распада получаем две частицы с импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ и массами m_{01} и m_{02}. Тот же инвариант энергии-импульса после распада имеет вид:

$$inv = \left(E_1 + E_2\right)^2 - \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)^2 c^2 = M^2c^4 = \left(E_1 + E_2\right)^2 \qquad (2.9.6)$$

поскольку в СЦИ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. Тогда

$$E_1 + E_2 = Mc^2 = T_1 + m_{01}c^2 + T_2 + m_{02}c^2 = \left(m_{01} + m_{02}\right)c^2 + T_1 + T_2. \qquad (2.9.7)$$

Так как кинетические энергии T_1 и $T_2 > 0$, то реакция самопроизвольного распада частицы возможна лишь в случае

$$M > m_{01} + m_{02}.$$

Масса распадающегося тела должна превышать сумму масс покоя получившихся тел. Если это не так, то тогда, чтобы частица могла распасться, необходим подвод тепла (энергии).

Рассмотрим пример: распад нейтрона $n \to p + e^- + \tilde{\nu}_e$. Массы измеряем в *МэВ* (1 эВ энергии = заряд e^- × разность потенциалов в 1 В):

$$m_{0n} = 939.6 \text{ МэВ};$$

$$m_{0p} = 938.3 \text{ МэВ};$$

$$m_{0e} = 0.511 \text{ МэВ}.$$

Оставшуюся энергию уносит антинейтрино $\tilde{\nu}_e$. Ранее, пока не ввели и не обнаружили на эксперименте нейтрино и антинейтрино, в этих реакциях предполагалось нарушение закона сохранения энергии.

Примечание 35. Нейтрино имеют ненулевую массу, но эта масса крайне мала. Верхняя экспериментальная оценка суммы масс всех типов нейтрино составляет всего 0,28 эВ.

2.9.3. Рождение и аннигиляция электрон-позитронных пар

Рождение электронно-позитронной пары. Фотоны рождают электрон-позитронные пары. Один γ-квант (фотон) *не может* создать электрон-позитронную пару $(e^- - e^+)$ в вакууме. Это можно доказать из законов сохранения. Это также следует из инварианта, когда рассматриваем процесс в системе центра инерции:

$$\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 = 0 = 4m_0^2c^2 - p^2 = 4m_0^2c^2 \neq 0. \qquad (2.9.8)$$

Инвариант энергии-импульса для фотона равен нулю, а инвариант энергии-импульса электрон-позитронной пары не равен нулю. Это и приводит к запрещению процесса превращения кванта в электрон-позитронную пару в отсутствие других тел.

Для того чтобы процесс рождения пары состоялся, должно быть наличие третьего тела (например, ядро), которому можно передать импульс. Следовательно, этому телу передается и часть энергии *E*, т. е. энергетический порог реакции должен быть больше суммы энергий покоя электрона и позитрона (т. е. $> 2m_0c^2$). Рассмотрим реакцию рождения электрон-позитронной пары и определим пороговую энергию фотона (рис. 2.9.1).

До реакции имеем	После реакции имеем
γ-квант:	электрон e^- и m_0
$E = E_{\text{порог}}$	$E = m_0c^2$,
$p_\gamma = \dfrac{E_{\text{порог}}}{c}$	позитрон e^+ и m_0
Ядро: M,	$E = m_0c^2$
$E = Mc^2$	Ядро: M
Полный импульс системы	Полный импульс системы в СЦИ
$p = p_\gamma$	$p = 0$

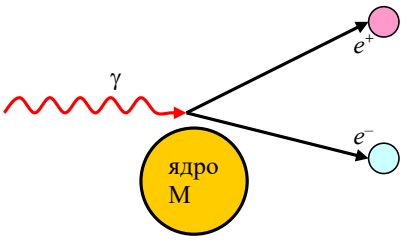


Рис. 2.9.1

Запишем инвариант энергии-импульса до и после реакции (после реакции запишем его в СЦИ):

$$\left(E_{\text{порог}} + Mc^2\right)^2 - p_\gamma^2 c^2 = \left(E_{\text{порог}} + Mc^2\right)^2 - \left(\frac{E_{\text{порог}}}{c}\right)^2 c^2 = \left(Mc^2 + 2m_0c^2\right)^2. \quad (2.9.9)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем пороговую энергию:

$$E_{\text{порог}} = 2m_0c^2\left(1 + \frac{m_0}{M}\right). \quad (2.9.10)$$

Порог реакции оказывается несколько больше, чем энергия $2m_0c^2$, т. е. больше, чем энергия покоя электрона и позитрона.

Аннигиляция электрон-позитронных пар. Аналогично процессу рождения электрон-позитронной пары одним фотоном получаем, что один фотон не может появиться в результате обратного процесса — аннигиляции электрона и позитрона. Как и ранее в СЦИ, импульс пары $\left(e^- - e^+\right)$ равен 0, а импульс кванта всегда не равен нулю $p_\gamma \neq 0$. В вакууме (без присутствия третьего тела) электрон и позитрон аннигилируют, по крайней мере, на два γ-кванта из-за законов сохранения энергии-импульса. Энергия, выделяемая в каждом акте, равна, по крайней мере:

$$\Delta E = 2m_0c^2 = 1.02\,MeV. \quad (2.9.11)$$

Пусть одна частица — пусть позитрон — налетает на электрон с энергией E и импульсом p (см. рис. 2.9.2). Энергия позитрона — E, энергия электрона — m_0c^2, энергии фотонов — $E_1 = p_1c, \quad E_2 = p_2c$. Закон сохранения энергии:

$$E + m_0c^2 = E_1 + E_2. \quad (2.9.12)$$

Закон сохранения импульса:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (2.9.13)$$

Запишем (2.9.13) через угол вылета 1-го кванта ϕ_1 по отношению к импульсу позитрона, подставив (2.9.12):

$$\left(\vec{p} - \vec{p}_1\right)^2 = p^2 - 2pp_1\cos\phi_1 + p_1^2 = p_2^2 = \frac{E_2^2}{c^2} = \frac{\left(E + m_0c^2 - E_1\right)^2}{c^2}. \quad (2.9.14)$$

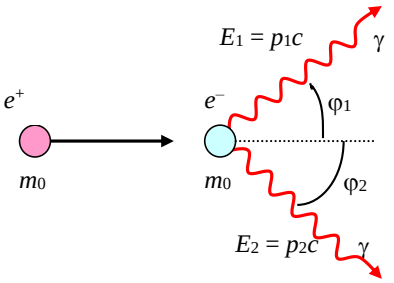


Рис. 2.9.2

Раскрывая квадрат и учитывая $E_1 = p_1 c$ и $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$, получаем

$$E_1 = \frac{m_0c^2\left(m_0c^2 + E\right)}{m_0c^2 + E - pc\cdot\cos\varphi_1} = \frac{m_0c^2\left(2m_0c^2 + T\right)}{2m_0c^2 + T - \cos\varphi_1\sqrt{T^2 + 2m_0c^2T}} = \\ = \frac{m_0c^2}{1 - \dfrac{\cos\varphi_1}{\sqrt{1 + 2m_0c^2/T}}}. \qquad (2.9.15)$$

Здесь ввели кинетическую энергию позитрона и использовали, что $pc = \sqrt{T^2 + 2m_0c^2T}$.

Максимальная энергия кванта получается при $\cos\varphi_1 = 1$:

$$\left(E_1\right)_{\max} = \frac{m_0c^2}{1 - \left(1 + 2m_0c^2/T\right)^{-1/2}}. \qquad (2.9.16)$$

Рассмотрим предельные случаи для уравнения (2.9.16):
1) при $T >> 2m_0c^2$ получаем

$$\left(E_1\right)_{\max} \approx \frac{m_0c^2}{1 - 1 + m_0c^2/T} = T;$$

2) при $T = 0$

$$\left(E_1\right)_{\max} = m_0c^2.$$

Минимальная энергия кванта получается при $\cos\varphi_1 = -1$:

$$\left(E_1\right)_{\min} = \frac{m_0c^2}{1 + \left(1 + 2m_0c^2/T\right)^{-1/2}}. \qquad (2.9.17)$$

Рассмотрим предельные случаи в уравнении (2.9.17):
1) при $T = 0$

$$\left(E_1\right)_{\min} = m_0c^2;$$

2) при $T >> 2\,m_0\,c^2$ получаем

$$\left(E_1\right)_{\min} \approx \frac{m_0c^2}{1 + 1 - m_0c^2/T} = \frac{m_0c^2}{2}.$$

Существует огромное количество реакций рождения и уничтожения частиц, неупругих и упругих столкновений. Их кинематический анализ проводится на основе законов сохранения и релятивистского инварианта. В том числе тот факт, что свет, или что тот же фотон, обладает импульсом, проявляется во многих процессах, связанных с упругим рассеянием фотонов: эффект Комптона, давление света и др.

ГЛАВА 3.
КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

3.1. Силы инерции

3.1.1. Неинерциальные системы отсчета

До сих пор мы рассматривали физические явления и законы в инерциальных системах отсчета (ИСО). Однако ИСО — это идеализация и в реальности наши системы отсчета являются неинерциальными.

Определение: *неинерциальной системой отсчета (НСО) называется система, движущаяся ускоренно относительно инерциальной (ИСО).*

Простейшие НСО — это системы, движущиеся ускоренно прямолинейно, и системы вращающиеся. Задача механики состоит в том, чтобы найти уравнения движения в НСО, эта задача сводится к установлению законов преобразования сил и ускорений при переходе от ИСО к НСО. Поскольку анализ этого перехода в релятивистской механике сложен, ограничимся в этом разделе малыми скоростями (по сравнению со скоростью света), т. е. классической механикой.

Введем некоторые определения:

1) условимся считать произвольно выбранную ИСО неподвижной, а движение относительно нее — *абсолютным*. Это условно;

2) если тело неподвижно в системе отсчета, которая движется относительно выбранной (абсолютной) ИСО, то такое движение тела назовем *переносным*;

3) движение тела относительно движущейся системы отсчета назовем *относительным*.

Итак, абсолютное движение тела складывается из его относительного и переносного движения. Наша цель — изучить относительное движение. Если движущаяся система отсчета (СО) инерциальная, то уравнения динамики — это обычные уравнения Ньютона, которые были рассмотрены в предыдущих главах. Здесь рассмотрим СО, движущиеся ускоренно относительно неподвижной ИСО.

3.1.2. Поступательно движущиеся НСО

Имеем две системы отсчета: абсолютную СО K_1, неподвижную с центром 0_1, и систему К с началом 0, движущуюся поступательно относительно K_1-системы. Пусть $\vec{R}_0$ — радиус-вектор между центрами систем отсчета 0_1 и 0 (рис. 3.1.1).

Рассматриваем материальную точку М, координаты которой будем определять векторами в каждой системе отсчета так, как нарисовано на рисунке 3.1.1: вектор $\vec{R}$ определяет координаты точки в неподвижной системе отсче-

та K_1, вектор $\vec{r}$ определяет положение точки относительно движущейся системы К. Таким образом, можно записать:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}\,. \tag{3.1.1}$$

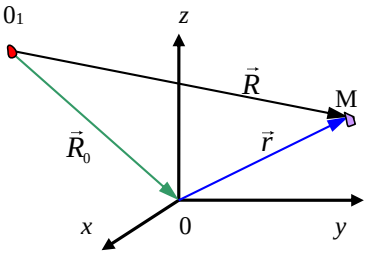


Рис. 3.1.1

Продифференцируем (3.1.1) по времени и введем обозначения для всех первых производных по времени, т. е. скоростей, $\frac{d\vec{R}}{dt} \equiv \dot{\vec{R}}$. Тогда получаем

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}}\,. \tag{3.1.2}$$

Дифференцируем по времени второй раз и введем соответствующие обозначения для ускорений:

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}}\,. \tag{3.1.3}$$

Следует отметить, что такая запись для сложения скоростей и ускорений справедлива только в частном случае, когда система с центром 0 движется поступательно относительно системы отсчета с центром 0_1. Тогда в соответствии с определениями в п. 3.1.1 получаем:

$\vec{v}_{\text{абс}} = \dot{\vec{R}}$ — *абсолютная* скорость точки М;

$\dot{\vec{R}}_0 = \vec{v}_{\text{пер}}$ — *переносная* скорость, т. е. скорость точки 0 относительно 0_1, и при поступательном движении есть скорость всех точек системы 0;

$\dot{\vec{r}} = \vec{v}_{\text{отн}}$ — *относительная* скорость точки М, т. е. ее значение в системе с центром 0.

Соответственно то же получаем для ускорений:

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{a}_{\text{абс}}, \quad \ddot{\vec{R}}_0 = \vec{a}_{\text{пер}}, \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_{\text{отн}}. \tag{3.1.4}$$

Таким образом, уравнения (3.1.2) и (3.1.3) записываются:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{абс}} &= \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{отн}}; \\ \vec{a}_{\text{абс}} &= \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{отн}}. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

В системе K_1 с центром 0_1 можно записать второй закон Ньютона:

$$m\vec{w}_{\text{абс}} = \vec{F}. \tag{3.1.6}$$

И тогда, подставляя абсолютное ускорение из (3.1.5), имеем

$$m\vec{w}_{\text{отн}} = \vec{F} - m\vec{w}_{\text{пер}}. \qquad (3.1.7)$$

Это и есть *уравнение относительного движения* материальной точки, описывающее ее движение в К-системе. Формально можно считать, что справа в (3.1.7) стоит просто некая сила, действующая на точку М в движущейся системе отсчета. Сила состоит из двух слагаемых.

1. $\vec{F}$ – «настоящая» (ньютонова) сила, т. е. результат взаимодействия тел, которая зависит от разностей координат и разностей скоростей взаимодействующих точек. В нерелятивистской механике эти разности $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ не меняются при переходе от одной СО к другой, поэтому $\vec{F}$ не меняется. То есть сила инвариантна относительно преобразований Галилея и при переходе в другие, даже неинерциальные системы отсчета.

2. Другая сила $-m\vec{w}_{\text{пер}} \equiv -m\vec{w}_0$ — возникает не из-за взаимодействия тел, а из-за ускоренного движения К-системы отсчета. Она носит название *силы инерции*. В данном случае $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0$ — поступательная сила инерции.

Итак, уравнение относительного движения записывается:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} + \vec{F}_{in}. \qquad (3.1.8)$$

Каковы особенности сил инерции?

1. Силы инерции не инвариантны относительно перехода из одной СО в другую.

2. Силы инерции не подчиняются закону равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона): если на какое тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к другому телу. Просто нет другого тела, создающего эти силы. То есть движение тел под действием сил инерции аналогично движению тел во внешних полях. Силы инерции всегда являются внешними по отношению к любой движущейся системе материальных тел.

Реальны или фиктивны силы инерции? Это зависит от того, какой смысл в них вкладывать.

1. Если считать, что все силы должны быть результатом взаимодействия тел (ньютоновская механика), то силы инерции фиктивны, они исчезают в ИСО.

2. Однако есть и другая точка зрения. Все взаимодействия осуществляются посредством силовых полей и передаются с конечными скоростями. И на силы инерции можно смотреть как на воздействие на рассматриваемое тело со стороны каких-то реальных полей. Правда, эти поля определенным образом преобразуются при переходе от рассматриваемой системы отсчета к другой, движущейся ускоренно. Но это не дает оснований считать их фиктивными. Так, электрические и магнитные силы также преобразуются при переходе от одной СО к другой (даже инерциальной).

Многие явления интерпретируются как проявление сил инерции. Рассмотрим некоторые примеры их проявлений.

1. Движение поезда с ускорением (ракеты). Груз, подвешенный на нити в вагоне поезда, отклоняется при ускоренном движении поезда (рис. 3.1.2). Это движение груза можно рассматривать в ИСО, где нет сил инерции, и тогда уравнение движения запишется:

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}. \qquad (3.1.9)$$

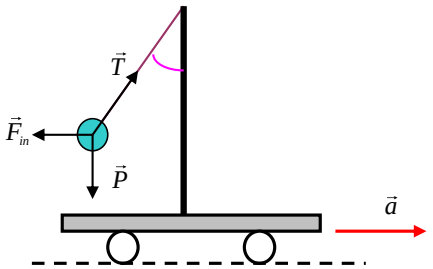


Рис. 3.1.2

Из этого уравнения, в частности, можно найти угол отклонения нити. Рассматривая в системе отсчета, связанной с вагоном, имеем: груз покоится относительно вагона, и тогда, учитывая, что $\vec{a}_{\text{отн}}=0$, уравнение (3.1.8) запишется:

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_{in}=0, \qquad (3.1.10)$$

где $\vec{F}_{in}=-m\vec{a}$. Во многих случаях бывает проще рассматривать явление непосредственно в движущейся СО, не переходя к инерциальной СО. Кроме того, иногда трудно разделить полную силу, действующую в неинерциальной СО, на реальную и фиктивную.

2. Свободно падающий маятник. Этот пример является эффективной демонстрацией движения тел в неинерциальных системах отсчета. Маятник находится на подвесе, который практически без трения может двигаться по направляющим и падать вниз (рис. 3.1.3). Когда подвес закреплен, маятник испытывает обычные колебания около положения равновесия, которые описываются уравнением

$$\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}, \qquad (3.1.11)$$

где $\vec{T}$ — сила натяжения подвеса (см. рис. 3.1.4, подробнее о колебаниях в главе 4). Движение маятника при свободном падении подвеса зависит от фазы колебания в момент, когда началось падение.

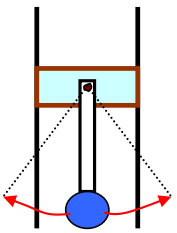


Рис. 3.1.3

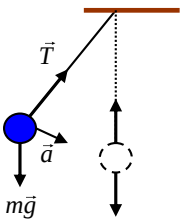


Рис. 3.1.4

Если скорость маятника в момент начала свободного падения не равна нулю $\vec{v} \neq 0$, то в неинерциальной системе отсчета имеем уравнение, описывающее движения маятника (рис. 3.1.5):

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{in} = m\,{d\vec{v}}/{dt}\,. \qquad (3.1.12)$$

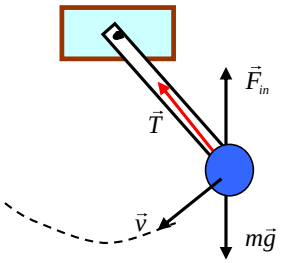


Рис. 3.1.5

Поскольку сила инерции равна $\vec{F}_{in} = -m\vec{g}$, то уравнение приобретает вид (рис. 3.1.5):

$$\vec{T} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\,. \qquad (3.1.13)$$

Однако скорость движения подвеса всегда перпендикулярна силе натяжения $\vec{T}$, и, следовательно, сила натяжения не может изменить эту скорость по модулю, а меняет только ее направление. Таким образом, маятник будет двигаться с постоянной скоростью по окружности вокруг точки подвеса. Естественно, что этот же результат можно получить в ИСО, записывая соответствующее уравнение Ньютона без сил инерции:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_{\text{абс}} = m\vec{a}_{\text{отн}} + m\vec{a}_{\text{пер}}. \qquad (3.1.14)$$

Поскольку переносное ускорение равно ускорению силы тяжести $m\vec{a}_{\text{пер}} = m\vec{g}$, то мы снова получаем уравнение (3.1.13).

Если в момент начала падения скорость маятника равнялась нулю, т. е. он был в крайнем левом или правом положении, то в дальнейшем при падении он так и останется в этом положении без движения в НСО, поскольку сила натяжения также равна нулю (см. уравнение (3.1.13)).

3. Вода в движущемся контейнере. При ускоренном движении контейнера уровень воды установится под некоторым углом α к горизонту. Причем этот угол наклона определяется силой инерции $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$, т. е. зависит от величины ускорения *a* контейнера:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}\,. \qquad (3.1.15)$$

Естественно, что угол наклона уровня воды устанавливается так, чтобы поверхность была перпендикулярна направлению равнодействующей силы $\vec{F} = m\vec{g} - m\vec{a}$.

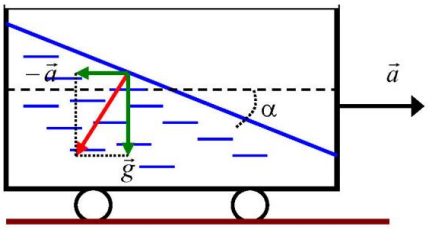


Рис. 3.1.6

3.2. Движение в произвольной системе отсчета

3.2.1. Системы с поступательным и вращательным движением

Пусть система отсчета К движется относительно неподвижной системы K_1 произвольно (рис. 3.2.1). Задача состоит в том, чтобы записать уравнение движения материальной точки М (или тела) в системе отсчета К. В самом общем случае это движение можно разбить на два движения: на поступательное движение со скоростью $\vec{V}_0$, равной скорости (·)О К-системы, и на вращательное движение вокруг мгновенной оси, проходящей через это начало координат (·)О, с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

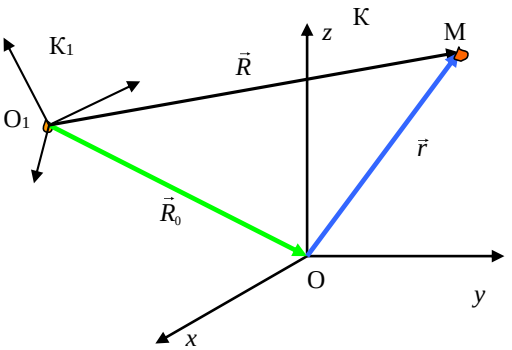


Рис. 3.2.1

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ меняется по величине и направлению. Следовательно, хотя орты $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ в системе отсчета К имеют постоянные длины, равные 1, однако направление этих единичных векторов-ортов меняется вследствие вращения. Поэтому орты в системе отсчета К зависят от времени $\vec{e}_x(t)$, $\vec{e}_y(t)$, $\vec{e}_z(t)$. Дальнейший ход рассуждений такой же, как в п. 3.1, и формулы для векторов смещения, скорости и ускорения фактически остаются теми же:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{R}_0 + \vec{r}; \\ \dot{\vec{R}} &= \dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}}; \\ \ddot{\vec{R}} &= \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}}. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

При этом остается неизменной интерпретация векторов $\dot{\vec{R}}_0$ и $\ddot{\vec{R}}_0$ как *абсолютной скорости* $\vec{v}_0$ ($\vec{v}_0 \equiv \dot{\vec{R}}_0$) и *абсолютного ускорения* $\vec{a}_0$ ($\vec{a}_0 \equiv \ddot{\vec{R}}_0$) *начала координат* (·)О соответственно. Однако при этом меняются слагаемые $\dot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{r}}$, а также их интерпретация.

Напомним о связи линейной и угловой скорости, когда вектор $\vec{r}$ вращается с угловой скоростью ω вокруг некоторой оси (см. рис. 3.2.2, а также рассуждения и формулы (1.11.1) и (1.11.2) в п. 1.11), причем начало его неподвижно и длина не меняется:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \tag{3.2.2}$$

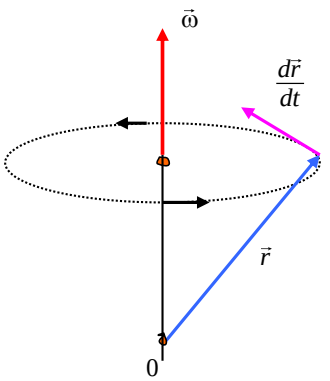


Рис. 3.2.2

Аналогично можно записать такое же соотношение для любого вращающегося вектора $\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{A}],$$

если он вращается относительно оси, проходящей через его начало (точка 0 на рис. 3.2.2), с угловой скоростью ω. В нашей системе отсчета сами орты $\vec{e}_x(t), \vec{e}_y(t), \vec{e}_z(t)$ вращаются с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Тогда можно сразу написать, что для их производных по времени имеем равенства, аналогичные (3.2.2):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_x}{dt} &= [\vec{\omega}, \vec{e}_x]; \\ \frac{d\vec{e}_y}{dt} &= [\vec{\omega}, \vec{e}_y]; . \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} &= [\vec{\omega}, \vec{e}_z]. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Эти соотношения необходимо учитывать, когда будем вычислять производные по времени от вектора $\vec{r}$. Рассмотрим сначала первую производную $\dot{\vec{r}}$.

3.2.2. Скорость в К-системе

Итак, координаты точки М в К-системе запишем как обычно (рис. 3.2.1):

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \tag{3.2.4}$$

Найдем скорость точки М, дифференцируя радиус-вектор по времени и учитывая, что орты тоже меняются во времени:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \left(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z\right) + \left(x\frac{d\vec{e}_x}{dt} + y\frac{d\vec{e}_y}{dt} + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right). \tag{3.2.5}$$

Если мы находимся в К-системе (и, следовательно, вращаемся вместе с ортами системы), то относительно нас точка М движется со скоростью $v_{\text{отн}}$, и вектор этой скорости определяется

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z. \tag{3.2.6}$$

Второе слагаемое в (3.2.5) можно преобразовать, используя формулы (3.2.3) (или (3.2.2)):

$$\begin{aligned}\left(x\frac{d\vec{e}_x}{dt} + y\frac{d\vec{e}_y}{dt} + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right) &= x\left[\vec{\omega},\vec{e}_x\right] + y\left[\vec{\omega},\vec{e}_y\right] + z\left[\vec{\omega},\vec{e}_z\right] = \\ &= \left[\vec{\omega},\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right)\right] = \left[\vec{\omega},\vec{r}\right].\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Итак, получаем:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\text{отн}} + \left[\vec{\omega},\vec{r}\right]. \tag{3.2.8}$$

Точно так же, как и ранее (см. уравнение (3.1.5) п. 3.1), можно записать выражение для абсолютной скорости, т. е. для скорости относительно K_1-системы, как сумму скоростей:

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}. \tag{3.2.9}$$

Но, в отличие от движения, рассмотренного в п. 3.1, в этом случае получаем более сложное выражение для переносной скорости. В самом деле, имеем следующее.

1. *Относительная скорость* $\vec{v}_{\text{отн}}$ — скорость точки М относительно К-системы, т. е. относительно центра 0 и ортов $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, как и ранее. Если точка М покоится относительно К-системы, то $\vec{v}_{\text{отн}} = 0$.

2. *Переносная скорость* $\vec{v}_{\text{пер}}$ состоит из двух слагаемых:

$$\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_0 + \left[\vec{\omega},\vec{r}\right]. \tag{3.2.10}$$

Переносная скорость $\vec{v}_{\text{пер}}$ — это та абсолютная скорость, с которой бы двигалась точка М относительно K_1-системы, если бы она покоилась в К-системе. Эта скорость состоит из двух слагаемых:

1) первое $\vec{v}_0$ — переносная скорость, определяющая скорость начала координат 0 К-системы;

2) второе $\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]$ — переносная скорость, определяющая скорость из-за вращения К-системы относительно начала 0.

3.2.3. Ускорение в К-системе

Немного сложнее обстоит дело с *абсолютным ускорением*. В самом деле, продифференцируем по времени уравнение (3.2.9) с учетом (3.2.10):

$$\vec{a}_{\text{абс}} \equiv \frac{d\vec{v}_{\text{абс}}}{dt} = \dot{\vec{v}}_{\text{отн}} + \dot{\vec{v}}_0 + \left[\vec{\omega},\dot{\vec{r}}\right] + \left[\dot{\vec{\omega}},\vec{r}\right]. \qquad (3.2.11)$$

Второе слагаемое $\dot{\vec{v}}_0$ в правой части уравнения (3.2.11) описывает ускорение точки 0 К-системы относительно начала отсчета K_1-системы. С другими слагаемыми в (3.2.11) разберемся по очереди.

1. Производная по времени от относительной скорости, исходя из уравнения (3.2.6) и беря производные по времени от ортов, как и ранее в (3.2.7), имеет вид:

$$\frac{d\vec{v}_{\text{отн}}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{x}\frac{d\vec{e}_x}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{e}_y}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{a}_{\text{отн}} + \dot{x}\left[\vec{\omega},\vec{e}_x\right] + \dot{y}\left[\vec{\omega},\vec{e}_y\right] + \dot{z}\left[\vec{\omega},\vec{e}_z\right] =$$
$$= \vec{a}_{\text{отн}} + \left[\vec{\omega},\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z\right] = \vec{a}_{\text{отн}} + \left[\vec{\omega},\vec{v}_{\text{отн}}\right].$$

Итак, получаем, что производная от относительной скорости состоит из двух слагаемых:

$$\frac{d\vec{v}_{\text{отн}}}{dt} = \vec{a}_{\text{отн}} + \left[\vec{\omega},\vec{v}_{\text{отн}}\right], \qquad (3.2.12)$$

где *относительное ускорение*, т. е. ускорение точки М для наблюдателя в К-системе, равно

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z. \qquad (3.2.13)$$

2. Преобразуем третье слагаемое в уравнении (3.2.11), в которое вместо производной от радиус-вектора подставим уравнение (3.2.8):

$$\left[\vec{\omega},\dot{\vec{r}}\right] = \left[\vec{\omega},\vec{v}_{\text{отн}}\right] + \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right]. \qquad (3.2.14)$$

Теперь (3.2.12) и (3.2.14) подставим в абсолютное ускорение (3.2.11) и окончательно получаем:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + 2\left[\vec{\omega},\vec{v}_{\text{отн}}\right] + \dot{\vec{v}}_0 + \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right] + \left[\dot{\vec{\omega}},\vec{r}\right]. \qquad (3.2.15)$$

Итак, абсолютное ускорение состоит из пяти слагаемых. Введем следующие обозначения:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{кор}} + \vec{a}_{\text{пер}}. \qquad (3.2.16)$$

Здесь относительное ускорение $\vec{a}_{\text{отн}}$, определяемое формулой (3.2.13), описывает ускорение точки относительно координат К-системы.

Введенное *переносное ускорение* определяется суммой трех слагаемых:

$$\vec{a}_{\text{пер}} = \dot{\vec{v}}_0 + \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right] + \left[\dot{\vec{\omega}},\vec{r}\right] \qquad (3.2.17)$$

и зависит только от движения К-системы относительно неподвижной K_1-системы. Именно такое ускорение испытывает точка М, если она покоится в К-системе, поэтому уравнение (3.2.17) определяет переносное ускорение.

В уравнение (3.2.16) ввели также *кориолисово ускорение*:

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\left[\vec{\omega},\vec{v}_{\text{отн}}\right], \qquad (3.2.18)$$

которое зависит от относительного и переносного движений, т. е. «смешивает» два движения между собой, поэтому оно выделено в отдельное ускорение.

Теорема Кориолиса: абсолютное ускорение является векторной суммой относительного, кориолисова и переносного ускорений:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{кор}} + \vec{a}_{\text{пер}}.$$

Последние два слагаемых рассмотрим подробнее ниже.

Примечание 36. Гюстав Гаспар Кориолис (1792–1843), французский физик.

3.2.4. Переносное ускорение

Рассмотрим более подробно переносное ускорение, определяемое уравнением (3.2.17).

1. Первое слагаемое в (3.2.17) — $\dot{\vec{v}}_0$ — переносное ускорение, вызванное *поступательным* ускоренным движением К-системы, т. е. ускорением точки начала отсчета 0.

2. Все остальные слагаемые в (3.2.17) — обусловлены вращением К-системы относительно K_1. Так, третье слагаемое в (3.2.17) $\left[\dot{\vec{\omega}},\vec{r}\right]$ появляется из-за неравномерности вращения К-системы. При равномерном вращении угловое ускорение $\dot{\vec{\omega}} = 0$ и угловая скорость постоянны: $\vec{\omega} = \text{const}$.

3. Второе слагаемое в (3.2.17) — $\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right] = \vec{a}_{\text{цс}}$ — *центростремительное* ускорение. Оно всегда направлено к мгновенной оси вращения. В самом деле, разложим радиус-вектор на составляющие вдоль оси вращения и перпендикулярно оси вращения: $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$. Параллельная компонента радиус-вектора не входит в это ускорение, поскольку $\left[\vec{\omega},\vec{r}_{\parallel}\right] = 0$. Тогда, расписывая двойное векторное произведение по правилу БАЦ–ЦАБ и учитывая, что скалярное произведение $\left(\vec{\omega},\vec{r}_{\perp}\right) = 0$, получаем:

$$\vec{a}_{\text{цс}} = \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}\right]\right] = \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}_{\perp}\right]\right] = \vec{\omega}\left(\vec{\omega},\vec{r}_{\perp}\right) - \vec{r}_{\perp}\left(\vec{\omega},\vec{\omega}\right) = 0 - \omega^2\vec{r}_{\perp} = -\omega^2\vec{r}_{\perp}. \qquad (3.2.19)$$

Из последнего видно, что центростремительное ускорение направлено к оси вращения и перпендикулярно ей.

3.2.5. Уравнение относительного движения

Запишем уравнение относительного движения для тела массой m в виде

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} - m\vec{a}_{\text{кор}} - m\vec{a}_{\text{пер}}. \qquad (3.2.20)$$

Итак, получили, что к настоящей (ньютоновой) силе $\vec{F}$ добавились еще две силы инерции: *кориолисова сила*

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -m\vec{a}_{\text{кор}} = 2m\left[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\omega}\right] \qquad (3.2.21)$$

и переносная сила инерции

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_{\text{пер}} = -m\dot{\vec{v}}_0 + m\omega^2\vec{r}_\perp - m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}\right]. \qquad (3.2.22)$$

В уравнении (3.2.22) имеем:

— поступательная сила инерции

$$\vec{F}_{\text{пер1}} = -m\vec{v}_0; \qquad (3.2.23)$$

— сила инерции из-за неравномерности вращения

$$\vec{F}_{\text{пер2}} = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}\right]; \qquad (3.2.24)$$

— центробежная сила

$$\vec{F}_{\text{пер3}} = m\omega^2\vec{r}_\perp. \qquad (3.2.25)$$

Все эти силы вводят только в ускоренно движущихся системах отсчета. Приведем несколько примеров действия центробежной силы:

1) возникновение перегрузки летчиков при исполнении фигур высшего пилотажа;

2) отклонение тел при поворотах или вращении (предметы на карусели, раскидай и т. д.).

3) движение частиц в центрифугах и сепараторах.

Кориолисова сила (3.2.21) возникает только тогда, когда система вращается, а материальная точка движется относительно этой системы. Эта сила инерции, помимо скорости вращения, зависит от относительной скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$. Сила Кориолиса всегда перпендикулярна относительной скорости и поэтому работы не совершает. Сила Кориолиса — *гироскопическая сила*, *не потенциальная*.

Примеры действия силы Кориолиса:

1) движение человека по вращающейся карусели;

2) движение шарика по поверхности вращающегося диска, пущенного из центра, — траекторией шарика в системе отсчета диска является кривая линия под действием силы Кориолиса (см. рис. 3.2.3);

3) движение тел в поле Земли, отклонение падающих тел от вертикали и т. д.;

4) реки, текущие по меридиану (Волга, Енисей, Одер и др.) подмывают свои правые берега. С течением времени русло смещается вправо, оставляя левые берега пойменными.

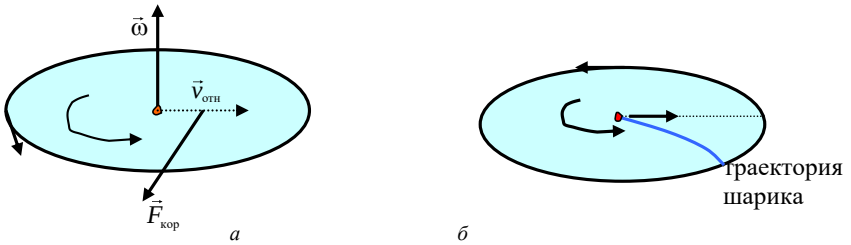


Рис. 3.2.3

Подробнее пример движения тел в поле Земли рассмотрим в следующем параграфе.

3.3. Движение материальной точки относительно Земли

3.3.1. Уравнение движения тел относительно Земли

Системы отсчета, связанные с поверхностью Земли, — неинерциальные системы отсчета. Применим уравнение относительного движения (3.2.20) к движению тел относительно Земли. Введем далее для простоты написания следующие обозначения: $\vec{a}_{отн} = \vec{a}$, $\vec{v}_{отн} = \vec{v}$.

Пусть *начало отсчета нашей системы находится в центре Земли*, тогда в уравнениях (3.2.20)–(3.2.25) $\vec{v}_0$ и $\dot{\vec{v}}_0$ — скорость и ускорение центра Земли относительно «неподвижной» системы отсчета (СО, примем за неподвижную СО — Солнце). Тогда уравнение относительного движения (3.2.20) принимает вид

$$m\vec{a} = \vec{F} + 2m\left[\vec{v},\vec{\omega}\right] - m\dot{\vec{v}}_0 + m\omega^2\vec{r}_\perp - m\left[\dot{\vec{\omega}},\vec{r}\right]. \qquad (3.3.1)$$

Учтем следующие обстоятельства. Земля вращается равномерно (приблизительно), поэтому $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Далее, распишем обычные силы более подробно:

$$\vec{F} \Rightarrow \vec{F}_З + \vec{F}_0 + \vec{F}, \qquad (3.3.2)$$

где $\vec{F}_З$ — гравитационное притяжение Земли; $\vec{F}_0$ — равнодействующая сил гравитационного притяжения Солнца, Луны и других планет; $\vec{F}$ — сумма всех других сил земного происхождения (сила сопротивления, упругости и т. д.). Тогда уравнение (3.3.1) представим в виде

$$m\vec{a} = \left(\vec{F}_З + m\omega^2\vec{r}_\perp\right) + 2m\left[\vec{v},\vec{\omega}\right] + \vec{F} + \left(\vec{F}_0 - m\dot{\vec{v}}_0\right). \qquad (3.3.3)$$

Обобщенный закон Галилея: все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Ускорение $\dot{\vec{v}}_0$ — ускорение центра Земли в поле тяготения Солнца и планет. Оно одинаково для всех тел, в том числе и для тел, находящихся на Земле. Отсюда следует

$$\vec{F}_0 - m\dot{\vec{v}}_0 = 0. \qquad (3.3.4)$$

То есть силы гравитационного притяжения Солнца, Луны, других планет выпадают из уравнений относительного движения. Это есть свободное падение Земли и земных тел во внешнем гравитационном поле (что напоминает свободно падающий маятник, см. п. 3.1.2). Эти гравитационные силы полностью компенсируются поступательными силами инерции, возникающими из ускорений, сообщаемых Земле и всем телам на Земле этими полями.

Итак, получаем уравнение движения тела в поле Земли:

$$m\vec{a} = \vec{F}_З + m\omega^2\vec{r}_\perp + 2m\left[\vec{v},\vec{\omega}\right] + \vec{F}\,. \qquad (3.3.5)$$

Далее рассмотрим примеры применения этого уравнения к задачам движения в поле Земли.

3.3.2. Ускорение свободного падения и вес тел

Рассмотрим тело, покоящееся на поверхности Земли (см. уравнение (3.3.5) и рис. 3.3.1). Сила $\vec{F}_З + m\omega^2\vec{r}_\perp$ не зависит от движения материальной точки и характеризует только гравитационное поле Земли и ее вращение. Поэтому для суммы этих сил, которая зависит только от точки пространства, можно ввести обозначение

$$m\vec{g} = \vec{F}_З + m\omega^2\vec{r}_\perp\,. \qquad (3.3.6)$$

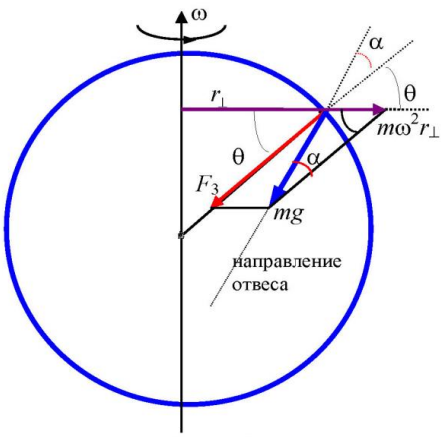


Рис. 3.3.1

Если внешних сил нет и скорость тела $\vec{v} = 0$, тогда имеем

$$m\vec{a} = m\vec{g}\,. \qquad (3.3.7)$$

То есть получаем, что g — ускорение свободно падающего тела относительно Земли (важно при этом, что его скорость равна 0 в рассматриваемый момент, иначе вступает в дело сила Кориолиса). Это ускорение можно представить как сумму двух величин

$$\vec{g} = \vec{g}_{gr} + \omega^2\vec{r}_\perp, \qquad (3.3.8)$$

где $\vec{g}_{gr} = \vec{F}_з / m$ — ускорение за счет гравитационного притяжения, а второе слагаемое в (3.3.8) — центробежное ускорение. Видно, что сила тяжести не направлена к центру Земли (за исключением экватора и полюсов).

Вес тела P — это сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на опору или подвес, если опора или подвес покоятся в той системе отсчета, где производится взвешивание:

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_з + m\omega^2\vec{r}_\perp . \qquad (3.3.9)$$

Если Земля была бы сферически симметрична, то и тогда бы направление вектора $\vec{P}$ не совпадало бы с направлением на центр. Угол α между векторами $\vec{P}$ и $\vec{F}_з$ можно найти с помощью теоремы синусов (см. рис. 3.3.1):

$$\frac{m\omega^2 r_\perp}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\sin\theta} .$$

Учитывая, что $r\cos\theta = r_\perp$, получаем

$$\sin\alpha = \frac{\omega^2 r_\perp}{g}\sin\theta = \frac{\omega^2 r}{2g}\sin 2\theta . \qquad (3.3.10)$$

Здесь угол θ — это *географическая широта*. Проектируя ускорения (3.3.8) на направление $\vec{g}$ и считая угол α достаточно малым, что $\cos\alpha \approx 1$ и $\cos(\theta+\alpha) \approx$ $\approx \cos\theta$, имеем

$$g = g_{gr}\cos\alpha - \omega^2 r_\perp \cos(\theta+\alpha) \approx g_{gr} - \omega^2 r\cos^2\theta . \qquad (3.3.11)$$

Точность полученного выражения $\sim \alpha^2$.

Опыты показали, что ускорение свободного падения g зависит от географической широты. На полюсе ($\theta = \pi/2$): g = 983.2 см/с^2, на экваторе ($\theta = 0$): g = = 978.0 см/с^2. Таким образом, различие в весе одного того же тела на полюсе и экваторе составляет $\delta P / P = 0.5\%$.

Примечание 37. В действительности g_{gr} на экваторе меньше, чем на полюсе, дополнительно еще из-за одного фактора — «сплюснутости» Земли: $R_{полюс}$ = 6357 км, $R_{экватор}$ = = 6378 км.

3.3.3. Отклонение падающих тел. Маятник Фуко

Рассмотрим свободное падение тел (рис. 3.3.2). При этом ньютоновы силы отсутствуют $\vec{F} = 0$ и уравнение движения тела (3.3.5) с учетом вращения Земли и уравнения (3.3.6) принимает вид

$$\vec{a} = \vec{g} + 2[\vec{v}, \vec{\omega}] . \qquad (3.3.12)$$

Вращение Земли вызывает центробежную силу, которая входит в ускорение g, и кориолисову силу $\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$. При падении тел без начальной скорости кориолисова сила проявляется в отклонении свободно падающих тел к востоку и экватору от направления отвеса. Легко увидеть из рисунка 3.3.2, что

сила Кориолиса направлена за плоскость чертежа перпендикулярно к вектору скорости и плоскости «штриховой» окружности.

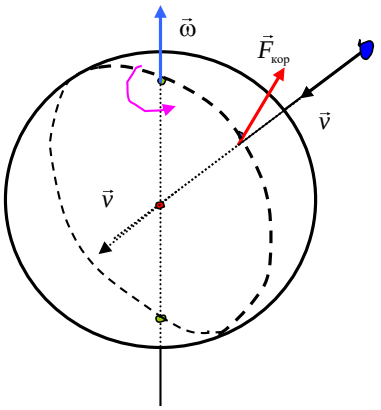


Рис. 3.3.2

Опыты по отклонению падающих тел к востоку доказывают неинерциальность системы отсчета Земли. Однако точность таких опытов невелика, для более точного определения степени неинерциальности на поверхности Земли лучше использовать маятник Фуко (рис. 3.3.3 и 3.3.4).

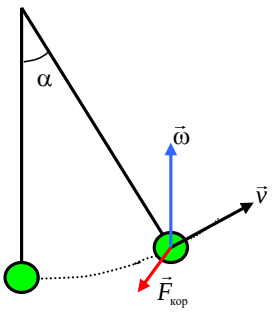


Рис. 3.3.3

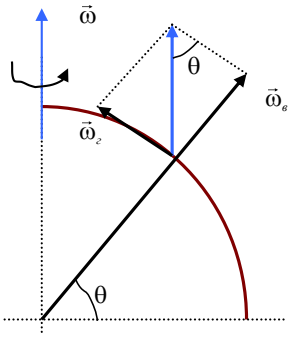


Рис. 3.3.4

Если бы Земля была инерциальной системой отсчета, то действующие силы тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити $\vec{F}$, лежащие в одной плоскости, обеспечивали бы колебания в одной плоскости (если специально не закрутить маятник). Однако плоскость колебаний маятника медленно поворачивается вокруг вертикали в том же направлении, в каком поворачиваются Солнце и звезды. Ж. Фуко демонстрировал свой маятник в Париже в 1850–1851 гг.

Уравнение движения маятника имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2m\left[\vec{v},\vec{\omega}\right] + \vec{F}\,. \qquad (3.3.13)$$

Напомним, что здесь ω — угловая скорость вращения Земли (угловая частота). На рисунке 3.3.3 показана ситуация с силой Кориолиса на полюсе.

На широте θ (см. рис. 3.3.4) вектор угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ Земли можно разбить на две составляющие — вертикальную $\omega_в$ и горизонтальную $\omega_г$. Причем вертикальная составляющая угловой скорости, равная $\omega_в = \omega \sin\theta$, обеспечивает вращение плоскости колебаний маятника. Это и демонстрирует маятник Фуко.

Примеры возможных траекторий маятника представлены на рисунке 3.3.5 для двух предельных начальных условий. Пусть на рисунке вертикальная составляющая угловой скорости вращения земли направлена перпендикулярно плоскости рисунка на нас. Окружность определяет границы движения маятника, т. е. радиус окружности равен амплитуде смещения. Рассмотрим случай А, когда в начальный момент времени маятник отклонен в крайнее положение. Тогда в результате действия силы Кориолиса получаем траекторию в виде «розетки» (левая часть рис. 3.3.5). В случае Б, когда маятнику был дан толчок (импульс) в положении равновесия, траектория показана на правой части рисунка 3.3.5.

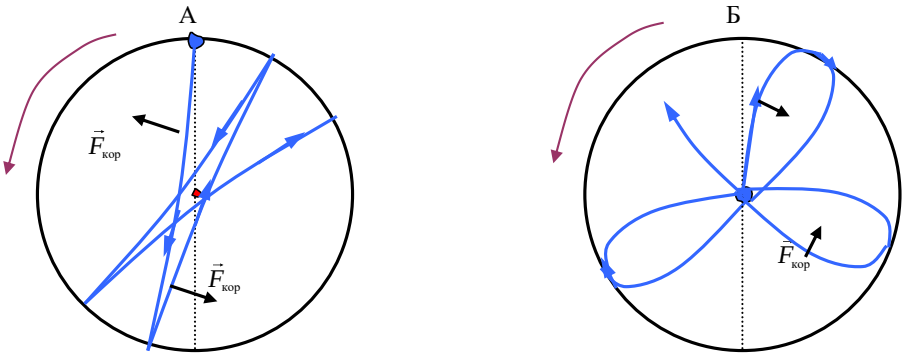


Рис. 3.3.5

Очевидно, что полученные фигуры определяются действием силы Кориолиса на каждом участке движения маятника.

Примечание 38. Жан Бернар Леон Фуко (1819–1868), французский физик.

3.4. Инертная и гравитационная массы. Принцип эквивалентности

3.4.1. Инертная и гравитационная массы

Инертная масса m^i выступает как коэффициент пропорциональности между импульсом и скоростью или между силой и ускорением:

$$\vec{p} = m^i \vec{v}, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m^i \frac{d\vec{v}}{dt} = m^i \vec{a}\,. \qquad (3.4.1)$$

В основе определения этой массы лежат инертные свойства тел.

Однако тела обладают не только свойствами инерции, но и способностью возбуждать в окружающем пространстве гравитационные поля (по аналогии с

зарядами в электричестве), при этом сила взаимодействия между двумя точечными телами записывается (закон всемирного тяготения):

$$F = G\frac{m_1^g m_2^g}{r^2}. \qquad (3.4.2)$$

Здесь m^g — *гравитационная масса*, коэффициент G введен для согласования системы единиц, чтобы инертная и гравитационная массы измерялись в одних единицах. Важно подчеркнуть, что инерция тел и их способность возбуждать гравитационные поля не должны рассматриваться как взаимосвязанные или тем более тождественные свойства. В принципе, задавая расстояние r и силу F известными единицами, можно при любом G выбрать единицы гравитационных масс m^g.

Рассматривая движение тела в поле Земли, имеем силу тяготения:

$$F = G\frac{m^g M^g}{R^2}, \qquad (3.4.3)$$

где M^g — масса Земли и R — ее радиус. Если тело имеет инертную массу m^i, то под действием этой силы тяжести тело приобретает ускорение:

$$a = \frac{F}{m^i} = G\frac{M^g}{R^2}\cdot\frac{m^g}{m^i} = g\frac{m^g}{m^i}. \qquad (3.4.4)$$

Галилей же прямыми опытами установил, что ускорение всех тел у поверхности Земли одинаковое.

Итак, физический закон, установленный Ньютоном: *сила гравитационного взаимодействия тел пропорциональна их инертным массам*, т. е. инертная масса тела пропорциональна его гравитационной массе. Единицы гравитационной массы m^g можно выбрать такими же, как и для инертной массы m^i.

Это фундаментальный физический закон — закон эквивалентности инертной и гравитационной масс. Таким образом, можно сформулировать обобщенный закон Галилея: все тела при свободном падении в одном и том же гравитационном поле приобретают одинаковое ускорение (мы уже им пользовались в предыдущем параграфе). Обобщенный закон Галилея соответствует принципу эквивалентности инертной и гравитационной масс.

3.4.2. Опыт Этвеша

Опыты Галилея по проверке одинаковости ускорения тел при свободном падении имели весьма малую точность. Более точные опыты были проведены Ньютоном. Однако их точность также была невелика. Долгое время наиболее точными были опыты Этвеша. Он в 1888 г. сконструировал крутильные весы и с их помощью исследовал и установил в 1889–1908 гг. равенство инертной и гравитационной масс с относительной точностью $5\cdot10^{-9}$.

Идея эксперимента Этвеша состоит в следующем. Рассмотрим тело на поверхности Земли (рис. 3.4.1). Вес тела складывается из двух различных сил:

$F_3 = m^g g$ — гравитационная сила притяжения, которая пропорциональна гравитационной массе m^g;

$F_{in} = m^i \omega^2 r_\perp$ — центробежная сила инерции, которая пропорциональна инертной массе m^i.

Если бы m^i и m^g были не строго пропорциональны друг другу, то направление отвеса зависело бы от материала тела.

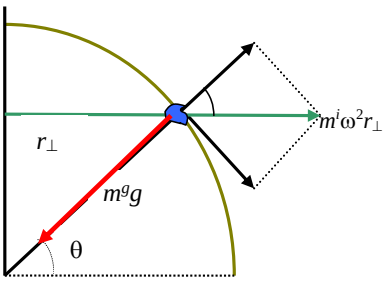


Рис. 3.4.1

Чтобы использовать это рассуждение, опыт ставился следующим образом. На нити подвешивался стержень с двумя грузами на краях: из меди 1 и платины 2 (рис. 3.4.2). Стержень длиной l ориентировался перпендикулярно к меридиану (меридиан — прямая с севера на юг на рис. обозначена как NS). Тогда условие равновесия для стержня в вертикальном направлении к поверхности Земли при условии, что стержень равноплечный (плечи равны по $l/2$), имеет вид

$$m_1^g g - m_1^i \omega^2 r_\perp \cos\theta = m_2^g g - m_2^i \omega^2 r_\perp \cos\theta, \qquad (3.4.5)$$

где угол θ определяет широту (см. рис. 3.4.1). Введем коэффициенты пропорциональности:

$$\alpha_1 = \frac{m_1^g}{m_1^i}, \qquad \alpha_2 = \frac{m_2^g}{m_2^i}; \qquad (3.4.6)$$

$$m_1^i\left(\alpha_1 g - \omega^2 r_\perp \cos\theta\right) = m_2^i\left(\alpha_2 g - \omega^2 r_\perp \cos\theta\right). \qquad (3.4.7)$$

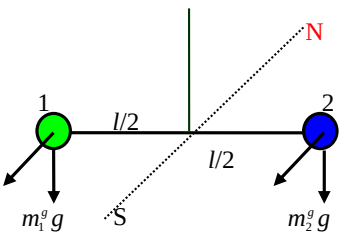


Рис. 3.4.2

Если $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (т. е. массы не пропорциональны), то $m_1^i \neq m_2^i$. В этом случае центробежные силы, действующие на грузы, а с ними и горизонтальные составляющие, направленные к югу S, не были бы одинаковыми, и при этом появился бы вращательный момент, равный:

$$M = m_1^i \omega^2 r_\perp \sin\theta \cdot \frac{l}{2} - m_2^i \omega^2 r_\perp \sin\theta \cdot \frac{l}{2} = \omega^2 r_\perp \frac{l}{2} \sin\theta \cdot \left(m_1^i - m_2^i\right). \qquad (3.4.8)$$

Итак, при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ появляется момент силы M_1, закручивающий нить на угол $\varphi_1 \sim M_1$. Если повернуть весь прибор на 180°, то появляющийся момент силы M_2 закручивает нить в другую сторону на угол $\varphi_2 \sim M_2$, причем $M_1 = -M_2$ и $\varphi_1 = -\varphi_2$. При этом нить закрутится относительно начального положения на угол:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\varphi_2. \qquad (3.4.9)$$

Однако опыты Этвеша показали, что $\Delta\varphi = 0$, т. е. получается, что коэффициенты пропорциональности одинаковы $\alpha_1 = \alpha_2$, и это доказывает равенство гравитационных и инертных масс. Относительная точность проведенного эксперимента составляла $\sim 5 \cdot 10^{-9}$.

Принцип эквивалентности неоднократно уточнялся и проверялся. В 1959–1963 гг. американским физиком Р. Дикке точность измерений была увеличена до 10^{-11}, а в 1971 г. советские физики В. П. Брагинский и В. И. Панов довели точность измерения этих величин до 10^{-12}. В настоящее время точность опытов дает, что инертная и гравитационная массы равны с относительной точностью до 10^{-13}, т. е.

$$\frac{m^g - m^i}{m^i} \leq 10^{-13}. \qquad (3.4.10)$$

Иначе говоря, нет экспериментальных оснований считать их неэквивалентными. Однако проверки их эквивалентности продолжаются, поскольку это связано с проверкой общей теории относительности.

Примечание 39. Роланд Этвеш (1848–1919), венгерский физик.

3.4.3. Принцип эквивалентности сил инерции и сил гравитации

Эквивалентность инертной и гравитационной масс имеет фундаментальное значение для понимания природы тяготения. А. Эйнштейн обратил на это внимание и задавался вопросом: почему законы природы записываются в одинаковой форме только в специальных системах отсчета (СО), которые движутся равномерно и прямолинейно относительно друг друга — т. е. в инерциальных СО (ИСО). Понять и объяснить это достаточно трудно, поскольку реально выделить такую систему отсчета в реальном физическом пространстве невозможно. Но классическая механика и СТО базируются как раз на существовании, хотя бы в принципе, инерциальных систем отсчета. По мнению Эйнштейна, это противоестественно, *физические законы должны иметь одинаковую форму в любых системах отсчета*.

В чем состоит недостаток неинерциальных СО? В них появляются неньютоновские силы — силы инерции. Эти силы пропорциональны инертной массе тела.

С другой стороны, в ИСО могут действовать гравитационные силы, которые пропорциональны гравитационной массе.

Но экспериментально показано, что инертная и гравитационная массы эквивалентны, следовательно, можно сделать вывод, что силы инерции эквивалентны силам гравитации. Эти рассуждения пригодны как для механики малых скоростей, так и для релятивистской механики.

Рассмотрим важный поясняющий *пример с лифтом* (лифт Эйнштейна), изображенным на рисунке 3.4.3.

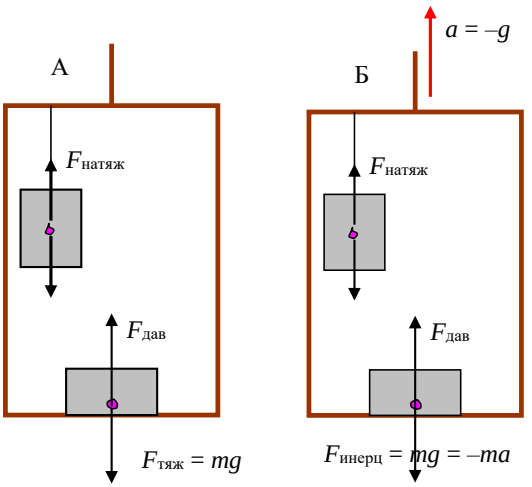


Рис. 3.4.3

Пример А (на рис. 3.4.3): закрытый лифт находится в гравитационном поле напряженности g. Лифт — инерциальная система отсчета, тогда наблюдатель, находящийся внутри кабины, видит падение тел с ускорением g, растяжение нити или пружины под действием силы тяжести mg, силу давления тела на пол и реакцию опоры и т. д. В этой системе отсчета работает обычная ньютоновская механика. Когда лифт свободно падает, возникает явление невесомости в соответствии с обобщенным принципом Галилея.

Пример Б (см. рис. 3.4.3): лифт, находящийся вдали от Земли и других небесных тел, чтобы не было силы тяжести, движется с ускорением $a = -g$. Лифт — неинерциальная система отсчета. На тела внутри лифта будет действовать поступательная сила инерции $F = -ma = mg$. Для наблюдателя, также находящегося внутри кабины, все явления будут происходить точно так же, как в случае с неподвижным лифтом в поле тяжести: так же будут падать тела, проявляться сила натяжения или реакции опоры и т. д.

То есть действие силы инерции для наблюдателя внутри будет таким же, как в гравитационном поле.

Принцип эквивалентности Эйнштейна: все физические явления в равномерно ускоренном лифте будут происходить в точности так же, как в неподвижном лифте, висящем в однородном поле тяжести. Никакие опыты по свободному падению тел в лифте не могут отличить однородное гравитационное поле от однородного поля сил инерции. То же нельзя сделать и любыми другими физическими опытами.

Общая формулировка принципа эквивалентности: все физические явления в гравитационном поле происходят совершенно так же, как в соответствующем поле сил инерции, если напряженности обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а начальные условия одинаковы для всех тел замкнутой системы.

Отсюда следует вывод: физические законы в неинерциальной системе отсчета записываются точно так же, как в инерциальной системе отсчета в присутствии сил тяготения.

Однако не все гравитационные поля могут быть описаны поступательными силами инерции. Это легко сделать для однородных гравитационных полей. Но, например, гравитационное поле точечной массы, Земли и других тел — неоднородные поля, а поступательные силы инерции — однородны. Силы инерции во вращающихся системах отсчета также не могут заменить неоднородные гравитационные поля.

Выход состоит в том, чтобы рассматривать достаточно малый объем, в пределах которого гравитационное поле можно считать однородным. Именно для такого малого объема и справедлив принцип эквивалентности, в нем гравитационное поле может быть имитировано ускоренным движением системы отсчета. То есть принцип эквивалентности носит *локальный характер*. Единственное, что достижимо соответствующим выбором системы отсчета, это исключение гравитационного поля в данном малом объеме пространства, достаточно малом, чтобы в нем можно было считать поле однородным.

В общей теории относительности (ОТО — *релятивистская теория гравитации*) Эйнштейн объединил гравитационное поле и поле всех сил инерции в единое поле. Эйнштейн написал уравнения гравитационного поля (в расширенном смысле), причем закон всемирного тяготения Ньютона получается как частный случай этих уравнений и справедлив приближенно. Математически задача заключается в переходе от галилеевой СО к неинерциальной СО, которая определяется в локальном пространстве точки. В ОТО *геометрические свойства пространства не самостоятельны — они обусловлены материей*. И само физическое пространство является неевклидовым, наличие материи искривляет его, а кривизна пространства зависит от плотности и движения вещества. Если материя и ее распределение в пространстве известны, то можно говорить о геометрической структуре мира.

Каковы особенности такого пространства?

1. Тело, движущееся равномерно и прямолинейно относительно галилеевой СО, будет двигаться, вообще говоря, по криволинейной траектории относительно НСО.

2. Световой луч в поле тяготения и в НСО искривляется. Поясним подробнее этот момент, поскольку мы пользуемся принципом, что свет распространяется между двумя точками по кратчайшему пути. Не имеем ли мы здесь нарушение этого принципа? Оказывается, что нет, поскольку в неевклидовом пространстве кратчайшее расстояние между двумя точками — кривая линия. Пример: рассматривая мир на сферической поверхности, получаем, что кратчайшее расстояние между двумя точками — дуга большого круга.

3. Однако если свет движется по кривой, то его скорость меняется. Как же обстоит дело с постулатом о постоянстве скорости света? Оказывается, что в присутствии сильных гравитационных полей постулат о постоянстве скорости света может быть пересмотрен.

Вообще название общая теория относительности, введенное Эйнштейном, не совсем правильно отражает суть теории, поэтому ее более современное название — *теория тяготения*.

Итак, *первая основная идея* Эйнштейна, основанная на принципе эквивалентности и составляющая основу теории тяготения, заключается в том, что в поле тяготения все тела движутся по *геодезическим линиям* в пространстве — времени, которое, однако, искривлено, и, следовательно, геодезические линии уже не прямые. Таким образом, поле тяготения, по Эйнштейну, есть отклонение свойств пространства-времени от свойств плоского (не искривленного) многообразия специальной теории относительности.

Вторая важная идея, лежащая в основе теории Эйнштейна, — утверждение, что тяготение (т. е. искривление пространства-времени) определяется не только массой вещества, слагающего тело, но и всеми видами энергии, присутствующими в системе. Согласно этой идее тяготение зависит не только от распределения масс в пространстве, но и от их движения, от давления и натяжений, имеющихся в телах, от электромагнитного поля и всех других физических полей.

3.4.4. Поведение часов и масштабов в присутствии полей тяготения

Рассмотрим поведение часов и масштабов в присутствии полей тяготения или полей инерции на примере поля инерции во вращающейся системе отсчета. Пусть имеются два наблюдателя, один в центре ИСО, а другой на поверхности вращающейся сферы (рис. 3.4.4). На наблюдателя, находящегося на поверхности сферы, действует центробежная сила инерции, направленная от центра сферы и по принципу эквивалентности аналогичная силе тяготения.

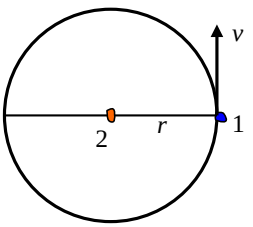


Рис. 3.4.4

Геометрические измерения. Наблюдатель 1 находится на вращающейся поверхности и измеряет длину окружности вокруг неподвижного центра. Наблюдатель 2 находится в центре ИСО, следит за этими измерениями и верит в принцип эквивалентности, зная, что для первого наблюдателя существует необычное поле тяготения. Для наблюдателя 2 отношение длины окружности к диаметру есть число π:

$$\frac{l_0}{d} = \pi = 3.1415. \qquad (3.4.11)$$

Для наблюдателя 1 при измерении диаметра окружности ничего не происходит, так как скорость его перпендикулярна к диаметру и при этом координаты (и масштабы) не меняются. При измерении длины окружности масштаб будет располагаться по касательной к окружности, вдоль которой наблюдатель 1 движется со скоростью $V = \omega r$. Следовательно, измеряемая им длина окружности равна

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}, \qquad (3.4.12)$$

где $\beta = V/c = \omega r/c$. То есть получаем лоренцево сокращение длины окружности. Таким образом, для наблюдателя 1 отношение длины окружности к диаметру равно

$$\frac{l}{d} = \pi\sqrt{1-\beta^2} < \pi. \qquad (3.4.13)$$

Более того, поскольку скорость V на поверхности сферы зависит от радиуса сферы r, то и отношение масштабов зависит от положения каждой точки по радиусу. То есть в присутствии гравитационного поля пространство становится неевклидовым, при этом линейные масштабы изменяются от точки к точке непрерывно.

Что будет с часами? Очевидно, что примерно то же, что и с масштабами, поскольку часы, расставленные по радиусу, движутся с различными скоростями, и для наблюдателя 2 (находящегося в центре окружности) их ход будет замедляться согласно соотношению

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (3.4.14)$$

Таким образом, часы изменяют свой ход непрерывно при перемещении вдоль радиуса, т. е. наличие гравитационного поля приводит к изменению хода часов.

Последнее утверждение можно проверить экспериментально, если наблюдать частоту излучения в известных линиях спектра источников, находящихся в сильном поле тяготения. Ход атомных часов определяется периодом T, или частотой ν электромагнитной волны, излучаемой атомом, поэтому можно записать для движущихся источников (с не очень большими скоростями V):

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2} \approx \nu_0\left(1-\frac{V^2}{2c^2}\right), \qquad (3.4.15)$$

где T_0 и ν_0 — период колебаний и частота часового маятника неподвижного наблюдателя (или наблюдателя, у которого нет гравитационного поля). В нашем примере скорость равна $V = \omega r$, ее и подставим в (3.4.15):

$$\nu = \nu_0\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{\omega^2 r^2}{2}\right) = \nu_0\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right). \qquad (3.4.16)$$

Здесь мы вспомнили, что $\varphi = \omega^2 r^2/2$ — центробежный потенциал (см. движение в центральном поле п. 1.13, потенциальная энергия которого равна $U(r) = m\omega^2 r^2/2 = m\varphi(r)$), определяющий поле сил инерции. В силу принципа эквивалентности центробежный потенциал φ — это то же, что и гравитационный потенциал, взятый со знаком «минус»:

$$\varphi_{\text{гр}} = -\frac{\omega^2 r^2}{2}. \tag{3.4.17}$$

Естественно, что (3.4.17) верно только для определенного гравитационного поля, которое можно заменить нашим полем инерции для вращающей сферы. Тогда вообще можно записать изменение частоты в виде

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{3.4.18}$$

Очевидно, что уравнение (3.4.18) можно записать для любого гравитационного поля (не очень сильного). Тогда для гравитационного потенциала Ньютона для материальной точки или шара имеем

$$\varphi(r) = -G\frac{M}{r} \tag{3.4.19}$$

и, подставляя (3.4.19) в (3.4.18), получаем *сдвиг частоты* в гравитационном потенциале:

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = G\frac{M}{c^2 r}. \tag{3.4.20}$$

Такой сдвиг впервые наблюдал У. Адамс в 1924 г., исследуя спектры спутника Сириуса — белого карлика Сириус-В. В лабораторных условиях гравитационное смещение спектральных линий, обусловленное гравитационным полем Земли, было измерено в 1960 г. Р. Паундом и Г. Ребкой, используя Мессбауэровский эффект.

Примечание 40. Уолтер Сидни Адамс (1876–1956), американский астроном, провел первые эксперименты по наблюдению гравитационного красного смещения для белого карлика Сириус-В в 1925 г..

Роберт Вивиан Паунд (1919–2010), американский физик-экспериментатор.

Глен Андерсен Ребка (1931–2015), американский физик.

3.4.5. Элементы теории тяготения Эйнштейна

В специальной теории относительности (СТО) в инерциальной системе отсчета квадрат четырехмерного «расстояния» в пространстве-времени (интервала) между двумя бесконечно близкими событиями записывается:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{3.4.21}$$

Или можно записать:

$$ds^2 = dx_\nu dx^\nu, \tag{3.4.22}$$

где $\nu = 0, 1, 2, 3$, а x^1, x^2, x^3 (x_1, x_2, x_3) — произвольные пространственные координаты; $x^0 = ct$ ($x_0 = ct$) — временная координата; в выражении (3.4.22) и в формулах ниже подразумевается сумма по повторяющимся значкам.

Выражения (3.4.21)–(3.4.22) не изменяются при преобразованиях Лоренца. Пространство-время, в котором можно ввести систему координат так, что в каждой точке ds^2 записывается в виде (3.4.21)–(3.4.22), называется псевдоевклидовым, плоским или пространством-временем Минковского. СТО является теорией физических процессов в таком пространстве.

Если в пространстве-времени Минковского использовать неинерциальные системы отсчета и недекартовы координаты, то в новых координатах квадрат интервала ds^2 запишется в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{3.4.23}$$

где, как и ранее, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. В искривленном пространстве-времени общей теории относительности (в конечных, не малых, областях) уже нельзя ввести декартовы координаты, и использование криволинейных координат становится неизбежным. В конечных областях искривленного пространства-времени ds^2 записывается в криволинейных координатах в общем виде (3.4.23). Зная коэффициенты $g_{\mu\nu}$ как функции 4-координат, можно определить все геометрические свойства пространства-времени. Говорят, что величины $g_{\mu\nu}$ определяют метрику пространства-времени, а совокупность всех величин $g_{\mu\nu}$ называют *метрическим тензором*.

С помощью $g_{\mu\nu}$ вычисляются как темп течения времени в различных точках системы отсчета, так и расстояния между точками в трехмерном пространстве. Так, формула для вычисления бесконечно малого интервала времени $d\tau$ по часам, покоящимся в системе отсчета, имеет вид

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\, dx^0. \tag{3.4.24}$$

Например, в поле тяготения звезды массы M для g_{00} имеем

$$g_{00} = 1 - \frac{2MG}{c^2 r}.$$

Квадрат пространственного расстояния dl^2 определяется следующим образом через пространственные координаты:

$$dl^2 = h_{ik} dx^i dx^k, \tag{3.4.25}$$

где

$$h_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} \tag{3.4.26}$$

и индексы $i, k = 1, 2, 3$.

Математический аппарат, изучающий неевклидову геометрию, или, как говорят, риманову геометрию, в произвольных координатах, — тензорное исчисление. Теория тяготения использует аппарат тензорного исчисления, ее за-

коны записываются в произвольных криволинейных координатах в ковариантном виде.

Основная задача теории тяготения — определение гравитационного поля, что соответствует в теории Эйнштейна нахождению геометрии пространства-времени. Эта последняя задача сводится к нахождению метрического тензора. Уравнения тяготения Эйнштейна связывают величины $g_{\mu\nu}$ с величинами, характеризующими материю, создающую поле. Также записываются уравнения, определяющие геодезические линии в искривленном пространстве-времени, по которым движутся свободные тела (т. е. тела в поле тяготения, но на них не действуют негравитационные силы).

Ряд выводов теории Эйнштейна качественно отличается от выводов ньютоновской теории тяготения. Важнейшие из них связаны с возникновением черных дыр (гравитационный коллапс), гравитационных волн.

Есть ли экспериментальные факты, подтверждающие выводы теории тяготения или общей теории относительности (ОТО)? До недавнего времени к ним относили только четыре экспериментальных факта — подтверждения теории тяготения:

а) гравитационное красное смещение спектральных линий;

б) искривление лучей света гравитационными полями. Так, в 1919 г. Эддингтон и Кроммелин в астрономической экспедиции по исследованию солнечного затмения обнаружили искривление пространства около Солнца;

в) изменение в орбите Меркурия. Происходит смещение перигелия — вращение большой полуоси вытянутой орбиты Меркурия;

г) запаздывание радарного эха. Измерение времени, необходимое для радарного сигнала, чтобы достичь планеты, расположенной на внутренней орбите, и, отразившись, вернуться обратно на Землю.

Однако прогресс в астрофизических исследованиях в последнее время привнес огромное число данных по образованию разнообразных звездных систем и объектов, а также по их эволюции, движению в пространстве. В частности, появились данные о существовании черных дыр, гравитационных волн. Эти данные укладываются в рамки теории тяготения, что с несомненностью подтверждает ее справедливость.

Примечание 41. Артур Стэнли Эддингтон (1882–1944), английский астрофизик и физик.

Эндрю Клод де ля Шеруа Кроммелин (1865–1939), английский астроном.

ГЛАВА 4.
КОЛЕБАНИЯ

4.1. Малые отклонения от положения равновесия. Гармонические колебания

4.1.1 Малые отклонения от положения равновесия

Колебательные процессы играют очень важную роль в природе и во всей нашей жизни. С колебаниями мы встречаемся везде: маятники, пружины, струны, упругие тела в различных средах, строительные конструкции, переменный ток, электромагнитные колебания в контурах и т. д.

Система или тело, находящиеся в положении устойчивого равновесия, при небольших отклонениях возвращаются назад. Устойчивое равновесие отражается в минимуме потенциальной энергии. О такой системе говорят как об *осцилляторе*.

Пусть для простоты имеем одномерное движение в поле с потенциальной энергией $U(x)$ (рис. 4.1.1). Устойчивое равновесие соответствует минимуму потенциальной энергии. Пусть минимум находится в точке $x = 0$, а отсчет потенциальной энергии $U(x)$ происходит от минимального значения $U(0) = 0$. Тогда вблизи точки $x = 0$ потенциальную энергию $U(x)$ можно разложить в ряд Тейлора по степеням x — отклонения от положения равновесия:

$$U(x) = U(0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} \cdot x^2 + \ldots \qquad (4.1.1)$$

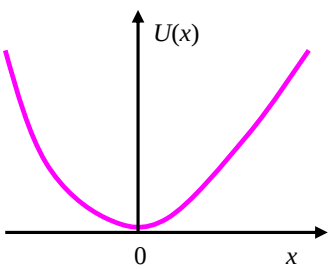


Рис. 4.1.1

Рассматривая малые отклонения от положения равновесия, пренебрегаем высшими степенями x^3, x^4, ... Поскольку в точке $x = 0$ имеем минимум потенциальной энергии, то при этом получаем

$$U(0) = 0, \quad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = 0.$$

Отметим, если $U(0) \neq 0$, то можно всегда ввести потенциальную энергию, отсчитываемую от точки $x = 0$: $U_1(x) = U(x) - U(0)$. Так как имеем минимум

функции $U(x)$, то вторая производная больше нуля: $d^2U/dx^2\big|_{x=0} > 0$. Введем следующее обозначение для значения второй производной в нуле:

$$k \equiv \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0}. \qquad (4.1.2)$$

Коэффициент k носит название *коэффициента упругости*. Тогда потенциальная энергия вблизи положения равновесия имеет вид

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \qquad (4.1.3)$$

Это потенциальная энергия *элементарного*, или *гармонического*, *осциллятора*.

Таким образом, пренебрегая высшими порядками разложения потенциальной энергии вблизи ее минимума, мы получаем движение в поле гармонического осциллятора. Как известно (см. п. 1.9), сила определяется как градиент потенциальной энергии, и для одномерного движения имеем

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\vec{e}_x = -k\vec{x}. \qquad (4.1.4)$$

Это сила носит название *упругой*, или *квазиупругой*, силы независимо от ее природы. Знак «минус» показывает, что эта сила всегда направлена к положению равновесия, т. е. к точке $x = 0$.

Примечание 42. Изначально можно рассматривать силу и раскладывать ее вблизи точки устойчивого минимума:

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{2}F''(0) + \frac{x^3}{3!}F'''(0) + \ldots \qquad (4.1.5)$$

при этом $F(0) = 0$ (в равновесии сила равна нулю), а первая производная от силы в положении равновесия $F'(0) \equiv dF/dx\big|_{x=0} = -d^2U/dx^2\big|_{x=0} = -k$ определяет коэффициент упругости k.

Рассмотрим некоторые примеры колебательного движения.

1. Груз на гладком столе (нет трения) прикреплен к невесомой пружине, закрепленной другим концом к неподвижной стенке (рис. 4.1.2). Возвращающая сила равна

$$F = -k\Delta x,$$

где $\Delta x = (x - x_0)$, k — жесткость пружины. При отклонении от положения равновесия x_0 на величину Δx запасенная потенциальная энергия равна

$$U(\Delta x) = k(\Delta x)^2/2.$$

2. Рассмотрим малые отклонения маятника от положения равновесия (рис. 4.1.3), здесь переменной является угол отклонения φ, отсчитываемый от вертикального направления. Возвращающая сила при малых углах отклонения от положения равновесия равна

$$F = mg\sin\phi \approx mg\varphi. \qquad (4.1.6)$$

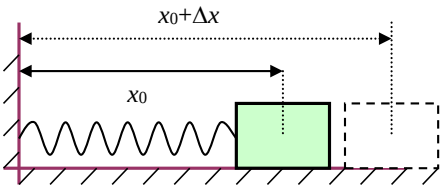


Рис. 4.1.2

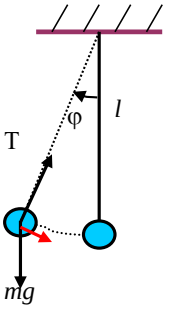


Рис. 4.1.3

Возвращающий момент силы (вектор момента силы направлен из плоскости рис. 4.1.3 на нас) равен:

$$\vec{M} = \left[\vec{l}, m\vec{g}\right];$$
$$M = lmg\sin\varphi \approx lmg\varphi = k\varphi, \tag{4.1.7}$$

где коэффициентом упругости является величина $k = mgl$. Приращение потенциальной энергии и ее запас при отклонении маятника на угол φ равны:

$$dU = -Md\varphi;$$
$$U = k\varphi^2/2.$$

3. Следующий пример: катание шарика без трения на выемке (без проскальзывания). При этом шарик (рис. 4.1.4) совершает поступательное и вращательное движения, что необходимо учитывать при решении задачи. Сила, под действием которой совершаются малые колебания около положения равновесия, равна

$$F = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha,$$

где угол α — угол между горизонтальным направлением и касательной к поверхности выемки.

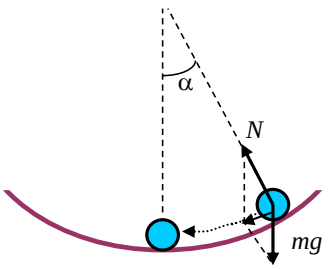


Рис. 4.1.4

4.1.2. Гармонические колебания

Ограничиваясь потенциальной энергией вида (4.1.3) или силой (4.1.4), можно записать одномерное уравнение Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{4.1.8}$$

В механике часто производные по времени от координат обозначают точками над переменной, тогда (4.1.18) перепишем его в виде

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{4.1.9}$$

Окончательно уравнение для нахождения функции $x(t)$ удобно представить в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.1.10}$$

где вводится обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0. \tag{4.1.11}$$

Колебания, описываемые уравнением (4.1.10), называются *гармоническими*, а система, осуществляющая эти колебания, — *линейным*, или *гармоническим, осциллятором*.

Уравнение (4.1.10) — линейное дифференциальное уравнение II порядка. Найдем его решение. В математике общий способ решения линейных уравнений состоит в подстановке и поиске решения в виде

$$x(t) = \exp(\lambda t), \tag{4.1.12}$$

где λ — неизвестная постоянная. Для подстановки в уравнение (4.1.10) находим производные по времени:

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Подставляя вторую производную в уравнение (4.1.10), получаем так называемое *характеристическое* уравнение для нахождения λ:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \tag{4.1.13}$$

Отсюда находим два корня: $\lambda = \pm i\omega_0$, где i — мнимая единица, $i = \sqrt{-1}$. Поскольку оба корня удовлетворяют уравнению (4.1.10), то полное решение уравнения (4.1.10) представляется в виде суперпозиции двух частных решений:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \tag{4.1.14}$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные. Поскольку функция $x(t)$ вещественная, то можно записать

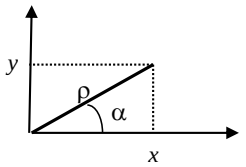
$$\begin{gathered} x(t) = x^*(t) \\ C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} = C_1^* e^{-i\omega_0 t} + C_2^* e^{i\omega_0 t} \end{gathered}. \tag{4.1.15}$$

Отсюда следует, что

$$C_1 = C_2^*, \quad C_2 = C_1^*. \tag{4.1.16}$$

Примечание 43. Комплексное число состоит из двух вещественных чисел x и y, поэтому удобно ввести геометрическую интерпретацию числа: изображать его точкой на плоскости (x, y). Поэтому всякое комплексное число можно записать в двух формах:

$$x + iy = \rho \cdot e^{i\alpha}. \qquad (4.1.17)$$



Модуль комплексного числа ρ и его аргумент α равны соответственно:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\alpha = y/x. \qquad (4.1.18)$$

Представим коэффициенты C_1 и C_2 в соответствии с (4.1.17) в виде:

$$C_1 = C_2^* = \frac{A}{2}e^{i\alpha}, \quad C_2 = C_1^* = \frac{A}{2}e^{-i\alpha}. \qquad (4.1.19)$$

Тогда решение (4.1.14) преобразуется:

$$x(t) = \frac{A}{2}e^{i(\omega_0 t+\alpha)} + \frac{A}{2}e^{-i(\omega_0 t+\alpha)} = \frac{A}{2}\left(e^{i(\omega_0 t+\alpha)} + e^{-i(\omega_0 t+\alpha)}\right) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Итак, общее решение уравнения (4.1.10) может быть записано в виде

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (4.1.20)$$

где A и α — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий.

Вообще решение уравнения гармонических колебаний представляется в различных формах, которые можно использовать в зависимости от удобства применения:

1) $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$ или, что то же самое, $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$, где A, α и φ — произвольные постоянные;

2) $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$, где A и B — произвольные постоянные;

3) комплексная форма

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_1^* e^{-i\omega_0 t} = Ae^{i(\omega_0 t+\alpha)} = A\left[\cos(\omega_0 t + \alpha) + i\sin(\omega_0 t + \alpha)\right],$$

где C_1, A и α — произвольные постоянные. Комплексную форму иногда очень удобно использовать в вычислениях, а затем можно брать реальную или мнимую часть от полученного в конце вычислений выражения, поскольку конечный ответ — вещественная величина:

$$\operatorname{Re} x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad \operatorname{Im} x(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Решение (4.1.20) представлено графически на рисунке 4.1.5. Получаем гармоническое колебание — движение, которое продолжается по времени от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Наибольшее отклонение от положения равновесия A называется *амплитудой колебаний*. Полный угол ($\omega_0 t + \alpha$), стоящий под косинусом (синусом, или в экспоненте), называется *фазой колебаний* (фаза зависит от времени). Угол α — *начальная фаза* колебаний,

ω_0 — *частота гармонических колебаний*. Время одного полного колебания называется *периодом колебаний*. За время, равное периоду, система возвращается в начальное состояние, т. е. в решении происходит изменение фазы на 2π:

$$\omega_0(t+T)+\alpha=\omega_0 t+\alpha+2\pi;$$
$$\omega_0 T=2\pi.$$

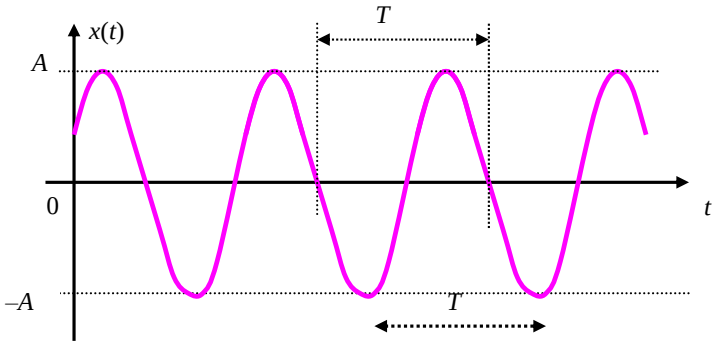


Рис. 4.1.5

Поэтому период колебаний связан с частотой соотношением

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (4.1.21)$$

Можно проследить четкую аналогию гармонических колебаний с равномерным вращением по окружности с постоянной угловой скоростью ω_0. В самом деле, при равномерном вращении по окружности изменение во времени одной координаты x (или y) описывается теми же уравнениями, что и при гармоническом колебании. Поэтому ω_0 часто называют *круговой частотой колебаний*. Круговая частота колебаний ω_0 измеряется в единицах в рад/с, в отличие от обычной частоты колебаний ν, определяемой как число колебаний в единицу времени:

$$\nu=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{T}. \qquad (4.1.22)$$

Частота ν измеряется в герцах: 1 Герц соответствует одному колебанию в секунду: 1 Гц = 1 с$^{-1}$.

4.2. Собственные колебания

4.2.1. Начальные условия колебаний

Собственными называются колебания системы — *осциллятора* — под действием лишь внутренних сил без внешних воздействий. Гармонические колебания, рассмотренные в п. 4.1, представляют собой собственные колебания линейного осциллятора. Однако в принципе собственные колебания могут быть

и негармоническими. Но при достаточно малых отклонениях от положения равновесия (без внешних сил) они сводятся к гармоническим колебаниям. Здесь рассмотрим несколько примеров гармонических собственных колебаний и их характер в зависимости от начальных условий.

Пусть колебания совершаются пружинным маятником, как в примере 1 п. 4.1. Однако, в отличие от предыдущего параграфа, будем отсчитывать координату смещения от положения равновесия груза массой m (см. рис. 4.2.1), а не от места прикрепления (т. е. совершим замену Δx в рис. 4.1.2 на x). Тогда возвращающая сила имеет вид

$$F = -kx, \tag{4.2.1}$$

где k — жесткость пружины, и имеем уравнение (4.1.10) в том же виде, как и ранее:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{4.2.2}$$

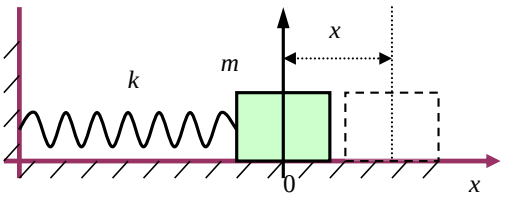


Рис. 4.2.1

При этом частота и период колебаний согласно (4.1.11) и (4.1.21) равны соответственно:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{4.2.3}$$

Решение уравнения (4.2.2) представим в виде (4.1.20):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{4.2.4}$$

Теперь задача состоит в том, чтобы определить константы A и α. Эти константы определяются из *начальных условий* задачи. Пусть в какой-то момент времени (начальный момент) известны отклонение от положения равновесия и скорость тела. Найдем производную по времени от (4.2.4) и получим выражение для колебаний скорости маятника:

$$\dot{x}(t) \equiv v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \tag{4.2.5}$$

Рассмотрим два крайних случая возникновения колебаний.

1. Груз отклонили от положения равновесия на расстояние x_0 и затем отпустили. Математически эти начальные условия запишутся следующим образом. В момент времени $t = 0$ имеем: координата $x(t) = x(0) = x_0$, а скорость

$$v = \dot{x}(0) = 0. \tag{4.2.6}$$

Подставляя начальные условия в (4.2.4) и (4.2.5), получаем уравнения для определения констант:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = A\cos\alpha; \\ \dot{x}(0) &= 0 = -A\omega_0 \sin\alpha. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Из последнего равенства (4.2.7) имеем $\alpha = 0 + \pi n$, где n — целое число. Тогда из верхнего (4.2.7) получаем $A = x_0$. Окончательно решение (4.2.4) имеет вид:

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t.. \quad (4.2.8)$$

Это решение представлено на рисунке 4.2.2.

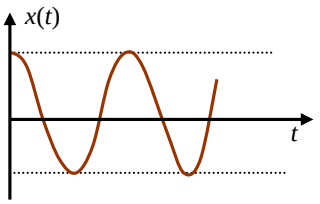


Рис. 4.2.2

2. Пусть в момент времени $t = 0$ телу сообщили (внезапно «ударили» — сообщили импульс) скорость v_0, тогда начальные условия выглядят следующим образом: при $t = 0$ имеем: координата $x = 0$, а скорость

$$v = \dot{x} = v_0. \quad (4.2.9)$$

Подставляя начальные условия (4.2.9) в (4.2.4) и (4.2.5), получаем уравнения для определения констант:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 = A\cos\alpha; \\ \dot{x}(0) &= v_0 = -A\omega_0 \sin\alpha. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Из первого равенства (4.2.10) получаем $\alpha = \pi/2$ (амплитуду А бессмысленно полагать равной нулю — нет решения), тогда амплитуда из второго уравнения (4.2.10) равна $A = -v_0/\omega_0$. Окончательно решение (4.2.4) имеет вид

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t. \quad (4.2.11)$$

Графически это решение представлено на рисунке 4.2.3.

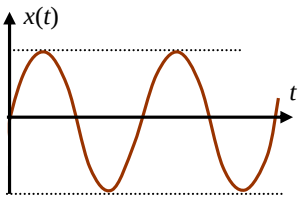


Рис. 4.2.3

Если начальные условия носят более общий характер, чем в рассмотренных выше случаях, то в начальный момент задаются промежуточные координата (между x_0 и 0) и скорость тела.

4.2.2. Математический и физический маятники

Математический маятник — идеализированная система, состоящая из невесомой нерастяжимой нити, на которой подвешена материальная точка массой m (рис. 4.2.4). Пусть вектор $\vec{l}$ направлен от точки подвеса маятника (начало координат) к материальной точке. Маятник отклоняется от положения равновесия на угол φ. В случае плоской траектории движения маятника вектор $\vec{\varphi}$ направлен за плоскость рисунка 4.2.4 (направление по правилу буравчика обозначено крестом в кружочке). Возвращающий момент силы по определению равен

$$\vec{M} = \left[\vec{l}, m\vec{g}\right]$$

и направлен перпендикулярно плоскости чертежа из плоскости на нас, т. е. в противоположную сторону от направления вектора угла $\vec{\varphi}$. Поэтому, если направление, уходящее за плоскость рисунка, принять за положительное, то проекция момента силы отрицательна (по аналогии с возвращающей силой) и равна

$$M = -lmg\sin\varphi. \qquad (4.2.12)$$

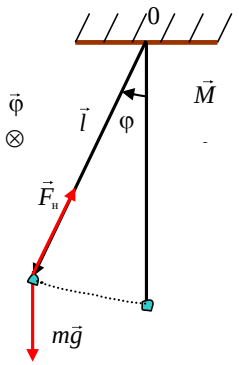


Рис. 4.2.4

Тогда уравнение моментов запишется:

$$I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi, \qquad (4.2.13)$$

где I — момент инерции маятника относительно точки подвеса, $I = ml^2$.

Рассмотрим достаточно малые углы отклонения φ, когда синус угла можно заменить значением угла φ, тогда уравнение имеет вид уравнения гармонических колебаний:

$$\begin{aligned} &I\ddot{\varphi} \approx -mgl\varphi; \\ &\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \end{aligned} \qquad (4.2.14)$$

где квадрат частоты собственных колебаний математического маятника и период соответственно равны:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}; \tag{4.2.15}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{4.2.16}$$

Таким образом, период колебаний математического маятника зависит только от длины подвеса и силы тяжести.

Физический маятник — это колебательная система, когда колеблющееся тело нельзя представить как материальную точку. Колебания возникают тогда, когда точка подвеса не совпадает с точкой центра масс (см. пример на рис. 4.2.5). Возвращающий момент записывается в этом случае точно так же, как и для математического маятника — (4.2.12), да и уравнение колебаний при малых углах отклонения совпадает с уравнением (4.2.14):

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \tag{4.2.17}$$

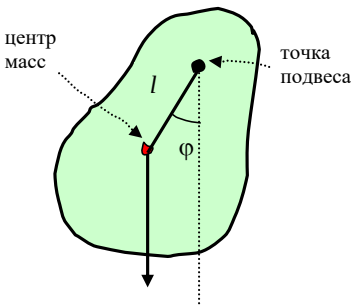


Рис. 4.2.5

Отличие состоит только в том, что момент инерции I не записывается так просто, как для математического маятника, а его нужно вычислять для каждой точки подвеса, поскольку для каждой точки отсчета он различен, и поэтому частота собственных колебаний и период записываются соответственно:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}; \tag{4.2.18}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \tag{4.2.19}$$

Здесь l — расстояние от точки подвеса до центра масс. Из уравнения (4.2.19) видно, что в общем период колебаний физического маятника зависит от точки подвеса.

4.2.3. Энергия гармонических колебаний

При колебаниях энергия системы определяется как кинетической энергией движения, так и потенциальной энергией. Кинетическая энергия вычисляется обычным образом как кинетическая энергия движущегося тела со скоростью v:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2}. \qquad (4.2.20)$$

Подставляя сюда скорость (4.2.5), получаем выражение для кинетической энергии:

$$E_k = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \alpha\right).. \qquad (4.2.21)$$

Из сравнения (4.2.4) и (4.2.21) видно, что кинетическая энергия меняется от максимального значения до нуля с частотой в 2 раза большей обычных амплитудных колебаний. На рисунке 4.2.6 показаны в сравнении графики смещения кинетической и потенциальной энергии в зависимости от времени — колебания построены при начальной фазе, равной нулю ($\alpha = 0$). Максимальное значение кинетической энергии равно

$$\left(E_k\right)_{\max} = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2, \qquad (4.2.22)$$

и достигается это значение, когда система проходит через положение равновесия: $x(t) = 0$. Наоборот, когда отклонение от положения равновесия максимально $x(t) = A$, кинетическая энергия равна нулю.

Примечание 44. Вообще при вычислении кинетической энергии в колебаниях x и m могут иметь совершенно другой смысл, как, например, в электрических колебаниях вместо них имеем q — заряд и L — индуктивность.

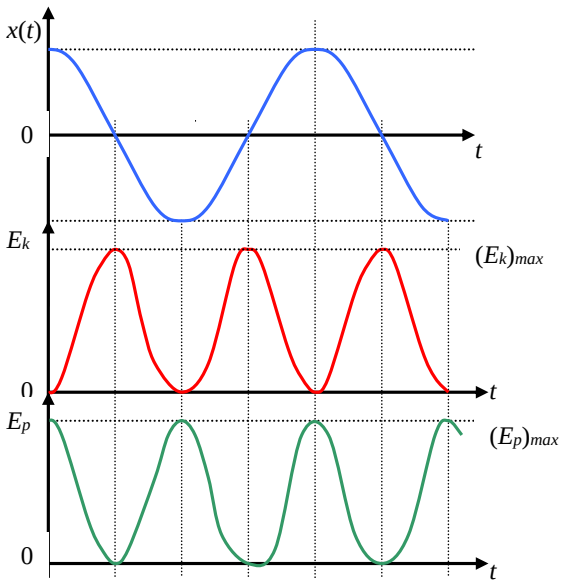


Рис. 4.2.6

Потенциальная энергия осциллятора вычисляется по работе упругой силы:

$$E_p = -\int F dx + \text{const} = \frac{kx^2}{2} + C. \qquad (4.2.23)$$

Будем отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия, т. е. при $x = 0$ имеем $E_p = 0$, и постоянная также равна нулю $C = 0$. Подставляя (4.2.4) в (4.2.23) и коэффициент жесткости из (4.2.3), получаем потенциальную энергию

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega_0 t + \alpha\right) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\cos^2\left(\omega_0 t + \alpha\right). \qquad (4.2.24)$$

Максимальное значение потенциальной энергии совпадает с максимальным значением кинетической энергии по величине:

$$\left(E_p\right)_{\max} = \frac{kA^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2. \qquad (4.2.25)$$

Однако во времени колебания потенциальной энергии происходят в противофазе по отношению к колебаниям кинетической энергии (см. рис. 4.2.6).

Складывая кинетическую и потенциальную энергии, получаем, что выполняется закон сохранения энергии:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\left[\sin^2\left(\omega_0 t + \alpha\right) + \cos^2\left(\omega_0 t + \alpha\right)\right] = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 = \text{const}. \quad (4.2.26)$$

<u>Итак, имеем следующие утверждения</u>.

1. Максимальные значения кинетической и потенциальной энергии совпадают, но достигаются эти значения в разные моменты времени.

2. Полная энергия осциллятора остается постоянной и равной амплитудному значению кинетической или потенциальной энергии. Во время колебаний происходит «перекачка» кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

3. Средняя кинетическая энергия осциллятора равна среднему значению потенциальной энергии. В самом деле, среднее значение энергии за период равно

$$\left\langle E_k \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_k\left(t\right)dt = \frac{mA^2\omega_0^2}{2T}\int_0^T \sin^2\left(\omega_0 t + \alpha\right)dt.. \qquad (4.2.27)$$

Так как

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\omega_0 t + \alpha\right)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega_0 t + \alpha\right)dt = \frac{1}{2},$$

получаем, таким образом, что

$$\left\langle E_k \right\rangle = \left\langle E_p \right\rangle = \frac{1}{4}mA^2\omega_0^2. \qquad (4.2.28)$$

В этом параграфе мы рассматривали одномерное движение или движение с одной степенью свободы — *одномерный осциллятор*. Удобно изображать одномерный осциллятор на плоскости, образованной импульсом p и координатой x. Вообще пространство, образованное координатами (x, y, z) и импульсами (p_x, p_y, p_z) частицы, носит название *фазового пространства*. Такое пространство часто используется для анализа движения частицы или системы тел. Элемент

объема фазового пространства дает положение частицы и значение ее скорости: $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z$ с той точностью, с которой определяются линейные размеры этого объема.

Для одномерного осциллятора мы имеем дело с движением в двумерном фазовом пространстве (x, p). При этом полная энергия может быть представлена в следующем виде:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \text{const}. \qquad (4.2.29)$$

Здесь координата записывается как обычно

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

и соответственно импульс в виде

$$p = m\dot{x} = mA\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Разделив обе части уравнения на полную энергию, приведем это уравнение к следующему виду:

$$\frac{p^2}{\left(\sqrt{2mE}\right)^2} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{2E/m\omega_0^2}\right)^2} = 1. \qquad (4.2.30)$$

Уравнение (4.2.30) есть не что иное, как уравнение эллипса в фазовом пространстве (x, p):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

со следующими полуосями (см. рис. 4.2.7):

$$a = x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \text{ и } b = p_{\max} = \sqrt{2mE}. \qquad (4.2.31)$$

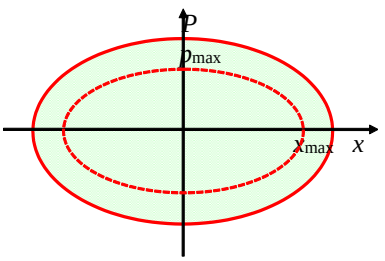


Рис. 4.2.7

Траектория в этом пространстве, определяемая функцией $H(p, x) = E =$ $= \text{const}$, — *фазовая траектория*. *Элемент фазового «объема»* в этом двумерном фазовом пространстве равен $\Delta V = \Delta p \cdot \Delta x$. Полный фазовый «объем» равен площади эллипса:

$$S = \pi ab = \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \cdot \sqrt{2mE} = 2\pi\frac{E}{\omega_0} = ET\ . \qquad (4.2.32)$$

Отметим здесь важный момент: при медленном изменении параметров колеблющейся системы (например, величины k) площадь остается постоянной:

$$ET = \text{const} \quad \text{или} \quad E = \text{const}\cdot\omega_0\,. \qquad (4.2.33)$$

При этом получаем так называемые *адиабатические* инварианты для гармонического осциллятора (см.: Д. В. Сивухин, т. 1, с. 223). *Адиабатический инвариант* — физическая величина, которая не меняется при плавном, «адиабатическом», изменении некоторых параметров физической системы. Адиабатичность изменения параметра означает, что характерное время этого изменения гораздо больше характерного времени процессов, происходящих в самой системе.

Смысл этих инвариантов (4.2.33) состоит в следующем: при медленном изменении параметров осциллятора его энергия меняется пропорционально частоте.

4.2.4. Ангармоничные колебания

Если в разложении для силы (4.1.5) из п. 4.1 наряду с линейным членом $xF'(0)$ существен также и следующий член, например

$$\frac{1}{2}x^2F''(0) = \alpha x^2\,,$$

тогда вместо уравнения гармонических колебаний получим следующее уравнение движения:

$$m\ddot{x} = -kx + \alpha x^2\,,$$

которое удобно записывать в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\omega_0^2 x^2\,. \qquad (4.2.34)$$

Здесь параметры уравнения записываются:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad \varepsilon = \frac{F''(0)}{2m\omega_0^2} = -\frac{F''(0)}{2F'(0)}\,.$$

Появление дополнительных членов в уравнении колебания приводит к *негармоничности* колебаний (*ангармоничность*). В частности, слагаемое, пропорциональное $\sim x^2$, приводит к появлению в колебаниях члена с удвоенной частотой $2\omega_0$, называемого второй гармоникой. Обычно ε является малой добавкой и представляет собой параметр малости, по которому можно провести разложение. Если учитывать следующие малые поправки, то в решении получаются более высокие гармоники ($n\omega_0$). Появление высших гармоник и есть ангармоничность колебаний.

4.3. Сложение колебаний

4.3.1. Векторная диаграмма. Сложение колебаний одинаковой частоты

Удобно использовать наглядное изображение колебаний с помощью *векторных диаграмм*. Введем ось x и отложим вектор $\vec{A}$, определяющий амплитуду колебаний, из точки 0 под углом α, в соответствии с записью гармонических колебаний (рис. 4.3.1):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{4.3.1}$$

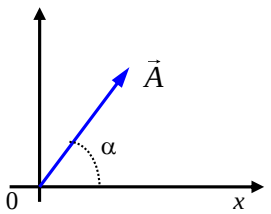


Рис. 4.3.1

При этом можно считать, что зависимость от времени проявляется в том, что фаза $(\omega_0 t + \alpha)$ растет линейно со временем, а соответственно вектор $\vec{A}$ вращается с угловой скоростью ω_0. Тогда зависимость проекции $\vec{A}$ на ось x от времени t определяется формулой (4.3.1). Это рассмотрение аналогично представлению комплексных чисел на плоскости, когда реальная часть комплексного числа определяется точкой на оси x.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω_0 и одного направления:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1); \\ x_2(t) &= A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Используя геометрическую интерпретацию колебаний, изображенных на рисунке 4.3.2, удобно получить суммарное колебание как сложение векторных амплитуд отдельных колебаний $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ и их проекций на ось x: $x = x_1 + x_2$. Из теоремы косинусов имеем:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\varphi = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{4.3.3}$$

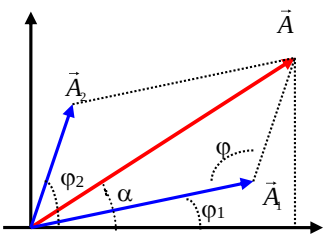


Рис. 4.3.2

Итак, в результате сложения этих колебаний получаем для полного колебания следующее выражение:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{4.3.4}$$

где амплитуда и начальная фаза определяются:

$$\begin{cases} A = \left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right)^{1/2} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}. \tag{4.3.5}$$

Эти же формулы можно было получить из простых тригонометрических преобразований, складывая уравнения (4.3.2). Отметим, *максимальная амплитуда* получается при *равных* начальных фазах колебаний $\varphi_1 = \varphi_2$:

$$A = A_1 + A_2,$$

т. е. при синфазных колебаниях, в то время как *минимальная амплитуда* — при разности начальных фаз $(\varphi_1 - \varphi_2) = \pm\pi$:

$$A = A_1 - A_2,$$

когда колебания происходят в противофазе.

Итак, получаем следующий вывод: *суммой гармонических колебаний одинаковой частоты является гармоническое колебание с той же частотой*, а амплитудой и фазой, определяемыми формулами (4.3.4)–(4.3.5).

4.3.2. Сложение гармонических колебаний с близкими частотами. Биения

Рассмотрим два колебания одного направления, частоты которых ω_1 и ω_2 различны. Как следует из векторной диаграммы на рисунке 4.3.2, поскольку $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с разной угловой скоростью, то при их сложении в результирующем колебании возникают зависимости амплитуды и частоты от времени. Получаем в результате сложения *негармоническое колебание*, для которого, строго говоря, уже нельзя вводить понятия амплитуды и частоты.

Наибольший интерес вызывает случай, когда разность частот складывающихся колебаний $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ мала:

$$\Delta\omega << \omega_1, \omega_2. \tag{4.3.6}$$

Итак, рассмотрим два колебания:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}. \tag{4.3.7}$$

Пусть для определенности $A_1 > A_2$ и система координат вращается вместе с вектором $\vec{A}_1$ с угловой скоростью ω_1. Тогда в некоторый момент времени имеем следующую картину, представленную на рисунке 4.3.3: $\vec{A}_1$ находится под углом

φ_1 к горизонтальной оси. Тогда относительно вектора $\vec{A}_1$ вектор $\vec{A}_2$ вращается вокруг конца вектора $\vec{A}_1$ с угловой скоростью $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, т. е. достаточно медленно по сравнению с частотами ω_1, ω_2.

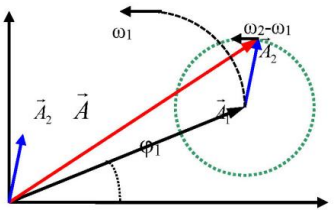


Рис. 4.3.3

Для упрощения задачи пусть амплитуды складывающихся колебаний равны $A_1 = A_2$, и начало отсчета введем в момент времени t, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (всегда можно перенести начало отсчета времени). Таким образом, будем складывать следующие колебания:

$$x_1(t) = A\cos\omega_1 t; \qquad x_2(t) = A\cos(\omega_1 + \Delta\omega)t. \tag{4.3.8}$$

Сложим (4.3.8):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\left[\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t\right] =$$
$$= 2A\cos\frac{(\omega + \Delta\omega)t - \omega t}{2}\cos\frac{(\omega + \Delta\omega)t + \omega t}{2}$$

и, так как разность частот мала $\Delta\omega << \omega$, получаем окончательно:

$$x(t) \approx 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot \cos\omega t. \tag{4.3.9}$$

Фаза ωt меняется со временем значительно быстрее, чем фаза $\Delta\omega t/2$, и поэтому медленно меняющийся со временем косинус $\cos(\Delta\omega t/2)$ можно отнести к амплитуде $2A$. Таким образом, получаем амплитуду, пульсирующую во времени:

$$a(t) = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|. \tag{4.3.10}$$

Эта амплитуда «вырезает» область на оси x (пунктирные линии на рис. 4.3.4), которая ограничивает колебания с частотой, близкой к ω. Такие колебания называются *биениями* (см. рис. 4.3.4). Для складывающихся колебаний с равными амплитудами $A_1 = A_2$ максимальное значение амплитуды биений равно $2A$, минимальное — 0. Частота биений Ω — медленная частота, определяется соотношением

$$\Omega = |\omega_2 - \omega_1| = \Delta\omega. \tag{4.3.11}$$

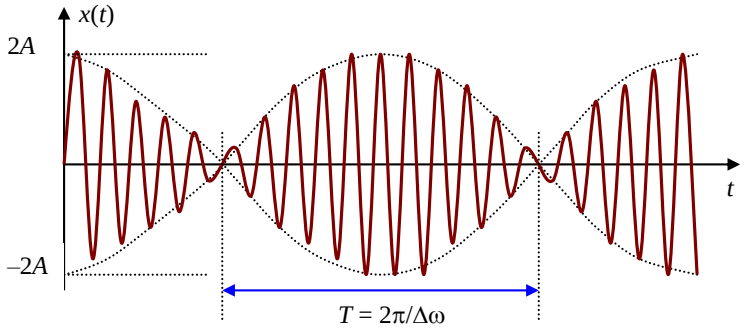


Рис. 4.3.4

Частота Ω в 2 раза больше, чем следует из (4.3.10), так как области заполнения появляются на каждый полупериод. Период биений также в 2 раза меньше времени полного колебания из (4.3.10) и равен

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \qquad (4.3.12)$$

Если амплитуды складывающихся колебаний не одинаковы, т. е. $A_2 \neq A_1$, тогда амплитуда биений не обращается в 0 (см. рис. 4.3.5), а достигает своего минимального $|A_2 - A_1|$ и максимального $|A_2 + A_1|$ значений. Огибающая биений периодически изменяется со временем с той же частотой Ω, определяемой (4.3.11).

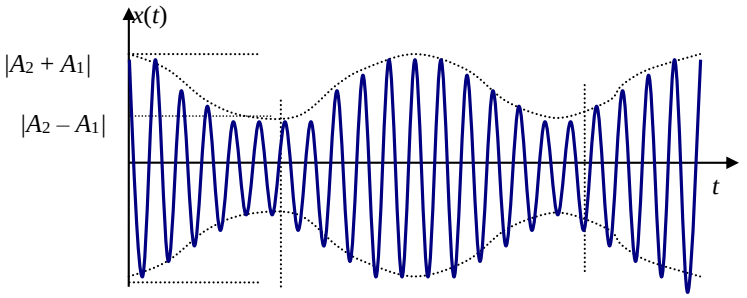


Рис. 4.3.5

4.3.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим сложение двух колебаний, направленных вдоль осей *x* и *y*. Результирующая траектория конца вектора результирующего колебания — плоская кривая, ее форма зависит от частот складывающихся колебаний и от разности их фаз Δφ.

1. Рассмотрим сначала случай одинаковых частот $\omega_1 = \omega_2$.

$$x = A\cos\omega t, \quad y = B\cos(\omega t + \varphi), \qquad (4.3.13)$$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Чтобы получить траекторию движения материальной точки, определяемую уравнениями (4.3.13), исключим из них время t. Из первого уравнения (4.3.13) имеем:

$$\cos\omega t = \frac{x}{A}, \quad \sin\omega t = \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}},,$$

и подставим во второе уравнение для y, предварительно разложив косинус суммы углов:

$$y = B\left(\cos\omega t\cdot\cos\varphi - \sin\omega t\cdot\sin\varphi\right) = B\left(\frac{x}{A}\cos\varphi - \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\cdot\sin\varphi\right).$$

Преобразуем последнее равенство к виду

$$\frac{x}{A}\cos\varphi - \frac{y}{B} = \sin\varphi\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}.$$

Возводя в квадрат, получаем окончательно:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi. \qquad (4.3.14)$$

Это *уравнение эллипса*, оси которого произвольно ориентированы относительно осей x и y.

Рассмотрим частные случаи уравнения (4.3.14) и определим для них траектории движения колеблющейся материальной точки.

А. Пусть разность фаз $\varphi = 0$, тогда для траектории колеблющегося тела получаем прямую линию, проходящую через начало координат (рис. 4.3.6*а*):

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0, \qquad y = \frac{B}{A}x. \qquad (4.3.15)$$

Таким образом, получаем гармоническое колебание с амплитудой $\sqrt{A^2+B^2}$.

Б. Пусть разность фаз $\varphi = \pm\pi$, тогда получаем тоже прямую линию и гармоническое колебание с той же амплитудой, но только прямая проходит через другие квадранты (рис. 4.3.6*б*):

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0, \qquad y = -\frac{B}{A}x. \qquad (4.3.16)$$

В. Рассмотрим разность фаз, равную $\varphi = \pm\pi/2$, тогда получаем эллипс, ориентированный по осям x и y (рис. 4.3.6*в*):

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \qquad (4.3.17)$$

При этом движение колеблющегося тела (траектория маятника) совершается по часовой стрелке при разности фаз $\varphi = \pi/2$, и против часовой стрелки при разности фаз $\varphi = -\pi/2$.

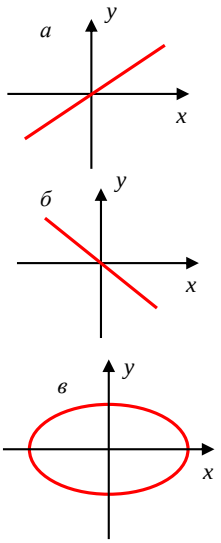


Рис. 4.3.6

При тех же разностях фаз и одинаковых амплитудах складывающихся взаимно перпендикулярных колебаний получаем равномерное движение по окружности.

2. Рассмотрим разные частоты складывающихся взаимно перпендикулярных колебаний ω_1 и ω_2:

$$x(t) = A\cos\omega_1 t;$$
$$y(t) = B\cos(\omega_2 t + \varphi).$$

А. Если частоты разные и их отношение не равно отношению целых чисел $\omega_1/\omega_2 \neq n/m$ (n, m — целые числа), то траектория результирующего колебания не является замкнутой кривой. Если при этом частоты ω_1 и ω_2 близки по величине $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_1, \omega_2$, то траектория колебаний меняется постепенно. В самом деле, сложим следующие колебания:

$$x(t) = A\cos\omega t;$$
$$y(t) = B\cos(\omega t + (\Delta\omega t + \varphi)), \qquad (4.3.18)$$

где разность фаз этих колебаний $\Delta\omega = (\Delta\omega t + \varphi)$ является медленно меняющейся величиной по сравнению с ω_1, ω_2. При этом разность фаз колебаний проходит с небольшой скоростью все возможные значения, и, следовательно, траектория результирующих колебаний не является замкнутой, она меняется непрерывным образом и проходит все те частные случаи, о которых говорилось в п. 1 этого пункта.

Б. Если частоты ω_1 и ω_2 кратны:

$$\omega_1 = n\omega_2 \quad \text{или} \quad \omega_2 = n\omega_1,$$

где n — целое число, то получаем замкнутые фигуры траектории, которые носят название *фигур Лиссажу*.

Рассмотрим в качестве примера соотношение частот, равное $\omega_1/\omega_2 = ½$, т. е. по оси *y* колебания происходят чаще в 2 раза, чем по оси *x*. На рисунке 4.3.7 приведены две траектории, соответствующие суммам перпендикулярных колебаний с разностями фаз $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 0$. При промежуточных разностях фаз складывающихся колебаний получаем замкнутые кривые, занимающие промежуточные траектории между этими двумя предельными случаями.

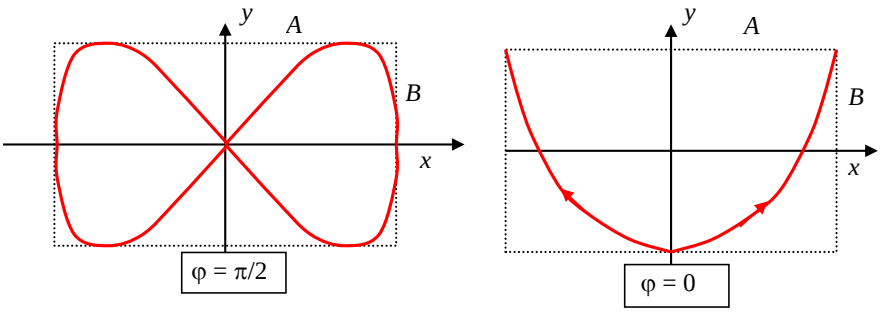


Рис. 4.3.7

При других кратностях частот $\omega_1 = n\omega_2$ происходит движение по замкнутой траектории с многократными пересечениями осей в пределах пространства, ограниченного амплитудами *A* и *B*. Фигуры Лиссажу хорошо могут быть видны на осциллографе при подаче на вход *x* и *y* двух периодических сигналов, кратных по частоте.

Отметим, что в принципе замкнутые траектории получаются при любом рациональном отношении частот $\omega_1/\omega_2 = n/m$ (*n*, *m* — целые числа).

Примечание 45. Жюль Антуан Лиссажу (1822–1880), французский физик.

4.3.4. Разложение в спектр периодических функций

Суммированием, или, иначе, суперпозицией гармонических колебаний, можно получить любую периодическую функцию времени. Верно и обратное, любое сложное колебание — периодическая функция времени — может быть разложено в ряд по гармоническим колебаниям различных частот. Такое разложение называется разложением в *ряд Фурье* и определяет *спектр сложного колебания*.

Если имеем дело с непериодической функцией времени, то оказывается, что и она может быть представлена в виде интеграла по периодическим функциям. Такое разложение называется разложением в *интеграл Фурье*. Возможность разложения в ряд Фурье или интеграл Фурье есть следствие общей математической теоремы о разложении любой функции в ряд или интеграл по полному набору ортонормированных функций.

Например, рассмотрим периодический сигнал, состоящий из прямоугольных импульсов (рис. 4.3.8), с периодом $T = 2\tau$. Разложение для подобного колебания выглядит следующим образом:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\omega nt + b_n \sin\omega nt\right). \qquad (4.3.19)$$

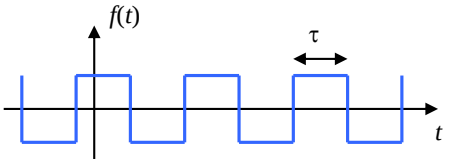


Рис. 4.3.8

Здесь $\omega = 2\pi/T$, а a_n и b_n — амплитуды слагаемых гармонических колебаний, которые определяются как интегралы:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt\,; \tag{4.3.20}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt; \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Из интегралов (4.3.21)–(4.3.22) получаем амплитуды a_n и b_n колебаний с соответствующими частотами $n\omega$. При этом говорят, что совокупность значений a_n и b_n составляет *спектр данного колебания* или сигнала. Для периодического сигнала спектр дискретный, кратный частоте ω.

Аналогичным образом получается спектр для непериодической функции времени. Только вместо бесконечного ряда Фурье (4.3.19) записывается интеграл Фурье по частоте, при этом амплитуды $a(\omega)$ и $b(\omega)$ являются непрерывными функциями частоты. Таким образом, получаем непрерывный характер спектра разложения.

4.4. Затухающие колебания

4.4.1. Уравнение и общее решение уравнения затухающих колебаний

До сих пор рассматривали собственные колебания без воздействия внешних сил, поэтому это были незатухающие колебания, так как амплитуда и, следовательно, полная энергия колебаний не менялись. Однако в реальности амплитуда и энергия колебаний уменьшаются, так как существует трение (или сопротивление), на преодоление которого затрачивается работа, и колебания без внешней силы, поддерживающей эти колебания, затухают. Такие колебания называются затухающими.

Напишем уравнение движения при наличии силы трения. Наиболее распространенный вид трения, когда сила трения пропорциональна скорости движения $F_{\text{тр}} \sim v = \dot{x}$ (в этом случае иногда говорят о наличии жидкого трения).

Итак, из второго закона Ньютона для одномерного движения имеем следующее уравнение движения:

$$m\ddot{x} = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}} = -kx - r\dot{x}\,, \tag{4.4.1}$$

где r — коэффициент сопротивления или трения, а сила упругости, как обычно, равна $F_{\text{упр}} = -kx$. Перенося все слагаемые в одну сторону и разделив уравнение (4.4.1) на массу тела, получаем *уравнение затухающих колебаний*:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{4.4.2}$$

где ввели следующие обозначения: квадрат собственной частоты колебаний, как и ранее:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{4.4.3}$$

и коэффициент затухания γ:

$$\gamma = \frac{r}{2m}\,. \tag{4.4.4}$$

Как и ранее ищем решение уравнения (4.4.2) в виде: $x = e^{\lambda t}$. Вычислим первые и вторые производные по времени $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ и $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, подставим их в уравнение (4.4.2) и получим *характеристическое уравнение* для определения постоянной λ:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0\,. \tag{4.4.5}$$

Находим корни уравнения (4.4.5), которые равны:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,. \tag{4.4.6}$$

Будем пока считать, что затухание мало (иначе вообще не будет колебаний, как мы увидим далее), т. е. $\gamma < \omega_0$, и введем частоту ω_1 — *частоту затухающих колебаний*:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,. \tag{4.4.7}$$

Тогда корни характеристического уравнения записываются:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega_1\,. \tag{4.4.8}$$

Общее решение записываем, как и ранее, в виде:

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + C_2 e^{(-\gamma - i\omega_1)t} = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\right). \tag{4.4.9}$$

Выражение в скобках (4.4.9), как и в § 4.1, можно представить в виде косинуса или синуса:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \alpha)\,. \tag{4.4.10}$$

Уравнение (4.4.10) представляет собой общее решение уравнения затухающих колебаний. Здесь α — начальная фаза; A — начальная амплитуда, кото-

рые определяются из начальных условий. Решение (4.4.10) можно также представить в комплексной форме.

4.4.2. Свойства и характеристики затухающих колебаний

В общем решении (4.4.10), когда ω_1 вещественно, присутствует «гармонический» множитель $\cos(\omega_1 t + \alpha)$, но при этом полное колебание не является периодическим и гармоническим. Это связано с тем, что имеется *затухающая амплитуда*:

$$A(t) = A \cdot \exp(-\gamma t). \tag{4.4.11}$$

Скорость затухания колебаний определяется коэффициентом затухания γ. Коэффициент затухания $\gamma = r/2m$ иногда называют *декрементом затухания*, а определяемую (4.4.7) частоту ω_1 — *частотой затухающих колебаний*. Период затухающих колебаний равен соответственно:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \tag{4.4.12}$$

Пример затухающего колебания показан на рисунке 4.4.1.

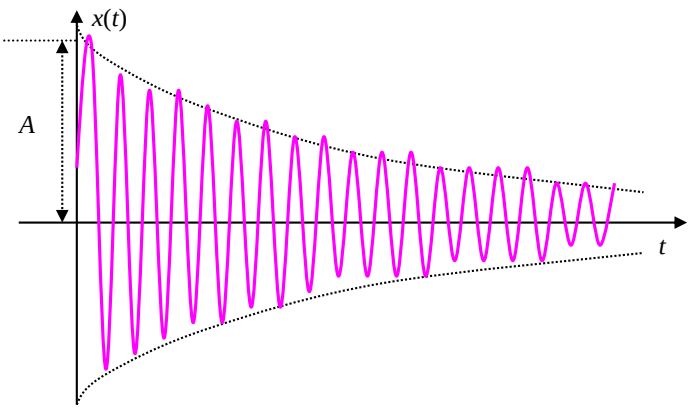


Рис. 4.4.1

Отметим еще одну особенность, отличающую затухающие колебания от гармонических. Так, достигаемый в затухающих колебаниях максимум смещения не совпадает со значением амплитуды в этот момент времени (которая падает по экспоненте), что можно увидеть из рисунка 4.4.2.

Часто декрементом затухания называют отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимися на период:

$$D = e^{\gamma T} = \frac{A(t)}{A(t+T)}. \tag{4.4.13}$$

Амплитуда колебаний уменьшается в e раз за время

$$\tau = 1/\gamma. \tag{4.4.14}$$

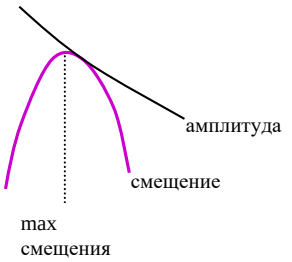


Рис. 4.4.2

Это время τ называется *временем затухания*. *Логарифмический декремент затухания* λ определяется как логарифм отношения амплитуд за период:

$$\lambda = \gamma T = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}. \qquad (4.4.15)$$

За время затухания τ амплитуда падает в *e* раз, и система успевает совершить за это время

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\lambda} \qquad (4.4.16)$$

колебаний. Тогда логарифм отношения амплитуд:

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \ln e = 1 = \gamma\tau = \frac{\lambda}{T}\tau = \lambda N_e;$$
$$\lambda = \frac{1}{N_e}. \qquad (4.4.17)$$

Откуда получаем, что логарифмический декремент затухания есть величина, обратная числу колебаний N_e, за которое амплитуда падает в *e* раз. Это дает наглядное представление о логарифмическом декременте затухания. Пусть λ = = 0.01, тогда колебания примерно затухают через 100 колебаний, т. е. их амплитуда упадет в *e* раз после такого количества колебаний. Иногда вводят понятие *добротности* колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\gamma T} = \pi N_e. \qquad (4.4.18)$$

Добротность обратно пропорциональна скорости затухания собственных колебаний в системе. Чем выше добротность колебательной системы, тем меньше потери энергии за каждый период и тем медленнее затухают колебания.

Все вышерассмотренные параметры характеризуют колебательную систему.

4.4.3. Апериодическое движение

До сих пор мы рассматривали случаи, когда трение достаточно мало и, следовательно, $\gamma^2 < \omega_0^2$. Однако при увеличении трения период колебаний си-

стемы увеличивается, а при достаточно большом трении движение вообще перестает быть колебательным.

Условие для прекращения колебаний есть равенство: $\gamma = \omega_0$. Последнее соотношение при учете (4.4.3) и (4.4.4) приводит к условию для коэффициента сопротивления, при котором колебания прекращаются:

$$r = 2\sqrt{km}\,. \tag{4.4.19}$$

При $\gamma > \omega_0$ решение уравнения (4.4.2) имеет другой вид и описывает *апериодическое* движение системы. В самом деле, вместо условия (4.4.8) теперь имеем следующее:

$$\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \pm i\delta \quad \text{или} \quad \delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,, \tag{4.4.20}$$

и общее решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma-\delta)t} + C_2 e^{(-\gamma+\delta)t} = C_1 e^{-(\gamma+\delta)t} + C_2 e^{(\delta-\gamma)t}\,. \tag{4.4.21}$$

Коэффициенты C_1 и C_2 находятся также из начальных условий для смещения и скорости.

Примеры решений (4.4.21) при различных коэффициентах C_1 и C_2 представлены на рисунке 4.4.3*а–в*. Решение имеет затухающий характер, колебания не происходят. Более того, система не возвращается в изначальное положение равновесия, обусловленное отсутствием трения. Максимум, чего может достичь такая система, — это однократное прохождение через начальное положение равновесия.

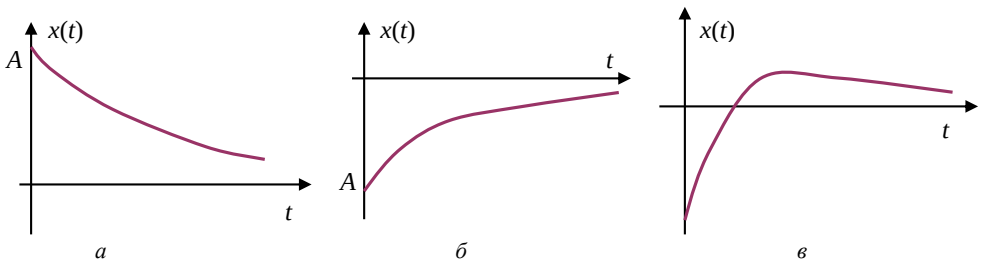


Рис. 4.4.3

4.5. Вынужденные колебания

4.5.1. Полное решение уравнения вынужденных колебаний

Наряду с трением колебательная система — *линейный осциллятор* — может подвергаться воздействию внешней силы $F(t)$. Пусть внешняя сила $F(t)$ действует в направлении оси x. Тогда уравнение Ньютона записывается:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F(t)\,. \tag{4.5.1}$$

Характер движения изменяется в зависимости от особенностей действующей силы.

Рассмотрим наиболее важный случай, когда внешняя сила изменяется по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cos\omega t, \tag{4.5.2}$$

где F_0 — амплитуда силы; ω — частота вынуждающей силы. Колебания, совершаемые системой под действием внешней периодической силы, называются *вынужденными*, а уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t = f_0 \cos\omega t, \tag{4.5.3}$$

где $f_0 \equiv F_0/m$. Получили неоднородное дифференциальное уравнение II порядка.

Как решить это уравнение? В курсе математики доказывается теорема, что решение неоднородного дифференциального уравнения есть *сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения*.

Однородное уравнение, имеющее вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.5.4}$$

мы уже решали в п. 4.4 (см. уравнения (4.4.2)–(4.4.10)) и получили его общее решение в виде (4.4.10). Оно, как и ранее, описывает затухающие собственные колебания системы.

При учете воздействия внешней силы $F(t) = F_0 \cos\omega t$ логично предположить, что система будет также испытывать колебательное движение с частотой вынуждающей силы. Поэтому частное решение неоднородного уравнения (4.5.3) ищем в виде

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi), \tag{4.5.5}$$

где ω — частота вынуждающей силы; A — амплитуда; φ — начальная фаза этих колебаний. Теперь задача состоит в том, чтобы определить параметры A и φ. Подставим (4.5.5) в уравнение (4.5.3), сосчитав производные:

$$\begin{gathered} \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \varphi), \quad \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \varphi); \\ -A\omega^2\cos(\omega t - \varphi) - 2\gamma A\omega\sin(\omega t - \varphi) + A\omega_0^2\cos(\omega t - \varphi) = f_0\cos\omega t. \end{gathered} \tag{4.5.6}$$

Преобразуем правую часть уравнения (4.5.6) и приведем ее к сумме членов с $\cos(\omega t - \varphi)$ и $\sin(\omega t - \varphi)$:

$$\cos\omega t = \cos(\omega t - \varphi + \varphi) = \cos(\omega t - \varphi)\cos\varphi - \sin(\omega t - \varphi)\sin\varphi. \tag{4.5.7}$$

Подставим соотношение (4.5.7) в уравнение (4.5.6) и учтем, что полученное равенство должно быть справедливо в любой момент времени t. Функции $\cos(\omega t - \varphi)$ и $\sin(\omega t - \varphi)$ имеют разную зависимость от времени (или, как говорят, они независимы). Например, в момент времени, когда косинус равен нулю, синус равен единице. Это означает, что коэффициенты при слагаемых с $\cos(\omega t - \varphi)$ и $\sin(\omega t - \varphi)$ в правой и левой частях уравнения должны быть рав-

ны друг другу отдельно. Тогда получаем следующую систему уравнений для определения неизвестных параметров A и φ:

$$\begin{cases} -A\omega^2 + A\omega_0^2 = f_0 \cos\varphi; \\ 2\gamma A\omega = f_0 \sin\varphi. \end{cases} \tag{4.5.8}$$

Делим второе уравнение в (4.5.8) на первое и определяем начальную фазу φ:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{4.5.9}$$

Возводим первое и второе уравнения (4.5.8) в квадрат и затем сложим:

$$f_0^2 = A^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2 A^2\omega^2.$$

Откуда находим амплитуду вынужденных колебаний:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \tag{4.5.10}$$

После того как определили коэффициенты частного решения, можно записать полное решение уравнения вынужденных колебаний (4.5.3) как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\cos\left(\omega_1 t + \alpha\right) + \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right), \tag{4.5.11}$$

где A_0 и α — произвольные постоянные, значения которых находятся из начальных условий так же, как это было в п. 4.2, 4.4.

4.5.2. Переходный режим и установившиеся колебания

Анализируя решение (4.5.11), можно ввести два временных отрезка при рассмотрении колебаний системы.

Переходный режим — процесс установления колебаний, при котором первое слагаемое дает еще существенный вклад в решение $x(t)$.

При больших временах t от момента начала колебаний имеем дело с *установившимися колебаниями*. В самом деле, при $t \to \infty$ первое слагаемое в (4.5.11) обращается в нуль и сохраняется только «гармоническое» колебание с частотой вынуждающей силы. Это колебание можно считать гармоническим, если можно пренебречь начальным периодом по сравнению с продолжительностью установившихся колебаний. Причем это установившееся колебание не зависит от начальных условий.

Типичный пример установления колебаний изображен на рисунке 4.5.1, где показано возникновение колебаний под действием внешней силы при условии, что в начальный момент колебания отсутствовали. Отметим, что до установления колебаний нельзя говорить об определенной частоте этих колебаний.

Продолжительность переходного периода определяется временем затухания собственных колебаний:

$$\tau = \frac{1}{\gamma}. \tag{4.5.12}$$

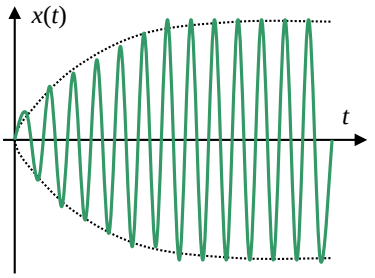


Рис. 4.5.1

Установившиеся вынужденные колебания — колебания при достаточно больших временах t, когда собственные колебания в системе затухают $\exp(-\gamma t) \to 0$. Тогда получаем решение в виде

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi), \tag{4.5.13а}$$

где амплитуда и фаза определяются соотношениями:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \tag{4.5.13б}$$

В итоге в установившемся режиме $t >> \tau$ получаем гармоническое колебание с частотой, равной частоте вынуждающей силы.

4.5.3. Амплитудно-частотная характеристика. Резонанс

Проанализируем зависимость амплитуды вынужденных колебаний A от частоты вынуждающей силы. Кривая, описывающая зависимость амплитуды A вынужденных установившихся колебаний от частоты внешней силы, называется *амплитудно-частотной характеристикой*. На рисунке 4.5.2 представлен ряд амплитудно-частотных характеристик при различных значениях коэффициента затухания γ.

При некоторой частоте амплитуда вынужденных колебаний (4.5.10) достигает максимума. Явление, при котором амплитуда колебаний резко возрастает, называется *явлением резонанса*. Максимум амплитуды (4.5.10) определяется минимумом знаменателя. Для определения резонансной частоты ω_r вычисляем производную знаменателя по частоте ω и приравниваем ее нулю:

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right]=0\,; \qquad (4.5.14)$$

$$2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left(-2\omega\right)+8\gamma^2\omega=0\,.$$

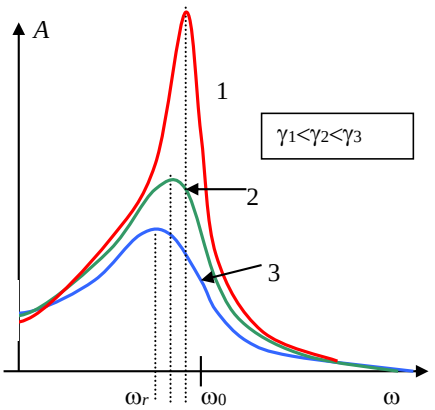


Рис. 4.5.2

Отсюда при вычислении ($\omega \neq 0$) получаем *резонансную частоту*, при которой амплитуда достигает максимального значения:

$$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}\,. \qquad (4.5.15)$$

Рассчитаем амплитуду колебаний в максимуме:

$$A(\omega_r)=\frac{F_0/m}{\sqrt{4\gamma^4+4\gamma^2\left(\omega_0^2-2\gamma^2\right)}}=$$
$$=\frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}=\frac{F_0/m}{2\gamma\omega_1}. \qquad (4.5.16)$$

Итак, получаем, чем меньше коэффициент затухания γ, тем ближе резонансная частота ω_r к частоте собственных колебаний ω_0, тем выше значение амплитуды в максимуме. На рисунке 4.5.2 изображены резонансные кривые при различных значениях коэффициента затухания γ. Из рисунка можно определить, как с уменьшением коэффициента затухания γ резонансная кривая становится более узкой, а величина максимума амплитуды выше. В принципе в системе без затухания ($\gamma = 0$) резонансная частота совпадает с собственной частотой колебаний ω_0 (при этом тоже $\omega_1 \to \omega_0$), а амплитуда колебаний в резонансе стремится к бесконечности.

Производная по времени от смещения (4.5.13) определяет колебания скорости линейного осциллятора. Скорость при некоторой частоте также достигает максимума — *резонанс скорости*. Колебания скорости определяются уравнением

$$v = \dot{x}(t) = -\frac{\omega \cdot F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \qquad (4.5.17)$$

Найдем максимум амплитуды скорости. Для этого разделим числитель и знаменатель амплитуды на частоту, и тогда видно, что максимум достигается при минимуме знаменателя следующего выражения:

$$\frac{\omega F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4\gamma^2}}.$$

Таким образом, *резонансная частота скорости* совпадает с частотой собственных колебаний:

$$\omega_{r,v} = \omega_0. \qquad (4.5.18)$$

Вернемся к амплитудно-частотной характеристике. Энергия колебаний E пропорциональна квадрату амплитуды A^2. Возведем (4.5.10) в квадрат и перейдем к записи амплитуды через резонансную частоту ω_r:

$$A^2 = \frac{F_0^2/m^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = \frac{F_0^2/m^2}{\omega^4 - 2\omega^2\left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right) + \omega_0^4} = \frac{F_0^2/m^2}{\left(\omega^2 - \omega_r^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4}.$$

Получаем выражение для квадрата амплитуды, описывающее поведение энергии линейного осциллятора в окрестности резонанса, поскольку энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Такую зависимость энергии в окрестности резонанса называют *резонансным контуром*, или *контуром Лоренца*:

$$A^2 = \frac{F_0^2/m^2}{\left(\omega^2 - \omega_r^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2}. \qquad (4.5.19)$$

Графически зависимость квадрата амплитуды от частоты внешней силы изображена на рисунке 4.5.3. При $\omega_0 >> \gamma$ (малое затухание) можно положить $\omega_r = \omega_0$:

$$A^2 = \frac{F_0^2/m^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}. \qquad (4.5.20)$$

Рассмотрим ширину контура резонанса по частоте $\Delta\omega$. *Ширина резонанса* определяется на полувысоте резонанса для квадрата амплитуды A^2:

$$\frac{F_0^2/m^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_0^2/m^2}{4\gamma^2\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)}.$$

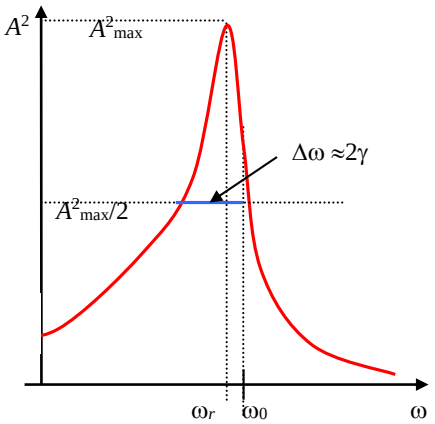


Рис. 4.5.3

Решения этого уравнения определяются после простых алгебраических преобразований:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm 2\gamma\omega_1 = \omega_r^2 \pm 2\gamma\omega_1;$$

$$\omega_{\text{лев}}^2 = \omega_r^2 - 2\gamma\omega_1, \quad \omega_{\text{пр}}^2 = \omega_r^2 + 2\gamma\omega_1. \tag{4.5.21}$$

Вычитая первое соотношение из второго в (4.5.21), имеем:

$$\omega_{\text{пр}}^2 - \omega_{\text{лев}}^2 = 4\gamma\omega_1.$$

Наиболее важный случай, когда $\omega_0 >> \gamma$, тогда получаем ширину, равную:

$$\omega_{\text{пр}}^2 - \omega_{\text{лев}}^2 = \left(\omega_{\text{пр}} - \omega_{\text{лев}}\right)\left(\omega_{\text{пр}} + \omega_{\text{лев}}\right) \approx 2\omega_1\Delta\omega = 4\gamma\omega_1;$$

$$\Delta\omega = 2\gamma, \tag{4.5.22}$$

где $\Delta\omega$ — ширина резонанса, определяемая на полувысоте резонанса (см. рис. 4.5.3). Видно, что ширина резонанса непосредственно связана с коэффициентом затухания. Чем больше γ, тем шире резонансный контур и менее выражено резонансное поведение. Кстати, отношение частоты к ширине резонанса непосредственно связано с добротностью колебательного контура:

$$\frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\pi}{\gamma T} = Q, \tag{4.5.23}$$

где T — период вынужденных колебаний.

4.5.4. Фазово-частотная характеристика

Уравнение для фазы (4.5.9) описывает соотношение фазы колебаний и фазы вынуждающей силы. Поскольку вынуждающая сила изменяется во времени по закону $F_0 \cos\omega t$, а фаза в решении для установившихся колебаний берется со знаком «минус»: $-\varphi$, то отсюда следует следующее.

1. Если $\varphi > 0$, получаем, что колебание системы запаздывает относительно колебания силы.

2. Если $\varphi < 0$, получаем, что система колеблется с опережением относительно колебания силы.

Построим кривую зависимости $tg\varphi = 2\gamma\omega/\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$ от частоты внешней силы. Для этого рассмотрим значения тангенса в предельных случаях:

$$\omega << \omega_0 \qquad \mathrm{tg}\,\phi \to +0$$
$$\omega \to \omega_0 - 0 \qquad \mathrm{tg}\,\phi \to +\infty$$
$$\omega \to \omega_0 + 0 \qquad \mathrm{tg}\,\phi \to -\infty$$
$$\omega >> \omega_0 \qquad \mathrm{tg}\,\phi \to -0$$

Эта примерная зависимость показана на рисунке 4.5.4. Видно, что получаем разрыв тангенса фазы при $\omega = \omega_0$.

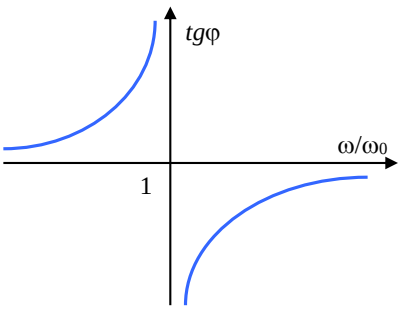


Рис. 4.5.4

Если построить поведение самой фазы, то получаем изменение этой фазы на π в области резонанса (рис. 4.5.5). Отметим, что скачок фазы на π — это характерная особенность прохождения области резонанса: всегда, когда в поведении фазы происходит изменение на π, это означает, что система (осциллятор) проходит область частот $\omega \sim \omega_0$, где наблюдается резонанс.

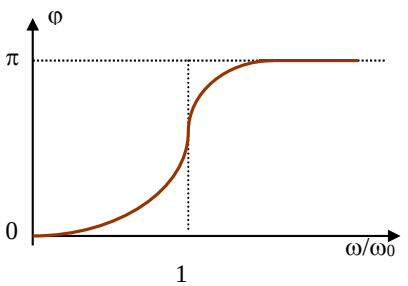


Рис. 4.5.5

Часто откладывают фазу со знаком «минус»: $-\varphi$ (см. рис. 4.5.6), поскольку в решение (4.5.13а) она входит тоже со знаком «минус». При малых частотах колебания происходят в фазе с вынуждающей силой ($\varphi = 0$), при больших ча-

стотах вынуждающей силы колебания системы происходят в противофазе ($\varphi = \pi$) с колебаниями силы. При частоте, близкой к частоте резонанса $\omega \approx \omega_0$, имеем скачок тангенса и соответственно фазы на π.

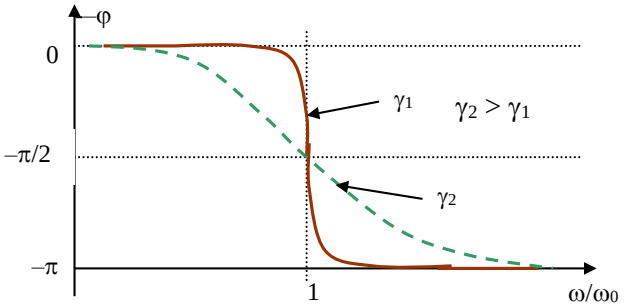


Рис. 4.5.6

Как получали ранее, ширина резонанса $\Delta\omega$ зависит от коэффициента затухания γ, поэтому область «скачка» фазы на π также зависит от коэффициент затухания γ. Как показано на рисунке 4.5.6, чем больше затухание γ, тем более широкая и плавная область перехода фазы.

4.6. Автоколебания. Параметрические колебания

4.6.1. Автоколебания

Потеря энергии собственных колебаний приводит к затуханию. Можно использовать гармоническую подпитку энергией с помощью вынужденных колебаний. Но можно создать такое устройство, когда осциллятор сам регулирует подвод энергии, чтобы компенсировать ее потерю на трение. За период колебаний из внешнего источника энергия, приобретаемая осциллятором, равна энергии, затрачиваемой на преодоление сил трения. Отсюда, осциллятор совершает незатухающие колебания. Такие самоподдерживающиеся колебания называются *автоколебаниями*.

При малом трении автоколебания с большой точностью являются гармоническими, а их частота очень близка к частоте собственных колебаний.

При большом трении за период подводится значительная часть полной энергии осциллятора, и поэтому колебания сильно отличаются от гармонических — период этих колебаний не совпадает с периодом собственных колебаний.

Рассмотрим несколько примеров автоколебаний.

1. Автоколебания маятника. Маятник со стержнем, подвешенный на оси во вращающейся втулке. Втулка вращается с постоянной угловой скоростью и передает часть энергии оси маятника за счет трения между осью и втулкой. Трение зависит от относительной скорости втулки и оси маятника: когда движение оси (маятника) происходит по направлению вращения втулки, то трение меньше и часть энергии передается в движение маятника; когда движение маятника

против вращения втулки, то трение больше и движение замедляется. Полный результат за период зависит от характера зависимости сил трения от скорости относительного движения. Если трение не зависит от относительной скорости, то поддержки колебаний не происходит. Если трение растет со скоростью, то усиливается затухание. Если трение падает со скоростью, то амплитуда колебаний увеличивается. Установившиеся колебания получаются тогда, когда сила трения о воздух компенсирует переданную энергию.

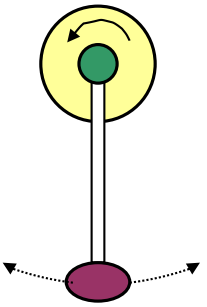


Рис. 4.6.1

2. Колебания маятника в часах («ходики») поддерживаются «гирей», при этом происходит работа поля тяжести, или пружиной — работа сил упругости сжатой пружины.

3. В некоторых электрических колебаниях при уменьшении амплитуды автоматически включается электрическая подпитка — подсоединение к источнику тока или напряжения.

Релаксационные колебания — изменения в системе накапливаются постепенно, затем резко изменяется состояние системы, возвращающее ее к начальному состоянию, затем снова происходит постепенное накопление изменений до момента нового «срыва» и т. д. Примеры такой системы — сифон (простейшая схема показана на рис. 4.6.2), гейзер.

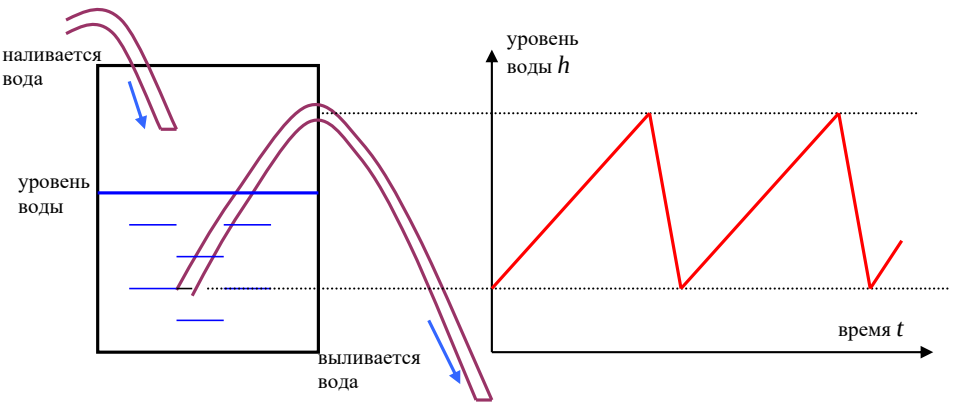


Рис. 4.6.2

4.6.2. Параметрическое возбуждение колебаний

Характеристики или свойства колебательных систем описываются величинами, называемыми *параметрами*. Так, математический маятник характеризуется одним параметром — длиной. Если изменять какой-либо параметр в определенном такте с колебаниями, то можно сообщить маятнику энергию и тем самым поддерживать колебания в незатухающем режиме. Такое возбуждение и поддержание колебаний называется *параметрическим*.

Примеры возбуждения и поддержания параметрических колебаний.

1. Качели. Колебания поддерживаются мускульной силой, изменяющей центр тяжести системы.

2. Маятник на нити, длину которой меняют в такт с колебаниями.

4.6.3. Колебания связанных систем

Колебания могут быть со многими степенями свободы (даже простой маятник может совершать колебания по осям *x* и *y*). *Связанная система* — система со многими степенями свободы, между которыми имеются связи, обеспечивающие возможность обмена энергией между различными степенями свободы.

Примеры колебательных систем со многими степенями свободы представлены на рисунке 4.6.3. Так, на рис. 4.6.3*б* система имеет четыре степени свободы. Несмотря на сложность комбинированного движения связанных систем (двух связанных маятников на рис. 4.6.3*б*), его всегда можно разложить на простейшие колебания, которые служат своеобразными ортами в пространстве колебаний и носят название *нормальных колебаний*. Число нормальных частот равно числу степеней свободы. Так, например, движение на рис. 4.6.3*б* (см. также рис. 4.6.4 и 4.6.5) с четырьмя степенями свободы раскладывается на четыре независимых колебания со своими частотами.

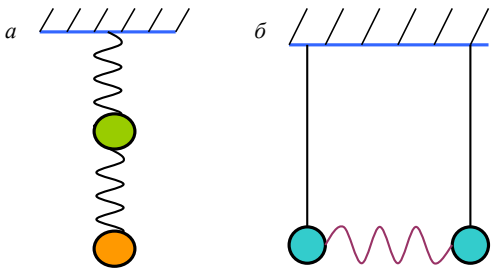


Рис. 4.6.3

Сначала рассмотрим движение шаров в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка (см. вид на систему сверху на рис. 4.6.4). Отклонения шара 1 и шара 2 можно рассматривать как сумму двух нормальных колебаний системы. А именно: система как целое отклоняется на смещение *б* (оба как целое колеблются с частотой ω_1), и колебания шаров в разные стороны относительно центра масс системы *а* (с частотой ω_2) на один и тот же угол. Естественно, что сумма и разность смещений *а* и *б* дают для каждого шара в отдельности их смещения относительно положения равновесия.

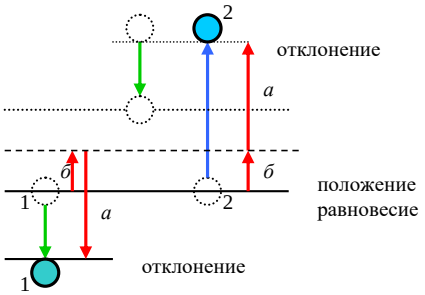


Рис. 4.6.4

Аналогично можно рассмотреть колебания системы в плоскости рисунка (см. рис. 4.6.5). Здесь также имеем совместное колебание двух шаров как целой системы с частотой ω_3 и отклонения шаров в разные друг от друга стороны на одинаковые углы с частотой ω_4.

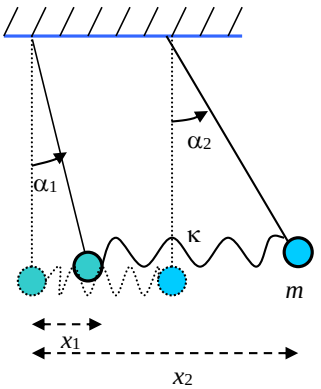


Рис. 4.6.5

В принципе существует общий способ нахождения нормальных частот системы, однако зачастую это достаточно сложная задача. В качестве примера рассмотрим для последнего случая колебаний (рис. 4.6.5), как находятся частоты ω_3 и ω_4. Пусть шарики имеют одинаковую массу m, к — жесткость пружины, а координаты шаров x_1 и x_2 отсчитываются от положения равновесия левого шара. Тогда, исходя из результатов п. 4.1 и 4.2 для пружинного и математического маятников, уравнения движения записываются:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{g}{l}x_1 + \frac{\kappa}{m}(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{g}{l}x_2 - \frac{\kappa}{m}(x_2 - x_1) \end{aligned}. \qquad (4.6.1)$$

Сложим эти два уравнения и вычтем:

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -\frac{g}{l}(x_1 + x_2);$$

$$(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -\frac{g}{l}(x_2 - x_1) - \frac{2\kappa}{m}(x_2 - x_1).$$

Рассматривая сумму координат и разность как две новые переменные, получаем уравнения колебаний:

$$\begin{aligned}&\left(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2\right)+\omega_1^2\left(x_1+x_2\right)=0\\&\left(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1\right)+\omega_2^2\left(x_2-x_1\right)=0\end{aligned}\tag{4.6.2}$$

с частотами соответственно равными:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2\kappa}{m}}.\tag{4.6.3}$$

Тогда решения уравнений (4.6.2) записываются:

$$\begin{aligned}&x_2+x_1=A_0\sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right);\\&x_2-x_1=B_0\sin\left(\omega_2 t+\varphi_2\right).\end{aligned}\tag{4.6.4}$$

Эти решения и частоты совпадают с нормальными колебаниями сложного маятника в плоскости рисунка.

4.7. Распространение колебаний. Волны

4.7.1. Плоские волны

Рассмотрим гармоническое колебание точки:

$$\xi(t)=A_0\cos(\omega t+\alpha).\tag{4.7.1}$$

Пусть для простоты колебания происходят в среде, в которой за счет связи между точками среды могут распространяться колебания. Для начала рассматриваем колебания в точке с координатами ($x = y = z = 0$), затем пусть эти колебания распространяются со скоростью v вдоль оси x. Тогда эта же фаза колебаний, которая была в начале координат, достигнет точки с координатами (x, y = = z = 0) через время $t=x/v$, т. е. фаза колебаний на расстоянии x от точки возникновения колебаний запаздывает на это время t. Тогда колебания в точке x записываются:

$$\xi(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right].\tag{4.7.2}$$

Это и есть уравнение *плоской волны*, распространяющейся вдоль оси x. Название «плоская» происходит из-за того, что получаем одно и то же значение «смещения» $\xi(t)$ в плоскости (y, z), или постоянство фазы в этой плоскости. Скорость v — *фазовая скорость* волны вдоль оси x. Это скорость распространения постоянной фазы. Вводят *волновое число*

$$k=\frac{\omega}{v}.\tag{4.7.3}$$

Тогда уравнение плоской волны можно записать

$$\xi(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\alpha).\tag{4.7.4}$$

Часто начальную фазу опускают ($\alpha = 0$), поскольку всегда можно изменить начало отсчета. На рисунке 4.7.1 показано распределение «смещения» $\xi(x,t)$ по координате x в определенный момент времени t. Если в среде затухания нет, то амплитуда колебаний во всех точках x и, как показано на рисунке 4.7.1, в любой момент времени t не меняется.

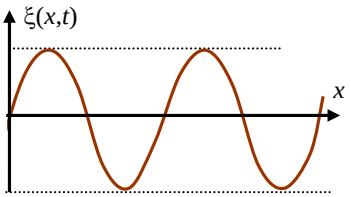


Рис. 4.7.1

Пусть волна распространяется вдоль произвольного направления с фазовой скоростью $\vec{v}$. Если волна плоская (см. рис. 4.7.2 и 4.7.3), то фазовые скорости вдоль осей x, y, z определяются следующим образом:

$$v_x = \frac{v}{\cos\alpha}, \quad v_y = \frac{v}{\cos\beta}, \quad v_z = \frac{v}{\cos\gamma}, \tag{4.7.5}$$

где α, β, γ — углы, образуемые вектором скорости относительно осей x, y, z соответственно. Рассматривая колебания в точке с координатами (x, y, z), получаем следующее уравнение, описывающее распространение плоской волны:

$$\begin{aligned}\xi(\vec{r},t) &= A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v_x} - \frac{y}{v_y} - \frac{z}{v_z}\right)\right] = \\ &= A\cos\left[\omega t - \frac{\omega}{v}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\right] = \\ &= A\cos(\omega t - xk\cos\alpha - yk\cos\beta - zk\cos\gamma) = \\ &= A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).\end{aligned} \tag{4.7.6}$$

Здесь введен *волновой вектор* $\vec{k}$, направление которого совпадает с направлением распространения волны (перпендикулярно к фронту волны) и по модулю равный волновому числу:

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{v}. \tag{4.7.7}$$

Можно еще ввести начальную фазу волны α, тогда общий вид плоской волны запишется:

$$\xi(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha\right).. \tag{4.7.8}$$

Если источник колебаний точечный или имеет сферическую симметрию, то волна распространяется в изотропном пространстве в радиальном направлении, т. е. вектор $\vec{k}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{r}$ и $\vec{k}\vec{r} = kr$. Причем в изотропном пространстве на сфере любого радиуса значения фазы и амплитуды имеют одинаковые значения. Однако сама амплитуда волны изменяется с рас-

стоянием от источника r. В самом деле, если потерь в среде нет, то энергия распространяющихся колебаний (пропорциональная квадрату амплитуды) распределяется по площади сферы с возрастающим радиусом:

$$E \sim \left|A(r)\right|^2 \cdot 4\pi r^2 = \text{const}. \tag{4.7.9}$$

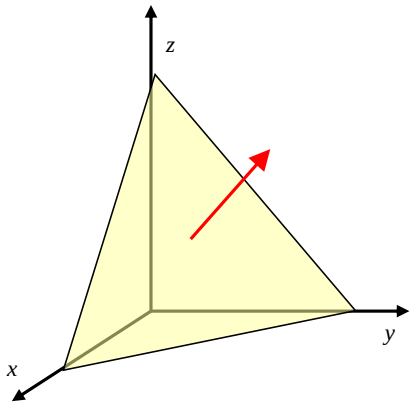


Рис. 4.7.2

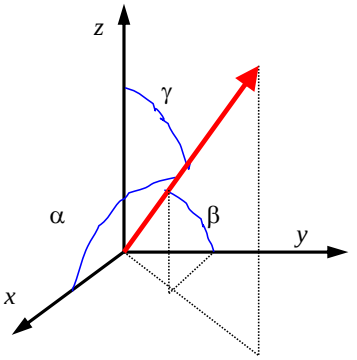


Рис. 4.7.3

Следовательно, амплитуда распространяющихся колебаний падает с радиусом обратно пропорционально ему $A(r) \sim 1/r$, и тогда уравнение, описывающее такую волну, запишется:

$$\xi(\vec{r},t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha)\,. \tag{4.7.10}$$

Такая волна носит название *сферической волны* и имеет одну и ту же фазу колебаний на сфере радиусом r.

4.7.2. Волновое уравнение и волны

Чтобы изучать распространение волн, необходимо получить соответствующее уравнение, решение которого описывало бы все многообразие волновых процессов. Вопрос о выводе такого уравнения в основном отложим до изучения электромагнитных волн. В этом параграфе только поясним, как можно было бы догадаться о его виде, исходя из уравнения плоской волны.

Продифференцируем дважды по времени и по всем координатам уравнение плоской волны (4.7.8):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha\right) = -\omega^2\xi; \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -Ak_x^2\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha\right) = -k_x^2\xi; \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -Ak_y^2\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha\right) = -k_y^2\xi; \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -Ak_z^2\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha\right) = -k_z^2\xi. \end{cases} \tag{4.7.11}$$

Сложим координатные производные:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\equiv\Delta\xi=-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\xi=-k^2\xi\,. \qquad (4.7.12)$$

Здесь мы ввели *оператор Лапласа*:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\equiv\Delta\xi\,. \qquad (4.7.13)$$

Из (4.7.7) видим, что $k^2=\omega^2/v^2$, и тогда, пользуясь уравнениями (4.7.11), заменяем k^2 и ω^2 соответствующими вторыми производными и получаем:

$$\frac{\Delta\xi}{\xi}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\xi\partial t^2}\,.$$

Сокращая на ξ, получаем дифференциальное уравнение, называемое *волновым уравнением*:

$$\Delta\xi\left(\vec{r},t\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi\left(\vec{r},t\right)}{\partial t^2}=0\,. \qquad (4.7.14)$$

Вообще (4.7.14) — общий вид волнового уравнения, описывающего всевозможные волновые процессы. Легко увидеть непосредственной подстановкой, что любая функция, зависящая от аргумента $\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)$:

$$\xi\left(\vec{r},t\right)=f\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right), \qquad (4.7.15)$$

является решением этого уравнения.

Для волн, распространяющихся вдоль одной оси x, волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,. \qquad (4.7.16)$$

Решением уравнения (4.7.15) являются рассмотренные выше плоская и сферическая волны. Заниматься другими решениями этого уравнения будем при рассмотрении электромагнитных волн.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. — М. : Наука, 1979. — Т. 1 : Механика.

2. *Матвеев, А. М.* Механика и теория относительности. — М. : Высш. шк., 1986.

3. *Иродов, И. Е.* Основные законы механики. М. : Высш. шк., 1985.

4. *Ипатова, И. П.* Курс физики / И. П. Ипатова, В. Ф. Мастеров, Ю. И. Уханов. — СПб. : Изд-во СПбГТУ, 2001. — Т. 1 : Механика. Термодинамика.

5. *Киттель, Ч.* Берклеевский курс физики / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. — М. : Наука, 1983. — Т. 1 : Механика.

6. *Савельев, И. В.* Курс общей физики. — М. : Физматгиз, 1977. — Т. 1.

Дополнительная литература по СТО

1. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. — М. : Наука, 1980. — Т. 4 : Оптика.

2. *Тейлор, Э. Ф.* Физика пространства-времени / Э. Ф. Тейлор, Д. А. Уилер. — М. : Мир, 1971.

Вадим Константинович ИВАНОВ

ФИЗИКА.
МЕХАНИКА

Учебное пособие

Зав. редакцией физико-математической
литературы *О. Е. Гайнутдинова*
Ответственный редактор *Н. С. Захарова*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Выпускающий *Е. А. Дмитриева*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028 от 14.04.2016 г.,
выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр-кт Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 17.12.24.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 1/16.
Печать офсетная/цифровая. Усл. п. л. 19,83. Тираж 30 экз.

Заказ № 1357-24.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр-кт, д. 42, к. 5.